

DIE BERECHNUNG DER STRÖMUNG FÜR EIN DOPPELTES SCHAUFELGITTER

Von

M. BLAHÓ

Lehrstuhl für Strömungslehre der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 28. Dezember 1959)

Einleitung

Bei einem Teil der Strömungsmaschinen wird die Strömung durch ebene Schaufelgittern umgelenkt. Die Umlenkung ist mit einer Geschwindigkeitsänderung verbunden, da die auf das Gitter senkrechten Komponenten der Durchschnittsgeschwindigkeit — dem Kontinuitätssatz gemäß — vor und hinter dem Gitter einander gleich sind. Mit Beschleunigungsgittern kann vom Gesichtspunkt der Reibung aus eine fast beliebige Vergrößerung der Geschwindigkeit bzw. der Umlenkung erreicht werden, hingegen sind der Verminderung der Geschwindigkeit in einem Verzögerungsgitter durch die Ablösung der Strömung Grenzen gesetzt.

Um eine erhebliche Verminderung der Geschwindigkeit erreichen zu können, das heißt zu einer beträchtlichen Erhöhung des Druckes bedarf es also zweier oder mehrerer Stufen. Die zwischen den beiden Laufrädern unterzubringenden Umlenkschaufeln erschweren die Konstruktion einer zweistufigen Maschine im Vergleich zu der einer einstufigen sehr wesentlich.

In einem gewissen Bereich der praktischen Anforderungen kann ein zweifaches umlaufendes Schaufelgitter verwendet werden, bei dem zwischen den beiden Laufschaufelreihen keine stehenden sogenannten Umlenkschaufeln angeordnet zu werden brauchen.

Die Strömung um ein solches Doppelgitter läßt sich nach dem sogenannten Singularitätenverfahren berechnen, wenn man die physikalische Bedingung, daß die Geschwindigkeit entlang der Schaufel nur tangential sein kann, an beiden Gittern zugleich und in einer beliebiger Anzahl von Punkten befriedigt (1).

Ein anderes Rechenverfahren besteht darin, die genannte Bedingung gesondert für das eine und für das andere Gitter zu befriedigen, dabei jedoch den Einfluß des anderen Gitters mit zu berücksichtigen. Zum gesuchten Endergebnis gelangt man hierbei nur mit Wiederholung des Rechnungsganges, doch kommt man mit einer kleinen Anzahl von Proben aus, wenn man sich an die im folgenden zu beschreibende Methode hält.

Der Anwendungsbereich des Verfahrens ist auf Gitter beschränkt, deren Elemente mäßig gewölbt sind (etwa $f/l = 0,15$), und die eine Schaufeldicke besitzen, die im Vergleich zur Schaufelsehne vernachlässigt werden kann. Das Berechnungsverfahren setzt ferner voraus, daß die Flüssigkeit inkompressibel ist und — wie bei ähnlichen Verfahren üblich — reibungslos strömt. Der Einfluß der Flüssigkeitsreibung läßt sich anhand grenzschichttheoretischer Betrachtungen verfolgen, denen die Geschwindigkeitsverteilung entlang den Schaufeln bei reibungsloser Strömung zugrunde liegt.

Solcherart würde das Verfahren, obzwar es auch für beliebig nahe aneinander- bzw. allenfalls sogar ineinanderreichende Gitter zu verwenden ist, zu Ergebnissen führen, die den tatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechen, wenn die Entfernung zwischen zwei Schaufeln nicht wesentlich größer ist, als die Dicke der Grenzschicht. Solche Fälle, in denen man eher von Spaltflügeln als von Doppelgittern sprechen könnte, sollen von diesen Untersuchungen ausgeschlossen bleiben, da bei diesen selbst eine geringfügige Änderung des Spaltes die Strömung wesentlich zu beeinflussen vermag, und somit die Anwendung solcher Gitter in der Praxis umständlicher ist.

Näherungsverfahren auf Grund zweier, voneinander entfernt gelegener Gitter

Eine unendliche Wirbelreihe — mit der Teilung t , bestehend aus Wirbeln der Stärke Γ — induziert im Unendlichen eine mit dem Gitter parallele Geschwindigkeit $\frac{\Gamma}{2t}$, in den an den beiden Seiten des Gitters einander entgegengesetzten Richtungen. Eine zum Gitter senkrechte Geschwindigkeitskomponente gibt es hier nicht.

In Bild 1. ist die Änderung dieser Geschwindigkeitskomponenten in der Nähe des Gitters aufgetragen.

Die Konjugierte dieses Geschwindigkeitsfeldes ist durch die Funktion

$$\bar{c} = i \frac{\Gamma}{2t} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{t} z \right)$$

gegeben, in der $z = p + iq$ die die einzelnen Punkte bestimmende komplexe Zahl bedeutet.

Aus der Abbildung ist gut zu erkennen, daß die Größe der mit dem Gitter parallelen Geschwindigkeitskomponente $c_t \frac{t}{\Gamma}$ in der Entfernung $\frac{t}{2}$ vom Gitter von der im Unendlichen gültigen Größe $\left| c_t \frac{t}{\Gamma} \right| = 0,5$ nirgends größere Abweichungen aufweist als 10% der letzteren. Ähnlich erreicht die

