

# BESTIMMUNG DES INDUZIERTEN GESCHWINDIGKEITS- FELDES EINER UNVOLLSTÄNDIGEN WIRBELQUELLENREIHE

Von

O. FÜZY

Lehrstuhl für Wasserkraftmaschinen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 5. April 1960)

Bei der Konstruktion der Beschauelung von Laufrädern in Strömungsmaschinen soll außer der Wirkung der Singularitäten der untersuchten Schaufel auch jene Wirkung in Betracht gezogen werden, die die Singularitäten der übrigen Schaufeln an der Stelle der fraglichen Schaufel ausüben, d. h. die Wirkung des Restgitters. Die Wirkung des Restgitters kann — mit einer für die Praxis genügenden Annäherung — verhältnismäßig schnell berechnet werden, wenn man die Wirbel- bzw. Quellenverteilung entlang der Schaufeln durch eine Reihe konzentrierter Singularitäten

$$\Gamma = \int_0^L \gamma dx = \sum_1^n \Delta \Gamma$$

und

$$Q = \int_0^L q dx = \sum_1^n \Delta Q = 0$$

ersetzt und sodann die erhaltenen Geschwindigkeitsfelder der unvollständigen (an einer Stelle eine Lücke aufweisenden) Wirbelquellenreihen aufeinander legt.

Da die Mehrzahl der Rechenverfahren die Aufgabe statt das achsensymmetrische Gitter zu prüfen, — unter Verwendung irgendeiner zweckmäßigen Transformation — auf die Prüfung eines ebenen geraden und unendlich langen Gitters zurückführt, macht die Berechnung der Wirkung des Restgitters eine Bestimmung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes der geraden, unvollständigen Wirbelquellenreihe nötig.

Dieses Geschwindigkeitsfeld kann man als Resultat der Geschwindigkeitsfelder einer vollständigen Wirbelquellenreihe und einer am Ort der Prüfung in entgegengesetzter Richtung rotierenden Wirbelsenke erhalten:

$$w = w_i + w_o = u + iv.$$

Legt man die unvollständige Wirbelquellenreihe auf die komplexe Ebene in Abb. 1, so induziert die im Punkt  $z_v = \nu t i e^{-i\gamma}$  gelegene  $\nu$ -te Singularität die komplexe Geschwindigkeit

$$\bar{w}_\nu(z) = \frac{\Delta Q + i\Delta\Gamma}{2\pi(z - z_\nu)} = \frac{\Delta Q + i\Delta\Gamma}{2\pi(z - \nu t i e^{-i\gamma})},$$

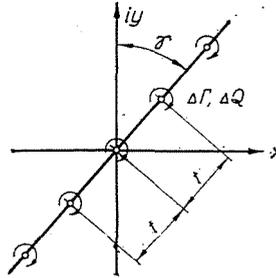


Abb. 1

wogegen im Falle der vollständigen Wirbelquellenreihe

$$\bar{w}_t = u_t - iv_t = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta Q + i\Delta\Gamma}{2\pi(z - \nu t i e^{-i\gamma})}$$

ist.

Nach Ordnung erhält man

$$\bar{w}_t = (\Delta Q + i\Delta\Gamma) \frac{e^{i\gamma}}{2t} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi z}{te^{-i\gamma}} - i\nu\pi},$$

worin die rechtsseitige unendliche Summe die Partialbruchzerlegung des hyperbolischen Cotangens darstellt, für die vollständige Reihe gilt mithin

$$\bar{w}_t = \left( \frac{\Delta Q}{t} + i \frac{\Delta\Gamma}{t} \right) \frac{e^{i\gamma}}{2} \operatorname{cth} \left( \frac{z\pi}{t} e^{i\gamma} \right).$$

Setzt man aus Zweckmäßigkeitsgründen  $\gamma = \pi/2$ , dann ist im Punkte  $z = le^{i\beta}$  (siehe Abb. 2)

$$\bar{w}_t = \left( i \frac{\Delta Q}{t} - \frac{\Delta\Gamma}{t} \right) \frac{\operatorname{cth} \left( i\pi e^{i\beta} \frac{l}{t} \right)}{2} = u_t - iv_t.$$

