DIE BERECHNUNG RADIALER LAUFRÄDER MIT KONISCHER DECKSCHEIBE

Von

I. KURUTZ

Lehrstuhl für Strömungslehre der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 25. Februar 1960)

Unlängst haben GRUBER [1] und HOFFMEISTER [2] — auch in der Praxis leicht anwendbare — Rechenverfahren zur Berechnung radialer Laufräder mit konstanter Laufradbreite und rückwärtsgekrümmten Beschaufelung bekanntgegeben. Beide Verfahren betrachten die — zwischen der Deckscheibe und Rückscheibe des Laufrades entstehende — räumliche Strömung als eine ebene Strömung, so kann in beiden Fällen die Beschaufelung des Laufrades

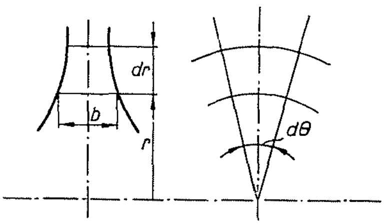

Bild 1

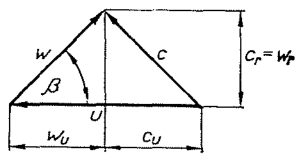

Bild 2

mit konformen Abbildungen in ein gerades Schaufelgitter übertragen werden. Das gerade Schaufelgitter wurde dann mit dem Singularitätenverfahren behandelt.

Es ergab sich aus anderen Untersuchungen, daß es hauptsächlich bei sehr breiten Laufrädern vorteilhaft ist, wenn die Laufradbreite bei zunehmenden Radien abnimmt, die Deckscheibe konisch ist. Es besteht also die Notwendigkeit jene Frage zu untersuchen in wieweit eine konische Deckscheibe die Geschwindigkeitsverteilung an den Schaufeln beeinflußt falls die übrigen Ausgangsbedingungen unverändert bleiben.

Das Laufrad mit konischer Deckscheibe kann auch nur dann verhältnismäßig einfach berechnet werden, wenn die im Laufrad entstehende räumliche Strömung auf eine ebene Strömung zurückgeführt wird.

Es soll der Kontinuitätssatz auf ein Teil eines Laufrades angewendet werden, dessen Breite sich dem Radius entlang ändert (Bild 1). Dazu kommt die Relativgeschwindigkeit, bzw. die radiale und die tangentiale Komponente derselben in Betracht (Bild 2). Die radiale Komponente der Relativgeschwindigkeit bzw. der Absolutgeschwindigkeit sind einander gleich:

$$w_r = c_r ;$$

Zwischen den tangentialen Komponenten besteht folgende Beziehung:

$$w_u = c_u - u .$$

In dieser bedeutet u die Umfangsgeschwindigkeit des betrachteten Teiles auf dem Radius r.

Der Kontinuitätssatz läßt sich im Falle einer inkompressiblen Strömung mit folgender Gleichung ausdrücken:

$$\frac{d}{dr}[b \,.\, r \,.\, d\Theta \,.\, c_r]\, dr + \frac{r}{rd\Theta}[b \,.\, dr\,(c_u - u)]\, rd\Theta = 0 \tag{1}$$

Die Absolutgeschwindigkeit kann von einem Potential hergeleitet werden, da die Strömung wirbelfrei ist. So ist:

$$\bar{c} = \operatorname{grad} \Phi$$

$$c_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad c_u = \frac{\partial \Phi}{r \partial \Theta} .$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gleichung (1) ein, dann erhält man nach Differenzierung und Ordnung

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \Theta^2} = - c_r \frac{d}{dr} \ln b . \tag{2}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Divergenz der Absolutgeschwindigkeit, so ist

$$\operatorname{div} \bar{c} = - c_r \frac{d}{dr} \ln b . \tag{2a}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nicht gleich Null, so kann die Strömung in einem Laufrad mit veränderlicher Breite nur dann als Ebene Strömung behandelt werden, wenn auf der Fläche, die von den Kreisen mit dem Radius r_1 bzw. r_2 begrenzt ist, Singularitäten verteilt werden. Die Ergiebigkeit der Quellen ist eben div $\bar{c}$.

