

DER MEMBRANSPANNUNGSZUSTAND IN EINER KUGELSCHALE IN DER UMGEBUNG EINES KONZENTRIERTEN MOMENTES

Von

E. REUSS und F. THAMM

Lehrstuhl für Technische Mechanik der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 22. Dezember, 1959)

In den letzten Jahren haben Kugelbehälter für die Speicherung von Gasen und Flüssigkeiten zunehmende Verbreitung gefunden. Die Fragen der Bemessung dieser Behälter sind bereits mehr oder weniger geklärt, nur hin-

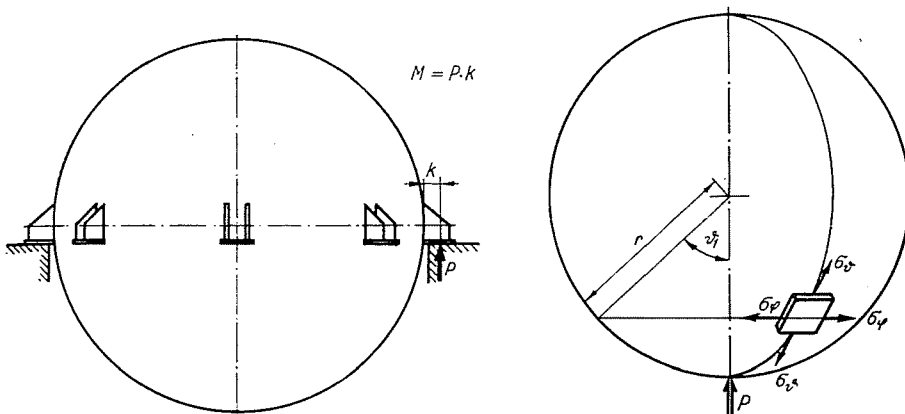


Abb. 1. Auflagerung einer Kugelschale; neben den Auflagerkräften entstehen auch noch Auflagermomente

Abb. 2. Spannungskomponenten in einer Kugelschale, die unter dem Einfluß einer im geographischen Pol der Kugel angreifenden konzentrierten Druckkraft entstehen

sichtlich des Spannungszustandes in der Umgebung der Auflagepunkte herrscht eine gewisse Unsicherheit. Wenn die Stützen des Behälters gemäß Abb. 1. ausgeführt sind, wird auf die Kugelschale an den Stellen der Sützenanschlüsse außer der Kraft P noch das Moment $M = Pk$ übertragen.

Ziel dieser Abhandlung ist die Klärung des Spannungszustandes, der sich um den Angriffspunkt des Momentes M herum ausbildet, u. zw. unter der Voraussetzung, daß die Biegemomente in der Kugelschale vernachlässigbar sind (d. h. daß nur der Membranspannungszustand in Betracht gezogen wird).

Zur Ermittlung des Spannungszustandes wird folgender Weg eingeschlagen: Die Spannungszustände unter dem Einfluß zweier gleich großer, aber

entgegengesetzt gerichteter, auf die Schalenfläche normaler Kräfte werden einander überlagert. Die Kräfte werden nun einander genähert, ihre Größe jedoch gleichzeitig so verändert, daß das durch sie gebildete Moment konstant bleibt. Der Grenzübergang für den Fall, daß die Kräfte unendlich nahe aneinander gerückt werden, ergibt den gesuchten Spannungszustand.

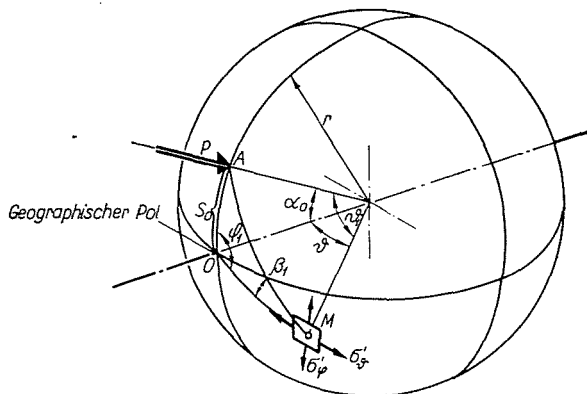


Abb. 3. Konzentrierte Druckkraft außerhalb des Pols

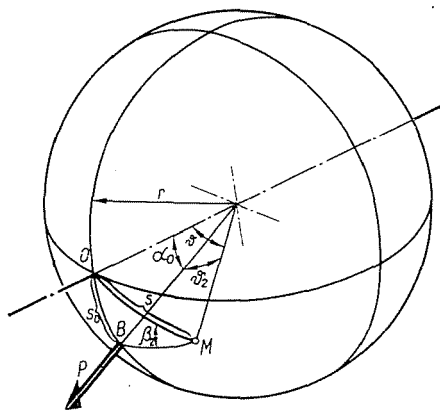


Abb. 4. Konzentrierte Zugkraft außerhalb des Pols

Die σ_θ Meridian- und σ_φ Ringspannungen, die unter dem Einfluß einer im geographischen Pol einer Kugelschale angreifenden Druckkraft P entstehen, betragen mit den Bezeichnungen der Abb. 2