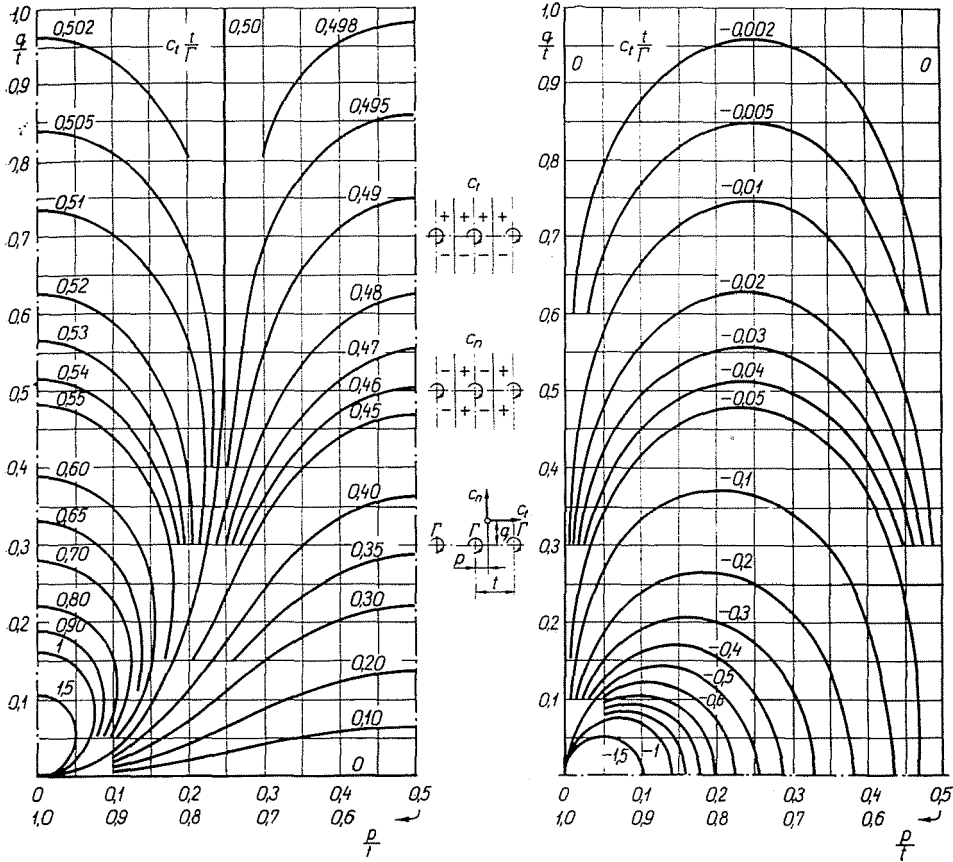


Bild 1

senkrechte Komponente in dieser Entfernung nirgends 10% von 0,5. Liegen also etwa die Mittellinien der beiden Schaufelgitter zueinander nicht wesentlich näher als $t/2$, so kann man erwarten, mit der Annahme $\left| c_1 \frac{t}{F} \right| = 0,5$ und $c_2 \frac{t}{F} = 0$ noch gute Näherungswerte erhalten zu können. Liegen die Gitter näher zueinander als $\frac{t}{2}$, so bleibt die Annäherung nur dann einwandfrei, wenn die Schaufeln des zweiten Gitters ungefähr in die Mitte zwischen zwei Schaufeln des ersten Gitters zu liegen kommen, eine Anordnung, die sich übrigens auch wegen des Widerstandes empfiehlt.

Es sei die Relativgeschwindigkeit vor und hinter dem Doppelgitter w_1 bzw. w_2 (Bild 2). Der Größe und Richtung nach sei ferner während dieses Berechnungsverfahrens der vektorielle Durchschnittswert w_∞ dieser Geschwin-

digkeiten als gegeben angenommen. Alle anderen Geschwindigkeiten werden auf diese bezogen.

Die Koordinaten des Schnittes der unendlich dünnen Schaufeln seien mit dem mit der Profilschne parallel x und dem auf diese senkrechten y gegeben.

Die mit der Ordinate bzw. der Abszisse parallelen Komponenten von w_∞ seien U bzw. V . Sie werden mit dem Index 1 bzw. 2 versehen je nachdem, ob sie sich auf das erste oder auf das zweite Schaufelgitter beziehen.

Zur Durchführung der Näherungsrechnung muß man natürlich die auf den einzelnen Schaufeln entstehende Zirkulation bei verschiedenen Richtungen

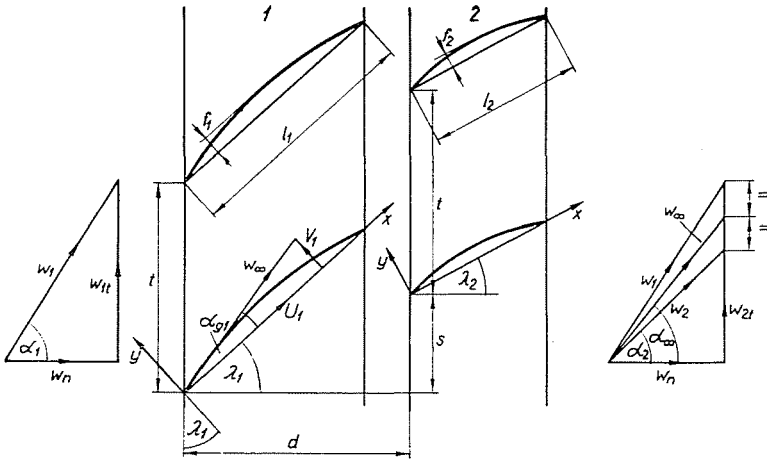


Bild 2

von w_∞ kennen. Die Zirkulation wird nach der von H. SCHLICHTING beschriebenen Methode [3] berechnet. Für jedes Gitter sind zwei Gleichungssysteme mit drei Unbekannten zu lösen. (Die die Unbekannten enthaltenden Seiten beider Gleichungssysteme sind einander gleich.) Das nachstehend angegebene Gleichungssystem geht in dieselben Gleichungen über, wenn die Wirkung des zweiten Gitters entfällt.

Der Geschwindigkeit w_∞ des Einzelgitters wird im Falle eines Doppelgitters die Resultierende aus der — für diesen Fall früher bestimmte — Geschwindigkeit w_∞ und der vom anderen Gitter induzierten Geschwindigkeit entsprechen (Bild 3.), d. h. es wird

$$\bar{w}_{\infty 1} = \bar{w}_\infty + \bar{c}_{i1} \quad \text{bzw.} \quad \bar{w}_{\infty 2} = \bar{w}_\infty + \bar{c}_{i2}.$$

Der Index der induzierten Geschwindigkeit zeigt an, für welches Gitter sie gilt.

Die mit der Sehne parallele bzw. die auf diese senkrechte Komponente von $w_{\infty 1}$ schreibt sich zu

$$u_1 = w_{\infty} \cos a_{g1} - c_{t1} \sin \lambda_1;$$

$$v_1 = w_{\infty} \sin a_{g1} - c_{t1} \cos \lambda_1;$$

oder

$$\frac{u_1}{w_{\infty}} = \cos a_{g1} - \frac{c_{t1}}{w_{\infty}} \sin \lambda_1;$$

$$\frac{v_1}{w_{\infty}} = \sin a_{g1} - \frac{c_{t1}}{w_{\infty}} \cos \lambda_1.$$

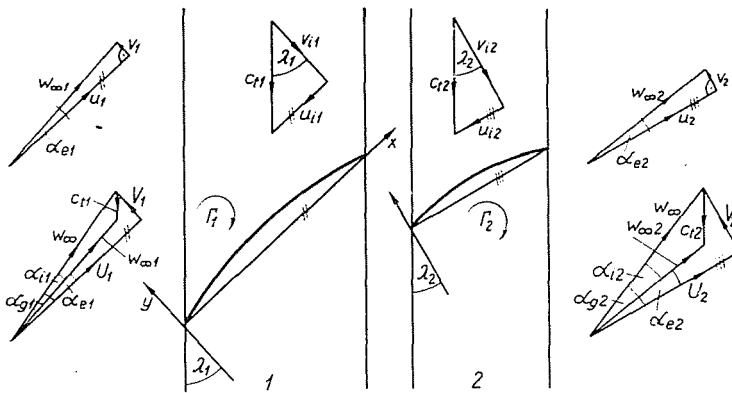


Bild 3

(Die positive Richtung von c_t ist in Bild 2 angegeben. Die Zerlegung von c_{t1} und c_{t2} ist vergrößert dargestellt.)