Angenommen daß die radiale Geschwindigkeitskomponente sich nur mit dem Radius ändert — also einem Kreisumfang entlang dem gleichen Betrag aufweist — kann dieselbe aus folgender Bedingung bestimmt werden: durch jede zylindrische Fläche mit einem beliebigen Radius r, und einer Breite b fließt in der Zeiteinheit dasselbe Flüssigkeitsvolumen Q. So ist

$$c_r = \frac{Q}{2\pi r b} \tag{3}$$

und die Divergenz der Absolutgeschwindigkeit:

$$\operatorname{div} \bar{c} = \frac{\frac{d}{dr}(r d\Theta\, c_r)\, dr}{r\, d\Theta\, dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{Q}{2\pi b}\right).$$

Daraus ergibt sich nach einigen Umänderungen:

$$\operatorname{div} \bar{c} = -c_r \frac{d}{dr} \ln b\,;$$

das heißt der Ausdruck (3) für c_r befriedigt auch die Gleichung (2*a*).

Diese früher erwähnte Annahme kann natürlich nur als eine Näherung betrachtet werden, denn mit einer eingehenden Untersuchung läßt sich beweisen, daß c_r sich auch mit Θ verändert. Die Berücksichtigung dieser Änderung würde jedoch die Rechnung in großem Maße erschweren. BETZ und FLÜGGE-LOTZ bewiesen in einer ihrer früheren Arbeiten [3], daß diese Näherung bei Laufrädern mit mehr als zwei Schaufeln zulässig ist, da der so begangene Fehler zu vernachlässigen ist.

Im folgenden wird die Änderung von c_r nur dem Radius entlang berücksichtigt und nach der schon erwähnten Methode von GRUBER [1] gerechnet.

Es wird mit der Bestimmung des Steigungswinkels (β_a) jener logarithmischen Spirale begonnen, die über die zwei Endpunkte der Schaufellinie verläuft (Bild 3). Dieser Winkel β_a muß zuerst aufgenommen werden, und wenn es sich im Laufe der Berechnung herausstellt, daß der angenommene Wert nicht zutrifft, so ist die Berechnung mit einem berichtigten Wert zu wiederholen.

Für Laufräder mit konstanter Breite konnte — um die Rechenarbeit zu verkürzen — eine leicht verwendbare Formel entwickelt werden [4], aus der sich der Wert von β_a mit genügender Genauigkeit direkt bestimmen läßt. Verwendet man auch im behandelten Fall diesen Wert von β_a als Ausgangswert, so wird der errechnete Wert von jenem nur so wenig abweichen, daß die Rechnung nicht zu wiederholen ist. Zur Bestimmung von β_a wird eine annähernde

Schaufellinie bestimmt, wobei der Steigungswinkel jener logarithmischen Spirale die über die Endpunkte dieser Linie läuft, der gesuchte Winkel ist.

Die Schaufellinie wird auf Grunde der Geschwindigkeitsdreiecke bestimmt, so wird hier außer Acht gelassen, daß die Schaufelzirkulation eigentlich von den auf der Schaufellinie, der gewählten Zirkulationsverteilung entsprechend verteilten Wirbeln induziert wird.

Aus dem auf einen beliebigen Radius r bezogenen Geschwindigkeitsdreieck (Bild 2) folgt:

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{u}{c_r} - \frac{c_u}{c_r}. \tag{4}$$

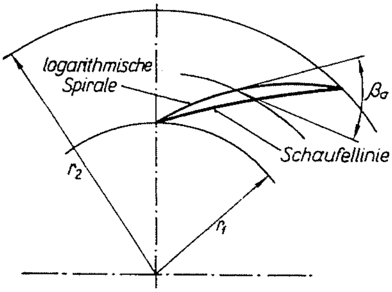

Bild 3

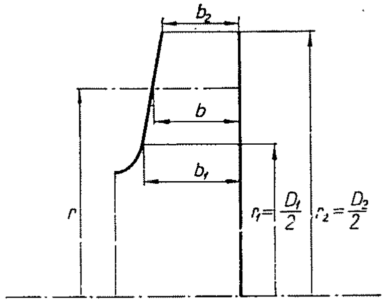

Bild 4

β ist der Neigungswinkel der Schaufellinie zur tangentialen Richtung. Die in dieser Beziehung befindlichen Größen sind — die geometrischen Angaben des Laufrades ausgenommen — durch die Auslegungswerte bzw. durch die aus diesen bestimmten dimensionslosen Kennwerten bestimmt. Die Druckzahl wird aus der idealen Gesamtdruckerhöhung ($\Delta p_{g\,id}$) berechnet:

$$\psi_{\mathrm{id}} = \frac{\Delta p_{g\,id}}{\frac{\varrho}{2}u_2^2}, \tag{5}$$

worin ϱ die Dichte des Strömungsmittels und u_2 die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades ist. Die Lieferzahl wird aus dem Volumendurchsatz (Q) bestimmt:

$$\varphi^* = \frac{Q}{D_2 \pi b_2 u_2} \tag{6}$$

Die Bedeutung der hier benützten Bezeichnungen ist auf Bild 4 ersichtlich.

Setzt man den Wert von c_r aus Gleichung (3) in Gleichung (4) ein, berücksichtigt man dabei auch Gleichung (6) und verwendet man auch noch die folgende Beziehung zwischen den Radius und der Umfangsgeschwindigkeit

$$u_2 = u \frac{r_2}{r},$$

erhält man

$$c_r = \frac{2\, r_2 \pi\, b_2 \varphi^* u_2}{2\, r \pi\, b} = \frac{\varphi^* \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 u}{\frac{b}{b_2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}.$$

Daraus ergibt sich für das erste Glied der rechten Seite der Gleichung (4):

$$\frac{u}{c_r} = \frac{\frac{b}{b_2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{\varphi^* \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}. \tag{7}$$

Im folgenden wird die tangentiale Komponente der Absolutgeschwindigkeit c_u bestimmt. Die Beschaufelung des Laufrades wird, wie schon erwähnt, mit Hilfe konformer Transformation zu einen geraden Schaufelgitter abgebildet. Der Verlauf der Zirkulationsverteilung wird der Einfachheit halber im geraden Schaufelgitter aufgenommen: es sei hier die Zirkulation der Sehne entlang konstant. Frühere Untersuchungen [4] zeigten, daß dieses Verfahren auch dann zu guten Ergebnissen führen kann, wenn die Zirkulation der Sehne entlang elliptisch verteilt ist.

Ausgehend von der konstanten Zirkulationsverteilung der Sehne entlang, kann die Änderung der Zirkulation dem Radius entlang unter Berücksichtigung der Abbildungsfunktion bestimmt werden. In der früher erwähnten Arbeit [4] wurde es gezeigt, daß die Zirkulation mit dem Radius umgekehrt proportional ist:

$$\frac{d\Gamma}{dr} = \frac{\text{const}}{r}.$$

Daraus ergibt sich die Änderung von c_u dem Radius entlang zu

$$c_u = \frac{\frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}\, c_{2u} \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\frac{r}{r_1}}. \tag{8}$$

Die ideale Gesamtdruckerhöhung ist

$$\Delta p_{g\,id} = \varrho c_{2u} u_2$$

und damit ist aus Gleichung (5) die ideale Druckzahl

$$\psi_{\text{id}} = 2\,\frac{c_{2u}}{u_2}\,. \tag{9}$$

Dividiert man beide Seiten von (8) durch die Umfangsgeschwindigkeit und berücksichtigt man auch noch Gleichung (9), so ergibt sich

$$\frac{c_u}{u} = \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}\,\psi_{\text{id}}\,\frac{\ln\frac{r}{r_1}}{\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}\,. \tag{10}$$

Multipliziert man Gleichung (7) mit Gleichung (10) dann erhält man das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung (4).

$$\frac{c_u}{c_r} = \frac{\psi_{\text{id}}}{2\,\varphi^*}\,\frac{\frac{b}{b_2}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\,\ln\frac{r}{r_1}\,. \tag{11}$$

Die Gleichungen (7) und (11) in die Gleichung (4) eingesetzt ergibt sich:

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\frac{b}{b_2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{\varphi^*\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} - \frac{\psi_{\text{id}}}{2\varphi^*}\,\frac{\frac{b}{b_2}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\,\ln\frac{r}{r_1}\,. \tag{12}$$