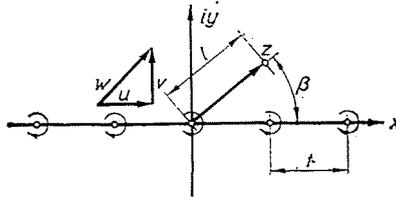


Abb. 2

Trennt man den reellen und den imaginären Teil, dann erhält man die Komponenten der Geschwindigkeit  $w_t$  parallel und senkrecht zur Wirbelquellenreihe ( $u_t$  bzw.  $v_t$ ) aus den Ausdrücken

$$u_t = \frac{e^\mu \sin \kappa}{1 - 2e^\mu \cos \kappa + e^{2\mu}} \frac{\Delta Q}{t} + \frac{e^{2\mu} - 1}{2(1 - 2e^\mu \cos \kappa + e^{2\mu})} \frac{\Delta \Gamma}{t}$$

und

$$v_t = \frac{e^{2\mu} - 1}{2(1 - 2e^\mu \cos \kappa + e^{2\mu})} \frac{\Delta Q}{t} - \frac{e^\mu \sin \kappa}{1 - 2e^\mu \cos \kappa + e^{2\mu}} \frac{\Delta \Gamma}{t},$$

in denen

$$\mu = 2\pi \frac{l}{t} \sin \beta$$

und

$$\kappa = 2\pi \frac{l}{t} \cos \beta.$$

Die in der Mitte des Koordinatensystems anzubringende Wirbelsenke mit entgegengesetzter Drehung induziert im Punkte  $z$  die komplexe Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 &= - \frac{\Delta Q + i \Delta \Gamma}{2\pi z} = \\ &= \frac{-1}{2\pi \frac{l}{t}} \left( \frac{\Delta Q}{t} \cos \beta + \frac{\Delta \Gamma}{t} \sin \beta \right) - i \frac{1}{2\pi \frac{l}{t}} \left( \frac{\Delta \Gamma}{t} \cos \beta - \frac{\Delta Q}{t} \sin \beta \right). \end{aligned}$$

Legt man die beiden Geschwindigkeitsfelder aufeinander, so wird die gerade unvollständige Wirbelquellenreihe im Punkte  $z = le^{i\beta}$  die Geschwindigkeiten

$$u = -\Phi \frac{\Delta Q}{t} + \Psi \frac{\Delta \Gamma}{t}$$

und

$$v = \Psi \frac{\Delta Q}{t} + \Phi \frac{\Delta \Gamma}{t}$$

parallel bzw. senkrecht zur Wirbelquellenreihen induzieren, worin

$$\Phi = \Phi \left( \frac{l}{t}, \beta \right) = \frac{-e^{\mu} \sin \alpha}{1 - 2e^{\mu} \cos \alpha + e^{2\mu}} + \frac{\cos \beta}{2\pi} \frac{l}{t}$$