Ähnlich ist für das zweite Gitter

$$\frac{u_2}{w_{\infty}} = \cos a_{g2} - \frac{c_{t2}}{w_{\infty}} \sin \lambda_2,$$

$$\frac{v_2}{w_{\infty}} = \sin a_{g2} - \frac{c_{t2}}{w_{\infty}} \cos \lambda_2.$$

Die vektoriellen Geschwindigkeitsmittelwerte, dem Falle des Einzelgitters entsprechend, sind:

$$\left(\frac{w_{\infty 1}}{w_{\infty}} \right)^2 = \left(\frac{u_1}{w_{\infty}} \right)^2 + \left(\frac{v_1}{w_{\infty}} \right)^2, \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{w_{\infty 2}}{w_{\infty}} \right)^2 = \left(\frac{u_2}{w_{\infty}} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{w_{\infty}} \right)^2,$$

während die von der Sehne eingeschlossenen Winkel von $w_{\infty 1}$ und $w_{\infty 2}$ durch die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \alpha_{\infty 1} = \frac{v_1}{u_1} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg} \alpha_{\infty 2} = \frac{v_2}{u_2} .$$

bestimmt sind.

Der Rechnungsgang bzw. die nacheinander folgenden Näherungsschnitte soll ein Zahlenbeispiel veranschaulichen.

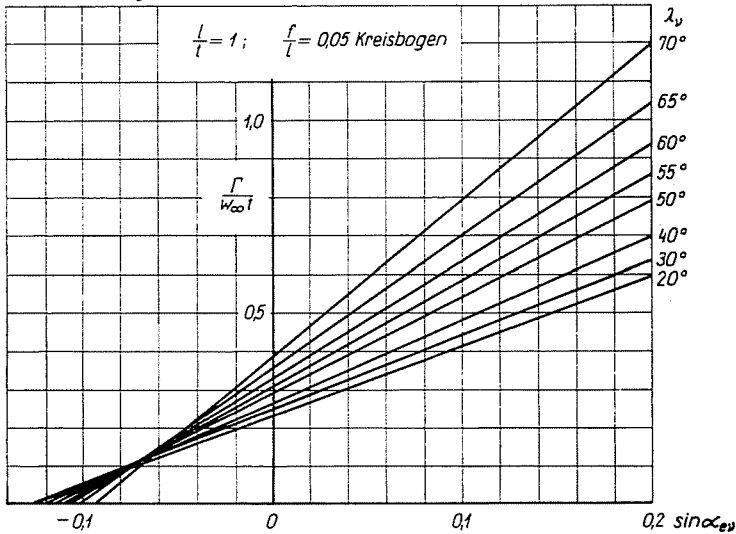


Bild 4

Die Kennwerte dieser Gitter sind mit den Bezeichnungen von Bild 2:

$$\frac{l_1}{t} = \frac{l_2}{t} = 1; \quad \frac{f_1}{l_1} = \frac{f_2}{l_2} = 0,05, \text{ Kreisbogen,}$$

$$s/t = 0,7; \quad d/t = 0,9$$

$$\lambda_1 = 48^\circ, \quad \lambda_2 = 30^\circ, \quad \alpha_{g1} = -2^\circ, \quad \alpha_{g2} = 16^\circ$$

Die für ein Einzelgitter, bestehend aus Kreisbogenschaukeln mit $\frac{f}{l} = 0,05$ und mit $\frac{l}{t} = 1$, bereits früher berechnete Zirkulation ist als Funktion von $\sin \alpha_{\infty}$ für verschiedene Einstellwinkel λ in Bild 4 aufgetragen.

Dem Winkel α_{∞} entspricht hier der Winkel $\alpha_{\infty 1}$ bzw. $\alpha_{\infty 2}$.

Man beginnt mit der Annahme eines beliebigen Wertes für $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t}$. Der Ausgangswert könnte auch $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t} = 0$ sein. Hier wurde mit $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t} = 0,4$ begonnen. Es ergab sich daraus für $\frac{c_{t1}}{w_{\infty}} = -0,2$ und für $\sin \alpha_{\infty 1} = 0,0859$.

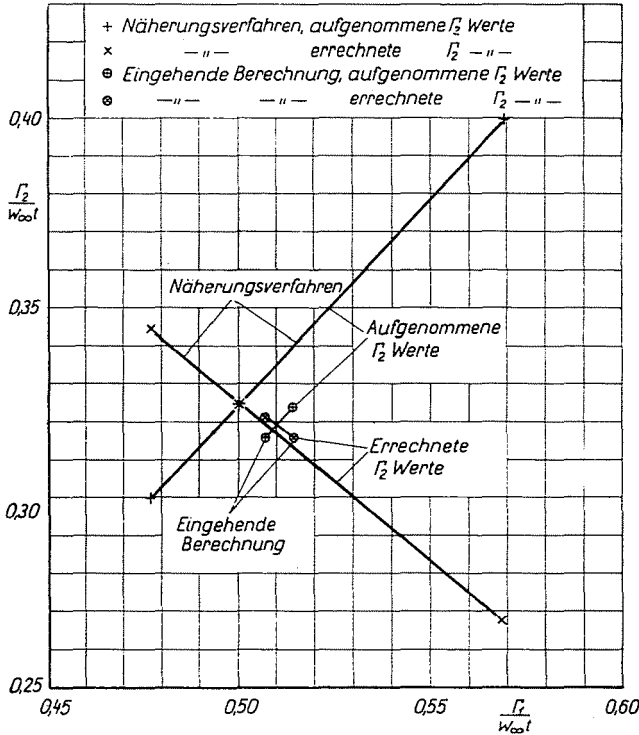


Bild 5

Zu diesem Wert und zu $\lambda = 48^\circ$ gehört aus Bild 4 $\frac{\Gamma_1}{w_{\infty}t} = 0,569$, woraus sich $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t} = 0,268$ ergibt. Zweitens ergibt sich aus $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t} = 0,3$ ein $\frac{\Gamma_1}{w_{\infty}t} = 0,477$ und ein $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t} = 0,345$.

Je drei zusammengehörende Werte sind in Bild 5 so dargestellt, daß über jedem auf der waagerechten Achse aufgetragenen Wert von $\frac{\Gamma_1}{w_{\infty}t}$ der angenommene und schließlich errechnete Wert von $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t}$ eingezeichnet wurde.

Beide $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t}$ Werte sind lineare Funktionen von $\frac{\Gamma_1}{w_{\infty}t}$, der gesuchte Wert von $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t}$ ergibt sich mithin als der Schnittpunkt dieser beiden Geraden, an dem die angenommenen bzw. die errechneten Werte von $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t}$ liegen, da sie in diesem einander gleich sind. Geht man von dem Wert des Schnittpunktes $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t} = 0,325$ aus, dann erhält man $\frac{\Gamma_1}{w_{\infty}t} = 0,500$ und daraus rechnerisch für $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty}t}$ einen Wert, dessen Abweichung von 0,325 geringer ist als die Rechenungenauigkeit.