$$\sigma_\theta = - \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1}$$

$$\sigma_\varphi = - \sigma_\theta = + \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \quad (1)$$

wo v die Wanddicke der Kugelschale bezeichnet. Da σ_φ und σ_ϑ Hauptspannungen sind, ist $\tau_{\vartheta\varphi} = 0$.

Befindet sich der Angriffspunkt der Kraft P nicht im geographischen Pol, sondern um die Strecke $s_0 = r\alpha_0$ in radialer Richtung vom Pol entfernt, dann schreiben sich die Meridional- und Ringspannungen sowie die Schubspannungen im ursprünglichen Koordinatensystem mit den Bezeichnungen der Abb. 3 zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_\vartheta &= \frac{\sigma_\vartheta + \sigma_\varphi}{2} + \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\beta_1 = - \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{\cos 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1} \\ \sigma'_\varphi &= \frac{\sigma_\vartheta + \sigma_\varphi}{2} - \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\beta_1 = + \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{\cos 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1} \\ \tau'_{\vartheta\varphi} &= - \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi}{2} \sin 2\beta_1 = + \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{\sin 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wenn nun am selben Meridian, auf dem die Kraft P angreift, jedoch auf der anderen Seite des Pols, um den gleichen Betrag $s_0 = r\alpha_0$ versetzt, eine Zugkraft P angreift, dann betragen die Spannungskomponenten unter dem Einfluß der letzteren mit den Bezeichnungen der Abb. 4 ähnlich den vorigen

$$\left. \begin{aligned} \sigma''_\vartheta &= + \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{\cos 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_2} \\ \sigma''_\varphi &= - \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{\cos 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_2} \\ \tau''_{\vartheta\varphi} &= + \frac{P}{2\pi r v} \cdot \frac{\sin 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Addiert man die zusammengehörigen Spannungskomponenten in (2) und (3) und führt man die Bezeichnung $q = \frac{P}{2\pi r v}$ ein, dann hat man

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\vartheta &= \sigma'_\vartheta + \sigma''_\vartheta = q \left[- \frac{\cos 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1} + \frac{\cos 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_2} \right] = \\ &= q \frac{\sin^2 \vartheta_1 \cos 2\beta_2 - \sin^2 \vartheta_2 \cos 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2} \\ \sigma_\varphi &= \sigma'_\varphi + \sigma''_\varphi = q \left[\frac{\cos 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1} - \frac{\cos 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_2} \right] = - \sigma_\vartheta \\ \tau_{\vartheta\varphi} &= \tau'_{\vartheta\varphi} + \tau''_{\vartheta\varphi} = q \left[\frac{\sin 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1} + \frac{\sin 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_2} \right] = \\ &= q \frac{\sin^2 \vartheta_2 \sin 2\beta_1 + \sin^2 \vartheta_1 \sin 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Es erscheint zweckmäßig, statt der Veränderlichen $\vartheta_1; \vartheta_2; \beta_1; \beta_2$ als unabhängige Veränderliche die Größen ϑ und φ einzuführen. Die nötigen Zusammenhänge ergeben sich aus der sphärischen Trigonometrie.

Abb. 5 zeigt die Kugeldreiecke OMA und MOB aus den Abb. 3 und 4 auf der Einheitskugel dargestellt, und der Einfachheit halber eben gestreckt.