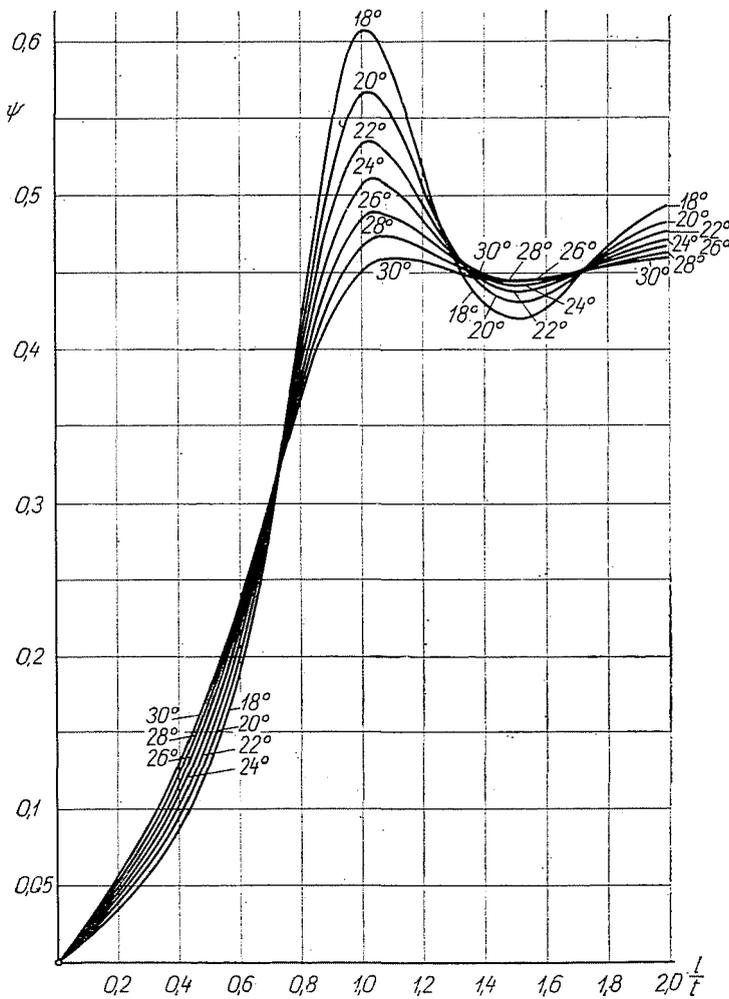


Abb. 3

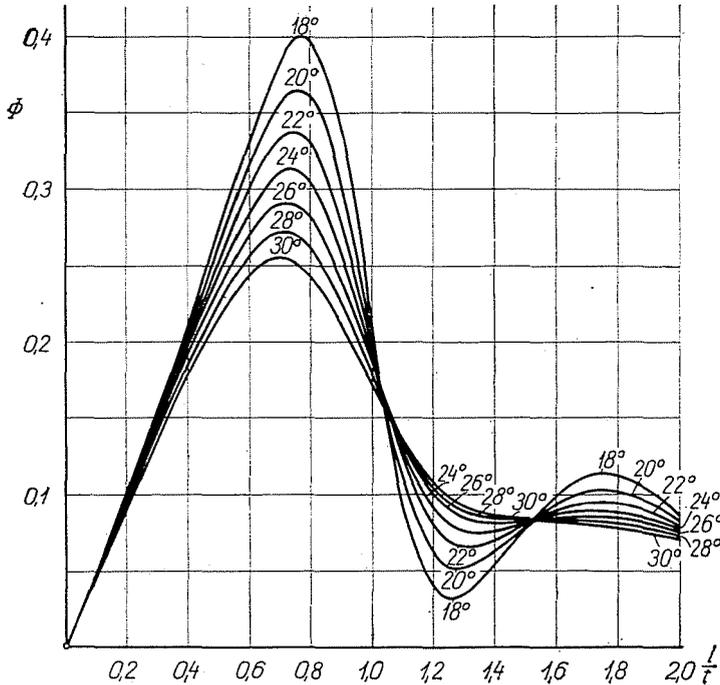


Abb. 4

und

$$\Psi = \Psi\left(\frac{l}{t}, \beta\right) = \frac{e^{2\mu} - 1}{2(1 - 2e^{\mu} \cos \kappa + e^{2\mu})} - \frac{\sin \beta}{2\pi \frac{l}{t}}$$

bzw.

$$\mu = 2\pi \frac{l}{t} \sin \beta$$

und

$$\kappa = 2\pi \frac{l}{t} \cos \beta.$$

Wie man sieht, bestehen die Berechnungsarbeiten, zum überwiegenden Teil aus der rechnerischen Ermittlung der Funktionswerte  $\Phi(l/t, \beta)$  und  $\Psi(l/t, \beta)$ . Die Werte dieser Funktionen können — für einige bei Pumpen gebräuchliche Winkel  $\beta$  und für die Grenzwerte  $l/t = 0 \sim 2$  — aus den Abb. 3 und 4, beziehungsweise aus den Tabellen I und II abgelesen werden. Die absoluten Werte der Funktionen sind für die Werte  $\pm\beta$  und  $\pi \pm \beta$  gleich, die Funk-

tion  $\Phi$  wechselt dagegen das Vorzeichen, wenn  $\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/2$ , die Funktion  $\Psi$  hingegen, wenn  $\pi \leq \beta \leq 2\pi$ . Bei  $\beta$ - und  $l/t$ -Werten, die den Diagrammen nicht entnommen werden können, läßt sich die Berechnung auf Grund der angegebenen Gleichungen durchführen.

Tabelle I

Werte für  $\Psi$ 

$\beta$	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°
0,1	0,0164	0,0182	0,0199	0,0217	0,0233	0,0250	0,0266
0,2	0,0347	0,0383	0,0418	0,0453	0,0487	0,0520	0,0552
0,3	0,0569	0,0626	0,0681	0,0735	0,0785	0,0835	0,0882
0,4	0,0863	0,0943	0,1019	0,1091	0,1158	0,1222	0,1281
0,5	0,1280	0,1383	0,1476	0,1562	0,1639	0,1709	0,1771
0,6	0,1898	0,2011	0,2108	0,2189	0,2258	0,2315	0,2362
0,7	0,2821	0,2899	0,2954	0,2989	0,3010	0,3021	0,3025
0,8	0,4087	0,4026	0,3956	0,3882	0,3810	0,3740	0,3676
0,9	0,5402	0,5106	0,4857	0,4648	0,4471	0,4320	0,4191
$l/t$ 1,0	0,6063	0,5645	0,5313	0,5045	0,4825	0,4643	0,4489
1,1	0,5813	0,5513	0,5261	0,5051	0,4872	0,4728	0,4587
1,2	0,5176	0,5068	0,4958	0,4851	0,4749	0,4654	0,4565
1,3	0,4626	0,4654	0,4652	0,4630	0,4596	0,4553	0,4506
1,4	0,4305	0,4398	0,4456	0,4480	0,4486	0,4478	0,4459
1,5	0,4203	0,4308	0,4378	0,4420	0,4441	0,4447	0,4442
1,6	0,4264	0,4349	0,4402	0,4435	0,4452	0,4457	0,4453
1,7	0,4439	0,4470	0,4489	0,4498	0,4499	0,4494	0,4485
1,8	0,4645	0,4619	0,4597	0,4578	0,4561	0,4543	0,4528
1,9	0,4813	0,4748	0,4693	0,4652	0,4619	0,4590	0,4566
2,0	0,4924	0,4827	0,4764	0,4704	0,4663	0,4629	0,4600