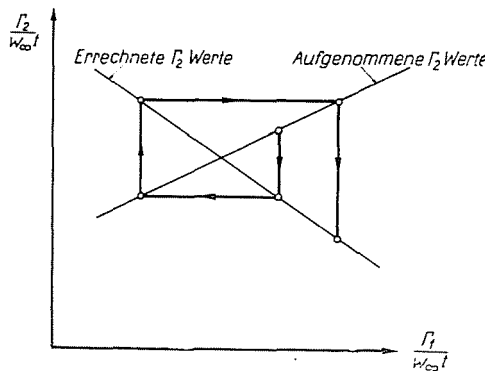


Bild 6

In Bild 6 ist darauf hingewiesen, daß im Falle einer linearen Beziehung mit der üblichen Iteration die Konvergenz des Rechenganges nicht unbedingt sichergestellt ist. Ginge man bei jedem Schritt vom errechneten Ergebnis des vorangegangenen Schrittes aus, dann würde man den mit Pfeilen angedeuteten Weg beschreiten. Im eingezeichneten Fall würde sich eine divergente Reihe ergeben. Folgen hingegen die errechneten Werte einander in der entgegengesetzten Richtung, dann ist das Verfahren zwar konvergent, doch nähern sich die errechneten Werte nur langsam dem gesuchten. Die Lage wäre eben verkehrt, wenn der positive Wert der Richtungstangente jener Geraden, die die im voraus angenommenen Werte enthält, größer wäre als der Absolutwert der negativen Richtungstangente der anderen, die errechneten Punkte enthaltenden Geraden.

Die beschriebene Interpolation führt in verhältnismäßig kurzer Zeit zum Endergebnis, da die einzelnen Schritte in einigen Minuten berechnet werden können.

Die eingehende Berechnung

Ersatz der Schaufelzirkulation durch Einzelwirbeln

Die Koordinate x kann durch die Beziehung

$$x = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi)$$

als Funktion einer Veränderlichen φ ausgedrückt werden. Die Verteilung der Schaufelzirkulation läßt sich dann in Gestalt der unendlichen Reihe

$$\gamma = 2U \left(A_0 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi + \dots \right)$$

aufschreiben [4].

Die kinematische Strömungsbedingung kann nur dann in einem Punkt einer Schaufel genau befriedigt werden, wenn an dieser Stelle auch die durch

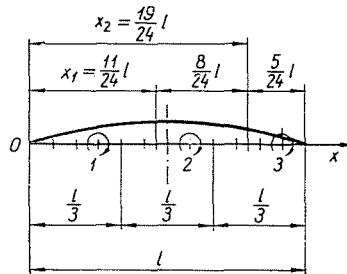


Bild 7

die Schaufelzirkulation des anderen Gitters induzierte Geschwindigkeit bekannt ist. Zu diesem Zweck werden statt der Schaufelzirkulation näherungsweise einige Einzelwirbel betrachtet. Die Summe dieser Einzelwirbel ergibt die Schaufelzirkulation.

Die Zahl der Einzelwirbel richtet sich danach, wie gut die Annäherung sein soll, die man erreichen will. Im folgenden wird auch die vom ersten Gitter in den Punkten des zweiten Gitters induzierte Geschwindigkeit benötigt, so daß an Arbeit gespart werden kann, wenn man die Wirbel in jene Punkte verlegt, in denen die kinematische Bedingung befriedigt ist.

Soll die Schaufelzirkulation durch drei Wirbel ersetzt werden, so sind diese zweckmäßig in $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$ der Sehne unterzubringen (Bild 7). Jener Anteil der Zirkulationsverteilung, der in den einzelnen Wirbeln konzentriert

werden soll, mit anderen Worten, die Grenzen der je einem Wirbel zufallenden Bereiche können nur willkürlich angenommen werden. Dies läßt sich besonders dann nicht vermeiden, wenn die Zirkulationsverteilung auf der Schaufel noch unbekannt ist. Glücklicherweise ändert sich die induzierte Geschwindigkeit meist nur sehr wenig, wenn sich die Bereichsgrenzen verschieben. Reagierte diese Geschwindigkeit auf die Verteilung der Zirkulation empfindlich, so müßten — trotz des größeren Aufwandes an Rechenarbeit — mehr Einzelwirbel gebildet werden.

Hat man die Grenzen der Bereiche annäherungsweise an den Stellen $\frac{x_1}{l} = \frac{11}{24} = 0,4583$ und $\frac{x_2}{l} = 0,7917$ angenommen, können die Wirbelstärken mit den Koeffizienten der Reihe für die Zirkulationsverteilung ein für allemal berechnet werden.

Wird die Reihe für die Zirkulationsverteilung

$$\gamma = 2U \left(A_0 \cotg \frac{\varphi}{2} + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi \right)$$

nach

$$x = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi)$$

integriert, ergeben sich die Stärken der drei Wirbeln zu:

$$\frac{\Delta \Gamma_{(1)}}{U} = 2,484 A_0 + 0,702 A_1 + 0,660 A_2$$

$$\frac{\Delta \Gamma_{(2)}}{U} = 0,522 A_0 + 0,631 A_1 + 0,303 A_2$$

$$\frac{\Delta \Gamma_{(3)}}{U} = 0,136 A_0 + 0,237 A_1 + 0,357 A_2$$

Diese Wirbelstärken müssen zur späteren Verwendung noch auf w_∞ und t bezogen werden, es wird mithin

$$\frac{\Delta \Gamma}{w_\infty t} = \frac{\Delta \Gamma}{Ul} \frac{l}{t} \frac{U}{w_\infty} = \frac{\Delta \Gamma}{U} \frac{l}{t} \cos \alpha_g.$$

Die Berechnung der vom anderen Gitter induzierten Geschwindigkeiten

Zeichnet man die beiden Schaufelgitter auch in ihren gegenseitigen Lagen maßstäblich richtig auf, dann können die Stellen der Wirbel an einer Schaufel des ersten Gitters und an der nächsten Schaufel des zweiten Gitters

eingetragen werden. Um die gegenseitige Lage dieser Punkte mit den in Bild 1 angeführten Koordinaten leichter bestimmen zu können, empfiehlt es sich, ein Quadratnetz auf ein durchsichtiges Papier aufzuzeichnen. Die Teilung des Netzes sei $0,1 t$.