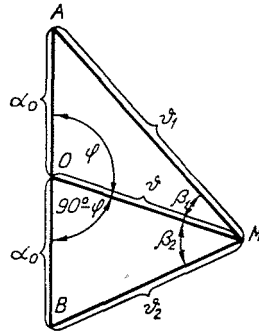


Abb. 5. Zur Ermittlung der resultierenden Spannungen

Mit den Bezeichnungen der Abb. 5 gilt auf Grund des Kosinussatzes der sphärischen Trigonometrie

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \cos \vartheta \cos \alpha_0 + \sin \vartheta \sin \alpha_0 \cos \varphi \\ \cos \vartheta_2 &= \cos \vartheta \cos \alpha_0 - \sin \vartheta \sin \alpha_0 \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

woraus sich weiter

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \vartheta_1 &= \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha_0 + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \varphi + \\ &\quad + \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \vartheta_1 &= 1 - \cos^2 \vartheta_1 = 1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha_0 - \\ &\quad - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \varphi - \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \vartheta_2 &= \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha_0 - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \varphi + \\ &\quad + \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \vartheta_2 &= 1 - \cos^2 \vartheta_2 = 1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha_0 + \\ &\quad + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \varphi - \sin^2 \vartheta \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ergibt.

Für β_1 und β_2 werden die Formeln Nr. 5/2 aus Hütte, Ausgabe 28, Bd. I. Seite 74 benützt. Mit den Bezeichnungen der Abb. 5 wird

$$\left. \begin{aligned} - \operatorname{ctg} \beta_1 \sin \varphi &= \sin \vartheta \operatorname{ctg} \alpha_0 - \cos \vartheta \cos \varphi \\ - \operatorname{ctg} \beta_2 \sin \varphi &= \sin \vartheta \operatorname{ctg} \alpha_0 + \cos \vartheta \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Da außerdem auf Grund des Zusammenhanges zwischen den trigonometrischen Funktionen

$$\sin 2\beta = \frac{2 \cotg \beta}{\cotg^2 \beta + 1}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\cotg^2 \beta - 1}{\cotg^2 \beta + 1},$$

wird

$$\cos 2\beta_1 = \frac{\cotg^2 \varphi \cos^2 \vartheta - 2 \cotg \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} - 1}{\cotg^2 \varphi \cos^2 \vartheta - 2 \cotg \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} + 1} =$$

$$= \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta - 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 + \sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha_0 - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta - 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 + \sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha_0 + \sin^2 \varphi}$$

und dementsprechend

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\beta_1 &= \frac{2 [\sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi \cotg \alpha_0]}{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta - 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 + \sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha_0 + \sin^2 \varphi} \\ \cos 2\beta_2 &= \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 + \sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha_0 - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 + \sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha_0 + \sin^2 \varphi} \\ \sin 2\beta_2 &= \frac{-2 [\sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi \cotg \alpha_0]}{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta + 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \cotg \alpha_0 + \sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha_0 + \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} (8)$$

Die Gleichungen (6) und (8) müssen in die Gleichungen (4) eingesetzt werden, auch ist der Grenzübergang $\alpha_0 \rightarrow 0$ durchzuführen, wobei $M = 2r\alpha_0 P$ konstant bleibt. Letztere Bedingung ergibt

$$q = \frac{P}{2\pi r v} = \frac{M}{4\pi r^2 v \alpha_0}$$

Während des Grenzüberganges geht $\sin^2 \vartheta_1$ und $\sin^2 \vartheta_2$ nach $\sin^2 \vartheta$. Wird die erste und dritte der Gleichungen (8) mit $\text{tg}^2 \alpha_0$ erweitert, so erhält man folgende Ausdrücke

$$\cos 2\beta_1 = \frac{\sin^2 \vartheta - 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \text{tg} \alpha_0 + \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \text{tg}^2 \alpha_0 - \sin^2 \varphi \text{tg}^2 \alpha_0}{\sin^2 \vartheta - 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \text{tg} \alpha_0 + \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \text{tg}^2 \alpha_0 + \sin^2 \varphi \text{tg}^2 \alpha_0}$$

$$\cos 2\beta_2 = \frac{\sin^2 \vartheta + 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \text{tg} \alpha_0 + \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \text{tg}^2 \alpha_0 - \sin^2 \varphi \text{tg}^2 \alpha_0}{\sin^2 \vartheta + 2 \cos \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta \text{tg} \alpha_0 + \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \text{tg}^2 \alpha_0 + \sin^2 \varphi \text{tg}^2 \alpha_0}$$

Wenn $\alpha_0 \rightarrow 0$, dann nähern sich, da $\operatorname{tg} \alpha_0 \cong \alpha_0 \rightarrow 0$, beide Ausdrücke dem Werte 1. Für kleine Werte von α_0 läßt sich schreiben

$$\begin{aligned}\cos 2\beta_1 &= 1 - \dots \\ \cos 2\beta_2 &= 1 - \dots\end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned}\sin^2 \vartheta_1 &= \sin^2 \vartheta - 2\alpha_0 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi + \dots \\ \sin^2 \vartheta_2 &= \sin^2 \vartheta + 2\alpha_0 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi + \dots\end{aligned}$$