Bei Anwendung der Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  besteht natürlich kein prinzipielles Hindernis, zwecks genauerer Berechnung der Wirkung des Restgitters die Addition mit den Grenzübergängen  $\Delta Q \rightarrow dQ$ ,  $\Delta \Gamma \rightarrow d\Gamma$ ,  $u \rightarrow du$  und  $v \rightarrow dv$  in der Form einer Integration durchzuführen.

### Zusammenfassung

Führt man beim Entwurf der Beschauelung von Strömungsmaschinen die Untersuchung des achsensymmetrischen Gitters auf die Untersuchung eines unendlichen ebenen Gitters zurück, dann erfordert die Berechnung der Wirkung des Restgitters — am Orte der untersuchten Schaufel — eine Addition der induzierten Geschwindigkeiten der unvollständigen Wirbelquellenreihen. Die vorliegende Arbeit gibt Zusammenhänge zur Feststellung der parallel und senkrecht zu den unvollständigen Wirbelquellenreihen verlaufenden Geschwindigkeitskomponenten des induzierten Geschwindigkeitsfeldes. Einige Resultate sind in Diagrammen und Tabellen zusammengefaßt.

Tabelle II

Werte für  $\Phi$ 

$\beta$	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°
0,1	0,0501	0,0493	0,0487	0,0479	0,0472	0,0462	0,0453
0,2	0,1013	0,0998	0,0982	0,0964	0,0946	0,0926	0,0906
0,3	0,1548	0,1521	0,1491	0,1458	0,1426	0,1389	0,1353
0,4	0,2093	0,2068	0,2015	0,1959	0,1901	0,1841	0,1780
0,5	0,2721	0,2631	0,2539	0,2444	0,2350	0,2254	0,2159
0,6	0,3330	0,3172	0,3016	0,2863	0,2716	0,2574	0,2438
0,7	0,3836	0,3575	0,3334	0,3111	0,2907	0,2719	0,2547
0,8	0,3970	0,3613	0,3307	0,3044	0,2815	0,2614	0,2436
0,9	0,3363	0,3052	0,2801	0,2593	0,2415	0,2261	0,2124
1,0	0,2095	0,2037	0,1976	0,1914	0,1850	0,1785	0,1720
1,1	0,0946	0,1120	0,1232	0,1301	0,1338	0,1353	0,1351
1,2	0,0410	0,0640	0,0807	0,0925	0,1007	0,1059	0,1089
1,3	0,0360	0,0537	0,0673	0,0776	0,0851	0,0903	0,0938
1,4	0,0543	0,0634	0,0708	0,0767	0,0811	0,0843	0,0864
1,5	0,0789	0,0796	0,0806	0,0816	0,0825	0,0831	0,0834
1,6	0,1002	0,0941	0,0899	0,0870	0,0849	0,0832	0,0819
1,7	0,1124	0,1023	0,0950	0,0897	0,0857	0,0827	0,0802
1,8	0,1131	0,1023	0,0944	0,0886	0,0842	0,0807	0,0778
1,9	0,1034	0,0953	0,0891	0,0843	0,0804	0,0772	0,0746
2,0	0,0880	0,0843	0,0810	0,0781	0,0754	0,0730	0,0708

1/2

## Literatur

1. BETZ: Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen. Ingenieur-Archiv 2, 359 (1931).
2. GRUBER: Hiányos örvénysor sebességmezejének közelítő meghatározása. MTA Műszaki Osztály Közleményei 18, 187 (1956).
3. SCHOLZ, N.: Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. VDI Forschungsheft. 442.

O. FÜZY, Budapest XI. Stoczek u. 2. Ungarn.