Den Nullpunkt des Netzes setzt man auf einen der auf der Schauffellinie befindlichen Wirbelpunkte, worauf man die Koordinaten $\left(\frac{p}{t}, \frac{q}{t}\right)$ der Wirbelpunkte der anderen Schaufel leicht feststellen kann. Der Nullpunkt soll nicht auf den mit x bezeichneten Punkt der Profilschneide gesetzt werden. Alle auf

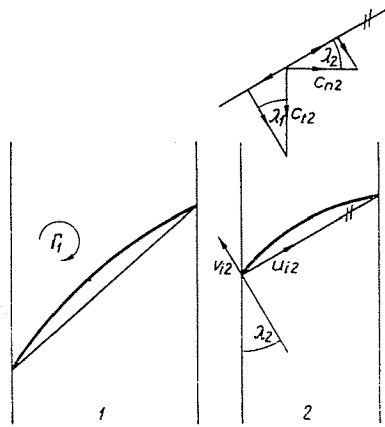


Bild 8

dieser Weise mit ihren Koordinaten $\left(\frac{p}{t}, \frac{q}{t}\right)$ bestimmten neun Punkte werden auf den in Bild 1 dargestellten Diagrammen aufgesucht, und die zu diesen gehörigen Werte von $c_i \frac{t}{\Gamma}$ und $c_n \frac{t}{\Gamma}$ abgelesen. Jeden dieser Werte multipliziert man mit der Stärke des erzeugenden Wirbels, woraus sich z. B. für das zweite Gitter die Geschwindigkeitskomponenten $\frac{c_{i2}}{w_\infty}$ und $\frac{c_{n2}}{w_\infty}$ ergeben. Aus diesen werden die mit der Sehne parallelen und auf diese senkrechten Geschwindigkeiten bzw. deren auf U_2 bezogene Werte $\frac{u_{i2}}{U_2}$ und $\frac{v_{i2}}{U_2}$ berechnet.

Die Umrechnungsformeln sind auf Grund des Bildes 8 leicht festzustellen.

$$u_{i2} = -c_{i2} \sin \lambda_2 + c_{n2} \cos \lambda_2$$

$$v_{i2} = -c_{i2} \cos \lambda_2 - c_{n2} \sin \lambda_2$$

Die Berechnung der Koeffizienten der Zirkulationsverteilung

Die in einem beliebigen Punkt einer Schaufel von den übrigen Teilen derselben und von den übrigen Schaufeln desselben Gitters induzierten, nach x bzw. y gerichteten Geschwindigkeitskomponenten seien u bzw. v . Jene Geschwindigkeitskomponenten hingegen, die vom anderen Gitter induziert werden, seien mit u_i bzw. v_i bezeichnet. Die kinematische Bedingung, daß die Geschwindigkeit entlang der Schaufelfläche nur tangential sein kann, wird durch die Beziehung

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{V + v_i + v}{U + u_i + u} = \frac{1}{U} \frac{V + v_i + v}{1 + \frac{u_i}{U} + \frac{u}{U}}$$

ausgedrückt. Aus dieser folgt, daß

$$\frac{V}{U} + \frac{v_i}{U} + \frac{v}{U} = y' \left(1 + \frac{u_i}{U} + \frac{u}{U} \right). \quad (1)$$

Bei einem einzelnen Flügel bestehen zwischen der Gesamtzirkulation und den induzierten Geschwindigkeiten (sogenannten Störgeschwindigkeiten) die Beziehungen

$$[u]_\xi = \frac{1}{2} [\gamma]_\xi$$

$$[v]_\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi'$$

in der $\xi = \frac{x}{l}$ die Koordinate jenes festen Punktes bedeutet, in welchem die Störgeschwindigkeit berechnet wird, während ξ' die Veränderliche der Integration bezeichnet.

Für die von den übrigen Elementen des eigenen Schaufelgitters an der berechneten Stelle induzierten Geschwindigkeitskomponenten ist [2]

$$u = -\frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \gamma(\xi') J(F) d\xi',$$

$$v = -\frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \gamma(\xi') R(F) d\xi'.$$

$J(F)$ und $R(F)$ bedeuten darin den imaginären bzw. den reellen Teil der Funktion

$$F(\xi - \xi') = e^{i\lambda} \operatorname{cth} \pi \frac{\xi - \xi'}{\frac{t}{l}} e^{i\lambda} - \frac{1}{\pi} \frac{\frac{t}{l}}{\xi - \xi'}.$$

Setzt man die unendliche Reihe der Zirkulationsverteilung in diese Gleichungen ein, dann lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten als Summe der Koeffizienten dieser unendlichen Reihe ausdrücken. Hierbei müssen die Koeffizienten mit jenen Gewichten belastet werden, die aus den Parametern des Gitters ein für allemal berechnet werden können.

Beschränkt man sich auf die ersten drei Glieder, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= A_0 g_0 + A_1 g_1 + A_2 g_2 \\ \frac{v}{U} &= A_0 f_0^* + A_1 f_1^* + A_2 f_2^* \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die in den Tabellen 1 und 2 zusammengefaßten Werte von g und f^* wurden von H. SCHLICHTING [3] übernommen.

Die Wirkung des anderen Gitters kann mit den induzierten Geschwindigkeiten des anderen, vollständigen Gitters in den gewählten Punkten so berechnet werden, wie das im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde.

Nach Ordnung der Gleichung (1) erhält man aus dieser mit (2)

$$\begin{aligned} \frac{v}{U} - y' \frac{u}{U} &= -\frac{V}{U} - \frac{v_i}{U} + y' \left(1 + \frac{u_i}{U} \right) \\ A_0 (f_0^* - y' g_0) + A_1 (f_1^* - y' g_1) + A_2 (f_2^* - y' g_2) &= \\ &= -\frac{V}{U} - \frac{v_i}{U} + y' \left(1 + \frac{u_i}{U} \right). \end{aligned}$$

Schreibt man diese Gleichung für die Punkte $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$ der Sehne auf, so erhält man ein lineares Gleichungssystem, aus dem die Werte der Koeffizienten A ermittelt werden können.

