DAS GESCHWINDIGKEITSFELD VON GEWISSEN ABSAUGSCHIRMEN

Von

T. SZENTMÁRTONY

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 25. Februar 1960)

Das Geschwindigkeitsfeld von Absaugschirmen wird meist experimentell bestimmt. Um einen Absaugschirm entsteht im allgemeinen eine räumliche Strömung, die sich theoretisch außerordentlich schwer bestimmen läßt. In gewissen Fällen kann sie jedoch als ebenes Problem behandelt und das Geschwindigkeitsfeld mit Anwendung der konformen Abbildungen berechnet werden.

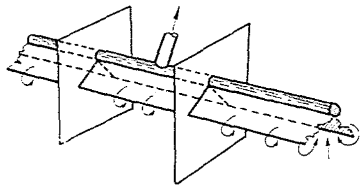

Bild 1

Die Voraussetzung dafür, das Geschwindigkeitsfeld als eine ebene Strömung betrachten zu können, ist nur dann gegeben, wenn der Schirm als unendlich lang anzusehen, oder von ebenen Endscheiben begrenzt ist (Bild 1). Mathematische Schwierigkeiten können auch damit umgangen werden, wenn man sich den Raum über und unter dem Schirm von allen die Strömung beeinflußenden Gegenständen (Decke, Fußboden usw.) frei denkt. Diese Voraussetzung ist in der Praxis oft annähernd erfüllt. Sollte man den Fußboden, die Decke oder anderen störenden Gegenstand auch beachten, so wäre die Rechenmethode gegenwärtig noch sehr schwierig, und könnte eine schnelle Lösung der Aufgabe nur mit Anwendung der elektrischen Analogie, mit dem Elektrolitischen-Trog erzielt werden.

Die Ausstreckung des Schirmes

Mit den angegebenen Voraussetzungen kann der Schirm mathematisch als eine Doppellinie behandelt werden, deren Fortsetzung die Mittellinie ist.

(Bild 2). Diese mehrfach geknickte Linie läßt sich in eine Gerade abbilden. Dabei übergeht der über der geknickten Linie liegende Teil der Ebene in den über der Geraden liegenden Teil der Bildebene, und der unter ihr liegende in den unteren Teil der Bildebene. Aus Symmetriegründen genügt es die oberen Hälften beider Ebenen zu betrachten.

Es seien A, B, C, D und E fünf Punkte der abzubildenden geknickten Linie in der z-Ebene. A und E liegen ferne von der Doppellinie, während B, C und D ihre Endpunkte sind. Die bei B und D liegenden Winkeln seien a_B und a_D. Die Bilder der angegebenen Punkte auf der ζ-Ebene seien A', B', C', D' und E'. Die Abbildungsfunktion kann mit der Schwarz-Christoffelschen Methode bestimmt werden. Das Ergebnis ist ein Integral, das in geschlossener

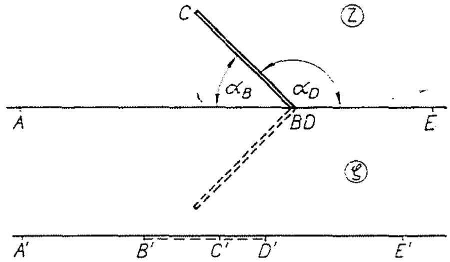

Bild 2

Form auszudrücken schwierig ist. Mit einem strömungstechnischen Gedankengang kann eine leichtere Lösung gefunden werden.

Die geknickte Linie der z-Ebene kann aus Stromlinien der, in den Doppelpunkt BD untergebrachten, Quelle bestehend betrachtet werden. Es sei der Winkel $a_B = \frac{\pi}{2}(1-n)$; so wird der $\frac{Q}{2}(1-n)$-te Teil der Ergiebigkeit Q von der Quelle in jenen Raum einströmen, welchen die Schenkeln des Winkels a_B begrenzen. Der restliche Teil $\frac{Q}{2}(1+n)$ wird in dem Raum mit dem Zentriwinkel $a_D = \frac{\pi}{2}(1+n)$ einströmen. Mit der Abbildung kommt in dem Punkte B' eine Quelle mit der Ergiebigkeit $\frac{Q}{2}(1-n)$ und in dem Punkte D' eine solche mit der Ergiebigkeit $\frac{Q}{2}(1+n)$. Das komplexe Potential dieser beiden Strömungen ist einander gleich. Daraus bekommt man:

$$w = \frac{Q}{2}\, ln z = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{1-n}{2}\, ln\,(\zeta - \zeta_{B'}) + \frac{1+n}{2}\, ln\,(\zeta - \zeta_{D'})\right]$$

ferner

$$z = (\zeta - \zeta_{B'})^{\frac{1+n}{2}} (\zeta - \zeta_{D'})^{\frac{1+n}{2}} .$$

Damit ist die gesuchte Abbildungsfunktion bestimmt. Die Werte von $\zeta_{B'}$ und $\zeta_{D'}$ können willkürlich angenommen werden, und zu diesen soll $\zeta_{C'}$ bestimmt werden. $\zeta_{C'}$ ist das Bild des Schirmendpunktes C. Die Strecke $\overline{B'C'}$ ist das Bild der inneren, die Strecke $\overline{C'D'}$ hingegen das Bild der äußeren Schirmfläche. Der Punkt C, dessen Bild eben $\zeta_{C'}$ ist, liegt auf der z-Ebene am entferntesten von der Quelle. So ist:

$$z_{\max} = (\zeta_{C'} - \zeta_{D'})^{\frac{1-n}{2}} (\zeta_{C'} - \zeta_{D'})^{\frac{1+n}{2}} .$$

Logarithmisiert man beide Seiten dieser Gleichung, dann ergibt sich:

$$\ln z_{\max} = \frac{1-n}{2} \ln (\zeta_{C'} - \zeta_{B'}) + \frac{1+n}{2} \ln (\xi_{C'} - \zeta_{B'}).$$

Differenziert man, dann ist

$$\frac{d \ln z_{\max}}{d \zeta_{C'}} = \frac{1-n}{2} \frac{1}{\zeta_{C'} - \zeta_{B'}} + \frac{1+n}{2} \frac{1}{\zeta_{C'} - \zeta_{D'}} = 0,$$

ordnet und vereinfacht man noch so ist

$$\frac{1-n}{\zeta_{C'} - \zeta_{B'}} = - \frac{1+n}{\zeta_{C'} - \zeta_{D'}} .$$

Daraus ist

$$\zeta_{C'} = \frac{1}{2} [(1-n) \zeta_{D'} + (1+n) \zeta_{B'}].$$

Sind n, ζ_B, ζ_D bekannt, so kann das Bild des Schirmendpunktes $\zeta_{C'}$ berechnet werden. Setzt man in die Abbildungsfunktion ζ_C statt ζ ein, so ergibt sich der Endpunkt C des Schirmes zu

$$z_C = \left\{ \frac{1}{2} [(1-n) \zeta_{D'} + (1+n) \zeta_{B'}] - \zeta_{B'} \right\}^{\frac{1-n}{2}} \left\{ \frac{1}{2} [(1-n) \zeta_{D'} + \right.$$
$$\left. + (1+n) \zeta_{B'}] - \zeta_{D'} \right\}^{\frac{1+n}{2}} .$$

Daraus ergibt sich:

$$z_C = \frac{1}{2}(1-n)^{\frac{1-n}{2}}(1+n)^{\frac{1+n}{2}}(\zeta_{B'}+\zeta_{D'})^{\frac{1-n}{2}}(\zeta_{B'}-\zeta_{D'})^{\frac{1+n}{2}}.$$

Diese Gleichung beweist auch, daß nur $\zeta_{B'}$ und $\zeta_{D'}$ willkürlich angenommen werden können, denn der Öffnungswinkel des Schirmes bestimmt den Wert von n.