Aus fertigungstechnischen Gründen ist es zweckmäßig kegelförmige Deckscheiben zu verwenden. Bei diesen ergibt sich aus der geraden Seitenlinie für die Laufradbreite bei ein beliebigen Radius r folgende Beziehung (Bild 4):

$$\frac{b_1 - b}{r - r_1} = \frac{b_1 - b_2}{r_2 - r_1}\,.$$

Daraus ist die dimensionslose Laufradbreite

$$\frac{b}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} - \frac{\frac{r}{r_1} - 1}{\frac{r_2}{r_1} - 1}\left(\frac{b_1}{b_2} - 1\right). \tag{13}$$

Gleichung (12) kann mit Gleichung (13) so umgeändert werden, daß auf der rechten Seite als Veränderliche nur noch der Radius bzw. dessen dimensionsloser Betrag $\frac{r}{r_1}$ verbleibe. Man hat dann

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\varphi^*\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\left[\left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{\frac{b_1}{b_2}-1}{\frac{r_2}{r_1}-1}\right)\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - \frac{\frac{b_1}{b_2}-1}{\frac{r_2}{r_1}-1}\left(\frac{r}{r_1}\right)^3\right] -$$

$$-\frac{\psi_{\mathrm{id}}}{2\,\varphi^*\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[\left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{\frac{b_1}{b_2}-1}{\frac{r_2}{r_1}-1}\right)\ln\frac{r}{r_1} - \frac{\frac{b_1}{b_2}-1}{\frac{r_2}{r_1}-1}\,\frac{r}{r_1}\ln\frac{r}{r_1}\right] \qquad (14)$$

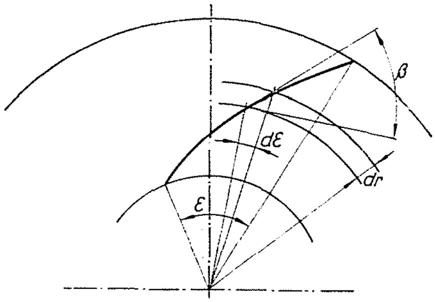

Bild 5

Über dem Anfangs- bzw. Endpunkt der Schaufellinie laufende Radien bestimmen den Zentriwinkel ε (Bild 5). Dessen Größe wird nachstehend noch bestimmt:

$$d\,\varepsilon = \operatorname{ctg}\beta . \frac{dr}{r} .$$

Integriert man diese Beziehung so ergibt sich:

$$\varepsilon = \int_1^{\frac{r_2}{r_1}} \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\frac{r}{r_1}}\, d\left(\frac{r}{r_1}\right) . \qquad (15)$$

Für die logarithmische Grundspirale, die über den Anfangs- und Endpunkt der Schaufellinie verläuft, ist der Steigungswinkel β_a konstant, sodaß die Integration leicht durchzuführen ist. ε kann auch auf dieser Weise bestimmt werden. Vergleicht man das Ergebnis mit Gleichung (15) so kann nach Ordnen

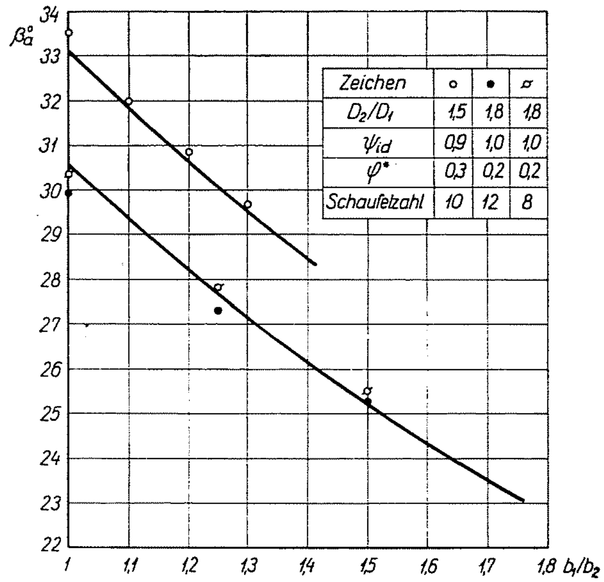

Bild 6

für β_a folgende Beziehung erhalten werden:

$$\operatorname{ctg} \beta_a = \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_1^{\frac{r_2}{r_1}} \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\frac{r}{r_1}} \, d \left(\frac{r}{r_1}\right). \tag{16}$$