Tabelle I

λ	ν/L	$t/L = 0,2$			$t/L = 1,5$			$t/L = 1,25$		
		f_0	f_1	f_2	f_0	f_1	f_2	f_0	f_1	f_2
0°	3/12	-1,001	0,549	-0,548	-1,004	0,585	-0,582	-1,007	0,619	-0,615
	7/12	-1,131	-0,183	-0,994	-1,126	-0,195	-1,030	-1,320	-0,207	-1,065
	11/12	-1,250	-0,914	0,343	-1,418	-0,971	0,313	-1,573	-1,025	0,286
±15°	3/12	-1,001	0,543	-0,542	-1,002	0,576	-0,574	-1,004	0,607	-0,604
	7/12	-1,116	-0,181	-0,987	-1,203	-0,192	-1,020	-1,286	-0,203	-1,052
	11/12	-1,224	-0,905	0,348	-1,382	-0,957	0,319	-1,526	-1,007	0,273
±30°	3/12	-1,000	0,526	-0,526	-1,000	0,548	-0,548	-1,000	0,570	-0,570
	7/12	-1,070	-0,175	-0,970	-1,129	-0,183	-0,191	-1,190	-0,190	-1,013
	11/12	-1,146	-0,878	0,362	-1,267	-0,915	0,340	-1,386	-0,952	0,317
±45°	3/12	-1,000	0,502	-0,503	-0,998	0,506	-0,508	-0,994	0,512	-0,516
	7/12	-1,005	-0,167	-0,946	-1,017	-0,168	-0,948	-1,035	-0,170	-0,952
	11/12	-1,026	-0,838	0,384	-1,080	-0,848	0,374	-1,154	-0,863	0,358
±60°	3/12	-1,000	0,476	-0,476	-0,997	0,460	-0,461	-0,995	0,445	-0,449
	7/12	-0,935	-0,159	-0,920	-0,893	-0,153	-0,903	-0,854	-0,148	-0,886
	11/12	-0,882	-0,794	-0,411	-0,828	-0,770	0,421	-0,817	-0,752	0,423
±75°	3/12	-1,000	0,455	-0,455	-1,001	0,418	-0,419	-1,002	0,380	-0,381
	7/12	-0,848	-0,152	-0,900	-0,780	-0,139	-0,865	-0,677	-0,127	-0,829
	11/12	-0,749	-0,757	-0,435	-1,541	-0,695	0,474	-0,340	-0,631	0,513

		$t/L = 1,0$			$t/L = 0,75$			$t/L = 0,5$		
0°	3/12	-1,008	0,682	-0,670	-1,035	0,794	-0,776	-1,118	1,059	-1,011
	7/12	-1,476	-0,228	-1,129	-1,778	-0,269	-1,257	-2,457	-0,362	-1,567
	11/12	-1,830	-1,122	0,242	-2,271	-1,292	0,171	-3,232	-1,680	0,036
±15°	3/12	-1,009	0,662	-0,665	-1,025	0,770	-0,756	-1,091	1,023	-0,983
	7/12	-1,432	-0,222	-1,110	-1,718	-0,260	-1,227	-2,372	-0,350	-1,518
	11/12	-1,766	-1,093	0,352	-2,205	-1,258	0,178	-3,132	-1,638	0,042
±30°	3/12	-0,997	0,611	-0,610	-0,999	0,697	-0,695	-1,013	0,918	-0,895
	7/12	-1,298	-0,203	-1,051	-1,537	-0,234	-1,138	-2,122	-0,313	-1,379
	11/12	-1,592	-1,018	0,276	-1,977	-1,155	0,202	-2,806	-1,485	0,065
±45°	3/12	-0,986	0,530	-0,537	-0,961	0,581	-0,954	-0,904	0,745	-0,756
	7/12	-1,084	-0,175	-0,963	-1,234	-0,191	-0,998	-1,716	-0,250	-1,149
	11/12	-1,308	-0,899	0,324	-1,634	-0,990	0,249	-2,300	-1,238	0,101
±60°	3/12	-0,984	0,425	-0,435	-0,944	0,419	-0,450	-0,776	0,512	-0,581
	7/12	-0,799	-0,139	-0,857	-0,792	-0,130	-0,815	-1,196	-0,165	-0,830
	11/12	-0,902	-0,738	0,404	-1,186	-0,768	0,316	-1,651	-0,918	0,141
±75°	3/12	-1,004	0,310	-0,311	-0,986	0,197	-0,228	-0,697	0,234	-0,414
	7/12	-0,485	-0,104	-0,761	-0,111	-0,052	-0,612	-0,682	-0,039	-0,402
	11/12	-0,222	-0,529	0,558	-0,800	-0,483	0,418	-0,806	-0,546	0,171

Tabelle 2

λ	x/L	$t/L = 2,0$			$t/L = 1,5$			$t/L = 1,25$		
		ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_0	ξ_1	ξ_2
15°	3/12	-0,0010	0,0238	0,0231	-0,0026	0,0404	0,0388	-0,0049	0,0558	-0,0529
	7/12	-0,0638	-0,0080	-0,0241	-0,0180	-0,0139	-0,0415	-0,1485	-0,0192	-0,0582
	11/12	-0,1170	-0,0387	-0,0213	-0,1879	-0,0646	-0,0335	-0,2475	-0,0878	-0,0435
30°	3/12	-0,0011	0,0423	-0,0414	-0,0027	0,0728	-0,0706	-0,0058	0,1018	-0,0977
	7/12	-0,1129	-0,0142	-0,0424	-0,1960	-0,0247	-0,0736	-0,2725	-0,0350	-0,1047
	11/12	-0,2131	-0,0694	-0,0392	-0,3517	-0,1174	-0,0639	-0,4700	-0,1622	-0,0844
45°	3/12	0	0,0512	-0,0503	-0,0012	0,0905	-0,0887	-0,0021	0,1289	-0,1258
	7/12	-0,1374	-0,0175	-0,0504	-0,2435	-0,0304	-0,0896	-0,3480	-0,0436	-0,1284
	11/12	-0,2689	-0,0846	-0,0498	-0,4660	-0,1490	-0,0849	-0,6420	-0,2100	-0,1185
60°	3/12	0,0002	0,0461	-0,0460	0,0013	0,0852	0,0851	0,0036	0,1256	-0,1260
	7/12	-0,1236	-0,0151	-0,0444	-0,2280	-0,0280	-0,0821	-0,3360	-0,0415	-0,1202
	11/12	-0,2604	-0,0782	-0,0485	-0,4890	-0,1452	-0,0907	-0,7260	-0,2150	-0,1357
75°	3/12	0,0006	0,0274	-0,0275	0,0026	0,0521	-0,0532	0,0068	0,0804	-0,0837
	7/12	-0,0735	-0,0090	-0,0263	-0,0139	-0,0168	-0,0482	-0,2140	-0,0255	-0,0723
	11/12	-0,1665	-0,0472	-0,0307	-0,3540	-0,0935	-0,0650	-0,6150	-0,1508	-0,0723