Die Berechnung der Stromlinien und der Linien gleichen Potentials

In der Kenntnis der Abbildungsfunktion und des abgebildeten Schirmes können die Stromlinien und die potentialgleichen Linien bestimmt werden. Im Punkt B — so auch in B' — wird eine Senke mit der Ergiebigkeit $-Q$ untergebracht. Diese soll die entsprechende Absaugung erzeugen. Auf der ζ-Ebene sind die Stromlinien dieser Senke die über B' laufenden Strahlen; die Punkte mit dem gleichen Potential hingegen bilden Kreise um denselben Punkt B' (Bild 3). Die frei anzunehmenden Punkte seien $\zeta_{B'} = -1$ und $\zeta_{D'} = 1$.

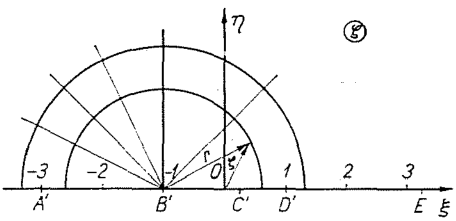

Bild 3

Im folgenden seien die Schnittpunkte gewisser Strom- und potentialgleichen Linien bestimmt. Die Koordinaten eines Schnittpunktes seien ξ und η, die Entfernung desselben von B' sei r. So ist

$$r^2 = (\xi + 1)^2 + \eta^2$$

und

$$\zeta = \xi + i\sqrt{r^2 - (\xi + 1)^2}\,.$$

Damit ergibt sich aus der Abbildungsfunktion

$$z = \left[(\xi + 1) + i\,(\sqrt{r^2 - (\xi + 1)^2}\right]^{\frac{1-n}{2}} \left[\xi - 1 + i\sqrt{r^2 - (\xi + 1)^2}\right]^{\frac{1+n}{2}}$$

Verwendet man noch folgende Bezeichnungen:

$$\zeta + 1 = R_1 e^{i\varphi_1}$$

und

$$\zeta - 1 = R_2 e^{i\varphi_2}$$

so ist die Transformationsgleichung:

$$z = (R_1 e^{i\varphi_1})^{\frac{1-n}{2}} (R_2 e^{i\varphi_2})^{\frac{1+n}{2}} = Re^{i\varphi}.$$

Vergleicht man die zwei Gestalten dieser Gleichung, so ergibt sich

$$R_1 = \sqrt{(\xi+1)^2 + r^2 - (\xi+1)^2} = r$$

$$R_2 = \sqrt{(\xi-1)^2 + r^2 - (\xi+1)^2} = \sqrt{r^2 - 4\xi}$$

und

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r^2 - (\xi+1)^2}}{\xi+1}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r^2 - (\xi+1)^2}}{\xi-1}.$$

Mit folgenden Bezeichnungen:

$$R_1' = R_1^{\frac{1+n}{2}} \qquad R_1'' = R_1^{\frac{1-n}{2}}$$

$$R_2' = R_2^{\frac{1+n}{2}} \qquad R_2'' = R_2^{\frac{1-n}{2}}$$

$$\varphi_1' = \frac{1+n}{2}\varphi_1 \qquad \varphi_1'' = \frac{1-n}{2}\varphi_1$$

$$\varphi_2' = \frac{1+n}{2}\varphi_2 \qquad \varphi_2'' = \frac{1-n}{2}\varphi_2$$

ist

$$R = R_1'' \cdot R_2'$$

und

$$\varphi = \varphi_1'' + \varphi_2'$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte auf der z-Ebene sind also:

$$X = R\cos\varphi\,; \qquad Y = R\sin\varphi\,.$$

Die Punkte $\zeta_{B'}$ und $\zeta_{D'}$ konnten willkürlich aufgenommen werden, weshalb man die Längenmaße der z-Ebene zweckmäßig auf die Länge des Schirmes (z_C) bezieht.

So ergibt sich:

$$x = \frac{X}{|z_C|} = \frac{R\cos\varphi}{|z_C|} \quad \text{und} \quad y = \frac{Y}{|z_C|} = \frac{R\sin\varphi}{|z_C|}.$$

Die Punkte einer Stromlinie oder einer potentialgleichen Linie der ζ-Ebene werden nach der Transformation, in der z-Ebene, wieder Punkte eines Strom- bzw. potentialgleichen Linie werden. Das heißt, die Stromlinien und Äquipotentiallinien jener Strömung, die sich um einen Absaugschirm ausbildet, können anhand der angegebenen Methode bestimmt werden.