Die weiteren Glieder können entfallen, da sie bei dem Grenzübergang $\alpha_0 \rightarrow 0$ klein von der 2. Ordnung sind. Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich aus der 1. Gleichung von (4)

$$\sigma_{\vartheta} = q \frac{\sin^2 \vartheta_1 \cos 2\beta_2 - \sin^2 \vartheta_2 \cos 2\beta_1}{\sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2} \rightarrow -q \frac{4\alpha_0 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi}{\sin^4 \vartheta} \quad (9)$$

Da außerdem

$$q = \frac{M}{4\pi r^2 v \alpha_0},$$

wird damit

$$\sigma_{\vartheta} = -\frac{M}{\pi r^2 v} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \cos \varphi \quad (10)$$

Die 2. Gleichung von (4) ergibt

$$\sigma_{\varphi} = -\sigma_{\vartheta} = +\frac{M}{\pi r^2 v} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \cos \varphi. \quad (11)$$

Da sich für kleine Werte von α_0 , $\cotg \alpha_0$ dem ∞ nähert, überwiegt im Nenner von $\sin 2\beta_1$, und $\sin 2\beta_2$ (8) das Glied $\sin^2 \vartheta \cotg^2 \alpha_0$. Im Hinblick hierauf kann der Grenzübergang der 3. Gleichung der Formelgruppe (4) wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned}\tau_{\vartheta} &= q \frac{\sin^2 \vartheta_2 \sin 2\beta_1 + \sin^2 \vartheta_1 \sin 2\beta_2}{\sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{q}{\sin^4 \vartheta} \left[\sin^2 \vartheta \frac{2(-\alpha_0 \sin \vartheta \sin \varphi)}{\sin^2 \vartheta} + \sin^2 \vartheta \frac{(-2)\alpha_0 \sin \varphi \sin \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right] = \\ &= \frac{-4\alpha_0 q \sin \varphi}{\sin^3 \vartheta}, \quad (12)\end{aligned}$$

oder mit dem Wert von q

$$\tau_{\vartheta\varphi} = \frac{-M \sin \varphi}{\pi r^2 v \sin^3 \vartheta} \quad (13)$$

Die auf Grund der Gleichungen (10), (11) und (13) sich ergebenden Spannungskomponenten klingen mit wachsender Entfernung vom Angriffspunkt des Momentes, also mit wachsendem ϑ rasch ab. Große Werte erhält man nur in der Nähe des Angriffspunktes. Da hier ϑ klein ist, kann in guter Annäherung geschrieben werden, daß $\sin \vartheta \cong \vartheta$; $\cos \vartheta \cong 1$. Wenn außerdem noch die Entfernung $s = r\vartheta$ der untersuchten Stelle vom Angriffspunkt des Momentes als neue unabhängige Veränderliche eingeführt wird, erhält man in guter Annäherung folgende Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= -\sigma_{\vartheta} = -\frac{M \cdot r}{\pi s^3 v} \cos \varphi \\ \tau_{\vartheta\varphi} &= -\frac{M \cdot r}{\pi s^3 v} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Aus den Gleichungen (14) ergeben sich die Hauptspannungen des Spannungszustandes zu

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{\varphi} + \sigma_{\vartheta}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\varphi} - \sigma_{\vartheta}}{2}\right)^2 + \tau_{\vartheta\varphi}^2} = \pm \frac{M \cdot r}{\pi s^3 v}.$$

Der Neigungswinkel δ der Hauptspannungsrichtungen errechnet sich aus

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2\tau_{\vartheta\varphi}}{\sigma_{\varphi} - \sigma_{\vartheta}} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wurden die Hauptspannungstrajektorien in der Nähe des Momentenangriffspunktes (für die Hälfte des Feldes) aufgezeichnet (Abb. 6).

Wenn man auf die größere Genauigkeit verzichtet, die die Gleichungen (10), (11) und (13) bieten, dann lassen sich die Gleichungen (14) auch mit weniger Rechenarbeit ableiten.