		$t/L = 1,0$			$t/L = 0,75$			$t/L = 0,5$		
15°	3/12	-0,0105	0,0809	-0,0755	-0,0262	0,1260	-0,1147	-0,0789	0,2181	-0,1921
	7/12	-0,2130	-0,0283	-0,0869	-0,3280	-0,0441	-0,1411	-0,5525	-0,0778	-0,2593
	11/12	-0,3370	-0,1249	-0,0570	-0,4810	-0,1901	-0,0753	-0,7610	-0,3225	-0,1006
30°	3/12	-0,014	0,150	-0,142	-0,036	0,239	-0,218	-0,133	0,420	-0,370
	7/12	-0,400	-0,052	-0,158	-0,625	-0,083	-0,262	-1,068	-0,149	-0,497
	11/12	-0,645	-0,235	-0,114	-0,926	0,361	-0,154	-1,460	-0,617	-0,201
45°	3/12	-0,007	0,196	-0,189	-0,024	0,324	-0,304	-0,135	0,590	-0,521
	7/12	-0,525	-0,067	-0,198	-0,871	-0,114	-0,342	-1,523	-0,210	-0,681
	11/12	-0,907	-0,313	-0,167	-1,313	-0,498	-0,234	-2,068	-0,866	-0,308
60°	3/12	0,010	0,202	-0,203	0,021	0,368	-0,364	-0,049	0,714	-0,639
	7/12	-0,542	-0,065	-0,191	-1,010	-0,123	-0,355	-1,911	-0,262	-0,794
	11/12	-1,107	-0,342	-0,216	-1,639	-0,583	-0,327	-2,506	-1,039	-0,408
75°	3/12	0,0212	0,1447	-0,1560	0,0862	0,3453	-0,3912	0,190	0,796	-0,7365
	7/12	-0,3840	-0,0437	-0,1210	-0,9320	-0,0980	-0,2575	-2,415	-0,331	-0,8210
	11/12	-1,2950	-0,2912	-0,2413	-1,9780	-0,6240	0,4830	-2,755	-1,122	-0,5020

$$\lambda = 0^\circ\text{-nál } g_0 = g_1 = g_2 = 0; \quad g(-\lambda) = -g(\lambda).$$

In unserem numerischen Beispiel sind die Richtungstangenten in den drei gewählten Punkten gemäß Bild 9 die folgenden:

$\frac{x}{l}$	$\sin \delta$	$\frac{l}{R}$	δ	$y' = \operatorname{tg} \delta$
3/12	$\frac{3}{12}$	0,1000	5°44'	0,1004
7/12	$-\frac{1}{12}$	-0,0333	-1°55'	-0,0325
11/12	$-\frac{5}{12}$	-0,1667	-9°36'	-0,1691

da
$$\frac{l}{R} = 8 \frac{f}{l} = 8 \cdot 0,05 = 0,4$$

Das für diese Punkte mit den, durch einer hier nicht mitgeteilten Berechnung erhaltenen und mit den in den Tabellen für $t/l = 1$ und $\lambda = 30^\circ$ angegebenen Werten aufgeschriebene Gleichungssystem ist:

$$\begin{aligned} & (-0,997 + 0,100 \cdot 0,014) A_0 + (0,611 - 0,100 \cdot 0,150) A_1 + \\ & \quad + (-0,610 + 0,100 \cdot 0,142) A_2 = \\ & \quad = -0,2867 + 0,2322 + 0,1004 (1 - 0,130) \\ & (-1,298 - 0,033 \cdot 0,400) A_0 + (-0,203 - 0,033 \cdot 0,052) A_1 + \\ & \quad + (-1,051 - 0,033 \cdot 0,158) A_2 = \\ & \quad = -0,2867 + 0,2315 - 0,0335 (1 - 0,134) \\ & (-1,592 - 0,169 \cdot 0,645) A_0 + (-1,018 - 0,169 \cdot 0,235) A_1 + \\ & \quad + (0,276 - 0,169 \cdot 0,014) A_2 = \\ & \quad = -0,2867 + 0,2315 - 0,1691 (1 - 0,134); \\ & \left. \begin{aligned} -0,996 A_0 + 0,596 A_1 - 0,596 A_2 &= 0,0329 \\ -1,311 A_0 - 0,205 A_1 - 0,056 A_2 &= -0,0842 \\ -1,701 A_0 - 1,056 A_1 + 0,257 A_2 &= -0,2018 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Seine Lösung ergibt:

$$A_0 = 0,0402, \quad A_1 = 0,1276, \quad A_2 = 0,0052$$

Für die Zirkulationsverteilung des zweiten Gitters gilt

$$\frac{\gamma}{2U_2} = 0,0402 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + 0,1276 \sin \varphi + 0,0052 \sin 2\varphi,$$

und die Gesamtzirkulation am zweiten Gitter ist

$$\frac{\Gamma_2}{U_2 l} = \pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) = \pi \left(0,0402 + \frac{1}{2} 0,1276 \right) = 0,327$$

beziehungsweise

$$\frac{\Gamma_2}{w_{\infty} t} = \frac{\Gamma_2}{U_2} \frac{l}{t} \cos \alpha_{g2} = 0,327 \cdot 0,9613 = 0,314.$$

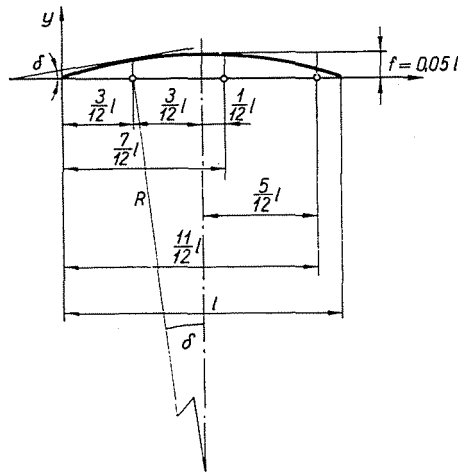


Bild 9

Der so erhaltene Wert von $\frac{\Gamma_2}{w_{\infty} t}$ weicht zumeist von jenem angenommenen Wert ab, auf Grund dessen $\frac{\Gamma_1}{w_{\infty} t}$ berechnet wurde.

Ist die Abweichung nicht groß, kann der gesuchte Wert auch hier unter Voraussetzung linearer Beziehungen ermittelt werden.

Die Ergebnisse der einzelnen Schritte sind auch in Bild 5 aufgetragen. Wie sich zeigt, weichen sämtliche nach dem genauen Verfahren bestimmten Werte nur wenig voneinander ab. Als Endergebnis können am Schnittpunkt die Werte

$$\frac{\Gamma_1}{w_{\infty} t} = 0,510 \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma_2}{w_{\infty} t} = 0,319$$

abgelesen werden. Diese Werte weichen von den mit der Näherungsmethode berechneten Werten um $+2\%$ bzw. $-1,9\%$ ab. Die Abweichung der hier erhal-

tenen Gesamtzirkulation von 0,829 vom Näherungswert von 0,825 beträgt nur 0,5%.

Die endgültigen Werte der Koeffizienten A_0 , A_1 , A_2 werden aus den beiden berechneten Werten und aus dem vom Diagramm abgelesenen endgültigen Zirkulationswerten durch Interpolation bestimmt.

Im vorliegenden Beispiel ergaben sich folgende Werte:

	Aus der beschriebenen Berechnung	Aus dem 2. Gang	Interpolierte Werte
$\frac{\Gamma_2}{U_2 l_2 \pi} = A_0 + \frac{1}{2} A_1$	0,1040	0,1064	0,1056
A_0	0,0402	0,0436	0,0425
A_1	0,1276	0,1257	0,1263
A_2	0,0052	0,0045	0,0047

Die Rechnungsergebnisse

Außer dem als Beispiel angeführten Gitter wurden weitere zwei berechnet. In allen drei Fällen wurde die Berechnung für je zwei α_z -Werte nach dem genauen Verfahren und für einen weiteren α_z -Wert nur nach dem Näherungsverfahren durchgeführt. Die Kennwerte der Gitteranordnungen und die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefaßt.