Setzt man in diese den Ausdruck (14) für $\operatorname{ctg} \beta$ ein, integriert und ordnet man auch, so ergibt sich

$$\operatorname{ctg} \beta_a = \frac{1}{\varphi^* \, 2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left\{ \left[\frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} \left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{\frac{b_1}{b_2} - 1}{\frac{r_2}{r_1} - 1} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 - 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} \frac{\frac{b_1}{b_2} - 1}{\frac{r_2}{r_1} - 1} \right] -$$

$$\left. - \psi_{\mathrm{id}} \left[\left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{\frac{b_1}{b_2} - 1}{\frac{r_2}{r_1} - 1} \right) \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2} - \frac{\frac{b_1}{b_2} - 1}{\frac{r_2}{r_1} - 1} \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{\frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right) \right] \right\} \tag{17}$$

Für ein Laufrad mit konstanter Breite ist $\frac{b_1}{b_2} = 1$. Setzt man diesen Wert in die letzte Gleichung ein, erhält man wieder den Ausdruck:

$$\operatorname{ctg} \beta_a = \frac{1}{\varphi^* \, 2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[\frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} - \psi_{\mathrm{id}} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2} \right],$$

welcher in der zuvor erwähnten Arbeit [4] schon abgeleitet wurde.

Die Verwendbarkeit der Beziehung (17) konnte auf folgender Weise geprüft werden:

Es wurden mit dem in [1] bekanntgegebenen Rechenverfahren Schaufellinien bestimmt und die dabei erhaltenen Werte für β_a mit jenen verglichen, die sich aus der hier angegebenen Näherungsformel errechnen ließen. Der Vergleich konnte bei Durchmesserverhältnisse von $\frac{D_2}{D_1} = 1{,}8$ und $1{,}5$ und bei verschiedenen Breitenverhältnissen $\frac{b_1}{b_2}$ durchgeführt werden. In Bild 6 sind die Werte von β_a als Funktion von $\frac{b_1}{b_2}$ dargestellt. Die angegebenen Punkte ergaben sich mit dem erwähnten genaueren aber langwierigeren Rechenverfahren.

Man kann feststellen, daß die größte Abweichung von β_a, die sich so für den verschiedenen angenommenen Ausgangsbedingungen ergab, $40'$ beträgt. Damit ist eine Wiederholung eines Rechnungsganges nicht begründet. Die Formel (17) ist zwar nicht einfach, doch ist sie geeignet, die Rechenarbeit bedeutsam zu verkürzen.

Zusammenfassung

Radiale Laufräder mit konischer Deckscheibe können nach dem, für Laufräder mit gleicher Breite ausgearbeiteten, auf dem Singularitätenverfahren beruhenden Rechenverfahren berechnet werden, wenn vorausgesetzt wird, daß die radiale Komponente der Relativgeschwindigkeit nur vom Radius abhängt und vom Zentriwinkel unabhängig ist. Das Rechenverfahren geht von jener logaritmischen Spirale aus, die über den Anfangs- und Endpunkt der Schaufellinie verläuft. Wird der Steigungswinkel dieser Spirale anfangs nicht richtig aufgenommen, kann es vorkommen, daß der Rechnungsgang wiederholt werden muß. Es wird eine Näherungsformel entwickelt, mit welcher dieser Steigungswinkel im voraus mit entsprechender Genauigkeit bestimmt werden kann. Die Formel ist zwar nicht einfach, doch kann mit ihr die Rechenarbeit beträchtlich verkürzt werden.

Literatur

1. GRUBER, J.: Die Konstruktion von Schaufelsternen mit rückwärtsgekrümmter Beschaufelung. Periodica Polytechnica **1**, 43 (1957).
2. HOFFMEISTER, M.: Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singularitätenverfahrens. Maschinenbautechnik **8**, 77 (1959).
3. BETZ, A; FLÜGGE-LOTZ, J.: Berechnung der Schaufeln von Kreiselrädern. Ingénieur-Archiv **IX**, 486 (1938).
4. KURUTZ, I.: Eine Näherungsmethode zur Erleichterung der Berechnung von radialen Laufrädern. Periodica Polytechnica **3**, 223 (1959).

I. KURUTZ, Budapest, XI., Bertalan Lajos u. 4—6, Ungarn