Werden in die Gleichungen (1) die Polarkoordinaten ϱ , φ eingeführt, so erhält man für die Umgebung des Kraftangriffspunktes annähernd (Abb. 7)

$$\varrho = r \sin \vartheta.$$

Die Spannungskomponenten im Punkt A , die von der Kraft P_1 herrühren, ergeben sich mit der Bezeichnung $+P_1 = -P_2 = \frac{M}{\Delta x} = P$ gemäß Abb. 8

die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varrho} &= \frac{-Mr}{2\pi v \Delta x} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{+Mr}{2\pi v \Delta x} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\tau_{\varrho\varphi} = 0$$

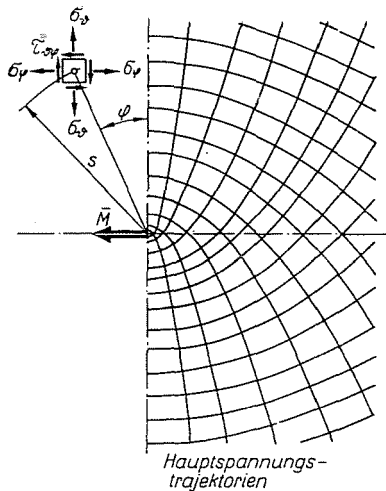


Abb. 6. Die Hauptspannungstrajektorien des Spannungszustandes

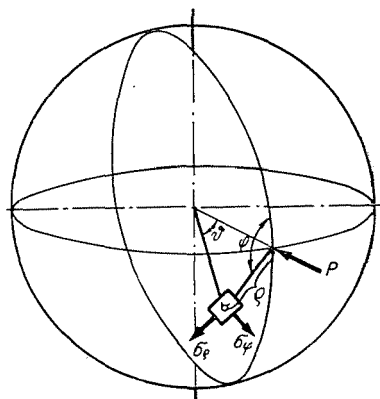


Abb. 7. Spannungskomponenten unter der Einwirkung einer konzentrierten Druckkraft P

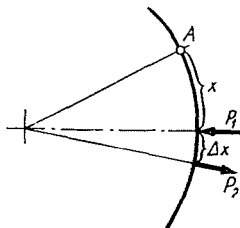


Abb. 8. Der gleichzeitige Einfluß der Kräfte P_1 und P_2

Man kann leicht nachweisen, daß die Spannungsfunktion

$$F(\varrho; \varphi) = \frac{-Mr}{2\pi v \Delta x} \ln \varrho$$

mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma_{\varrho} &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_{\varphi} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} \\ \tau_{\varrho\varphi} &= - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

auf (15) zurückgeführt werden kann. (Siehe z. B. S. Timoshenko: Theory of Elasticity, 2. Ausgabe, S. 56.)

Die Spannungen, die von der Kraft P_2 herrühren, lassen sich aus der Spannungsfunktion $-F(x + \Delta x)$ berechnen, während die Spannungsfunktion des resultierenden Spannungszustandes zu

$$F_1 = F(x) - F(x + \Delta x) = - \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \dots$$

geschrieben werden kann.

Nach Streichung der Glieder höherer Ordnung wird

$$\begin{aligned}F_1 &= - \frac{dF}{d\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} \cdot \Delta x = - \frac{dF}{d\varrho} \Delta x \cos \varphi \\ F_1 &= + \frac{Mr}{2\pi v} \cdot \frac{\cos \varphi}{\varrho}.\end{aligned}$$

Setzt man in die Gleichungen (16) F_1 an Stelle von F , dann erhält man

$$\begin{aligned}\sigma_{\varrho} &= - \frac{Mr}{\pi v} \cdot \frac{\cos \varphi}{\varrho^3} \\ \sigma_{\varphi} &= + \frac{Mr}{\pi v} \cdot \frac{\cos \varphi}{\varrho^3} \\ \tau_{\varrho\varphi} &= - \frac{Mr}{\pi v} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varrho^3}.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen stimmen abgesehen von den Bezeichnungen genau mit den Gleichungen (14) überein.

Zusammenfassung

An den Auflagepunkten von Kugelbehältern tritt, wenn die Auflagerkraft nicht tangential in die Kugelschale eingeleitet wird, außer einer Kraft noch ein Moment auf. Der als Folge dieses Moments sich ausbildende Spannungszustand kann ermittelt werden, wenn die Spannungszustände, die unter dem Einfluß zweier gleich großer, aber entgegengesetzt gerichteter Normalkräfte entstehen, überlagert, und die beiden Kräfte einander genähert werden, wobei ihre Größe so verändert wird, daß das durch sie gebildete Moment konstant bleibt. Etwas weniger genaue Gleichungen lassen sich mit viel weniger Rechenarbeit auf Grund der Airyschen Spannungsfunktion ableiten.

Prof. E. REUSS }
F. THAMM } Budapest, XI., Müegyetem rakpart 3, Ungarn