Aus der Tabelle geht hervor, daß die Näherungswerte der Gesamtzirkulation von den genau berechneten Werten nirgends wesentlich abweichen. Das genaue Verfahren diente also, außer der Bestimmung dieser unwesentlichen Differenzen, bloß zur Ermittlung der Koeffizienten der Reihe für die Verteilung der Zirkulation.

Für die zwischen Schaufelzirkulation einerseits und Eintritts-, bzw. Austrittsgeschwindigkeit andererseits bestehenden Zusammenhänge wurden folgenden Beziehungen angewendet:

$$\Gamma_{\bar{o}} = \Gamma_1 + \Gamma_2 = t(w_{1t} - w_{2t}) = t w_n (\operatorname{tg} a_1 - \operatorname{tg} a_2),$$

woraus

$$\frac{\Gamma_{\bar{o}}}{w_{zt}} = (\operatorname{tg} a_1 - \operatorname{tg} a_2) \cos \alpha_z.$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} \alpha_z = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2),$$

Tabelle 3

$$\frac{l_1}{t} = \frac{l_2}{t} = 1; \quad \frac{s}{t} = 0,7; \quad \frac{d}{t} = 0,9; \quad \frac{f_1}{l_1} = \frac{f_2}{l_2} = 0,05 \text{ Kreisbogen}$$

λ_1	λ_2	a_∞	Näherungsverfahren			Genaueres Verfahren			$\frac{I_{\bar{a}} - I_{\bar{a}k}}{I_{\bar{a}}}$	a_1	a_2	$a_1 - a_2$	Gitter 1.			Gitter 2.		
			$\frac{I_{1k}}{w_{\infty} t}$	$\frac{I_{2k}}{w_{\infty} t}$	$\frac{I_{\bar{a}k}}{w_{\infty} t}$	$\frac{I_1}{w_{\infty} t}$	$\frac{I_2}{w_{\infty} t}$	$\frac{I_{\bar{a}}}{w_{\infty} t}$					A_0	A_1	A_2	A_0	A_1	A_2
			48	30	41	0,631	0,311	0,942					0,632	0,317	0,949	+0,7%	62,0	23,2
48	30	38	0,500	0,325	0,825	0,510	0,319	0,829	+0,5%	58,5	23,7	34,8	0,057	0,210	0,014	0,043	0,126	0,005
48	30	34	0,343	0,338	0,681	—	—	—	—	(53,7	23,9	29,8) _k	—	—	—	—	—	—
52	38	54	0,628	0,258	0,886	0,635	0,257	0,892	+0,7%	64,9	31,7	33,2	0,093	0,218	0,028	0,018	0,135	0,007
52	38	50	0,457	0,274	0,731	0,465	0,269	0,734	+0,4%	60,5	31,8	28,7	0,034	0,227	0,016	0,015	0,146	0,008
52	38	46	0,284	0,288	0,572	—	—	—	—	(55,4	32,0	23,4) _k	—	—	—	—	—	—
56	46	62	0,861	0,270	1,131	0,861	0,269	1,130	-0,1%	72,0	34,1	37,9	0,155	0,242	0,049	0,092	0,114	0,008
56	46	58	0,683	0,297	0,980	0,689	0,291	0,980	0	68,4	34,0	34,4	0,096	0,245	0,035	0,035	0,126	0,009
56	46	54	0,504	0,320	0,824	—	—	—	—	(64,3	34,0	30,3) _k	—	—	—	—	—	—

und somit

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_\infty + \frac{\Gamma_\delta}{2 w_\infty t}}{\cos \alpha_\infty}$$

und schließlich

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_\infty - \frac{\Gamma_\delta}{2 w_\infty t}}{\cos \alpha_\infty}$$

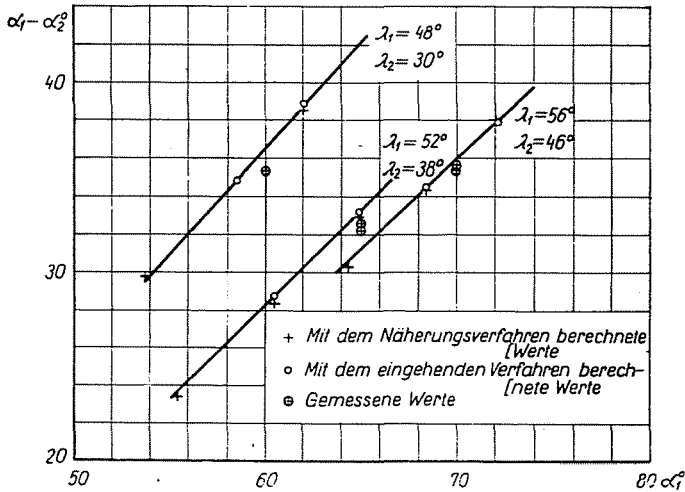


Bild 10

Die berechnete Ablenkung $\alpha_2 - \alpha_1$ ist als Funktion von α_1 in Bild 10 aufgetragen. Die Änderung der Ablenkung kann im ganzen berechneten Bereich und in allen drei Fällen als linear betrachtet werden.

In Bild 10 wurden auch die an den drei Fällen gemessenen Ablenkungen aufgetragen. Die gemessenen Punkte liegen nahe an den berechneten Kurven.

Zusammenfassung

Verfasser beschreibt zwei Verfahren zur Berechnung einer inkompressiblen, reibungsfreien Strömung um ein doppeltes, aus unendlich dünnen, schwach gewölbten Schaufeln bestehendes Schaufelgitter. Im ersten Näherungsverfahren wird die vom anderen Gitter induzierte Geschwindigkeit als konstant angesehen. In der zweiten, eingehenderen Berechnung

ist die Schaufelzirkulation durch Wirbelreihen ersetzt. Die Ergebnisse werden durch lineare Interpolation zwischen den — aus zwei angenommenen Werten — berechneten Werten bestimmt. An Beispielen sind die Rechnergebnisse beider Verfahren mit Meßergebnissen verglichen.

Literatur

1. SLEPICZKA, F.: Berechnung der Potentialströmung für ein ebenes Spalt-Flügelgitter. Aplikace Matematiky 4, 5. (1959).
2. LOJCJANSZKIJ, L. G.: Folyadékok és gázok mechanikája. Akadémiai Kiadó, Budapest 1956. 252.
3. SCHLICHTING, H.: Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI Forschungsheft 447. Deutscher Ingenieur Verlag GmbH, Düsseldorf, 1955.
4. GLAUERT, H.: Airfoil and Airscrew Theory. University Press, Cambridge 1930.

M. BLAHÓ, Budapest XI., Bertalan Lajos utca 4—6. Ungarn.