Die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten soll zunächst der absolute Wert des Differentialquotienten der Abbildungsfunktion bestimmt werden:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1-n}{2}(\zeta+1)^{\frac{1-n}{2}-1}(\zeta-1)^{\frac{1+n}{2}} + \frac{1+n}{2}(\zeta-1)^{\frac{1+n}{2}-1}(\zeta+1)^{\frac{1-n}{2}}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1-n}{2}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\frac{1+n}{2}} + \frac{1+n}{2}\left(\frac{\zeta+1}{\xi-1}\right)^{\frac{1-n}{2}}.$$

Mit den früheren Bezeichnungen:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1-n}{2}\,\frac{R_2' e^{i\varphi_2'}}{R_1' e^{i\varphi_1'}} + \frac{1+n}{2}\,\frac{R_1'' e^{i\varphi_1''}}{R_2'' e^{i\varphi_2''}}$$

oder

$$\frac{dz}{d\zeta} = Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta}.$$

Daraus ist

$$A = \frac{1-n}{2}\,\frac{R_2'}{R_1'}, \qquad B = \frac{1+n}{2}\,\frac{R_1''}{R_2''},$$

$$\alpha = \varphi_2' - \varphi_1', \qquad \beta = \varphi_1'' - \varphi_2''.$$

Mit diesen Bezeichnungen ist:

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \left[(A\cos\alpha + B\cos\beta)^2 + (A\sin\beta + B\sin\beta)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Die Geschwindigkeit v_ζ in einem Punkte der ζ-Ebene ist

$$v_\zeta = -\frac{Q}{2\pi|\zeta|} = -\frac{Q}{2\pi r}.$$

Hierin bedeutet Q die Ergiebigkeit der Senke. Die Geschwindigkeit in der z-Ebene ist demnach

$$v_z = \frac{v_\zeta}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|} = -\frac{R}{2\pi r}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$$

Um allgemeinere Beziehungen zu erhalten, soll die Geschwindigkeit dimensionslos ausgedrückt werden. Die einem Punkte zugeordnete Geschwindigkeit sei auf jene Geschwindigkeit v_{z0} bezogen, die im betrachteten Punkt dann entstehen würde, wenn die Senke Q ohne den Schirm im Punkt $z = 0$ untergebracht wäre. In diesem Falle ist:

$$v_{z0} = \frac{\eta}{2\pi|z|} = -\frac{Q}{2\pi R}$$

womit die dimensionslose Geschwindigkeit

$$v = \frac{v_z}{v_{z0}} = \frac{R}{r}\frac{1}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|}.$$

Anwendung

Das mitgeteilte Rechenverfahren soll an dem Beispiel eines sehr langen oder mit Endscheiben begrenzten Schirmes mit einem Öffnungswinkel von 90° angewendet werden.

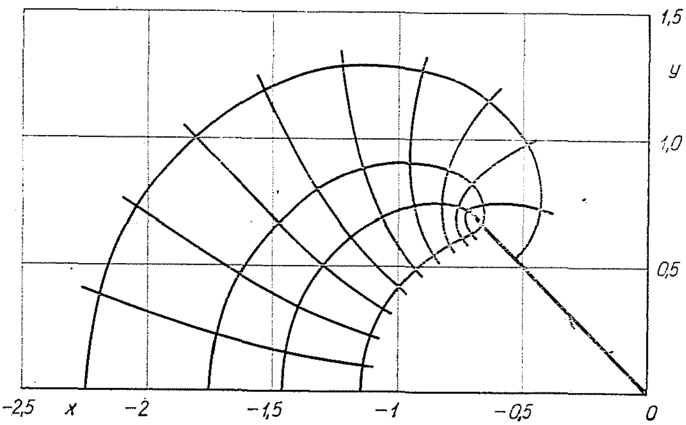

Bild 4

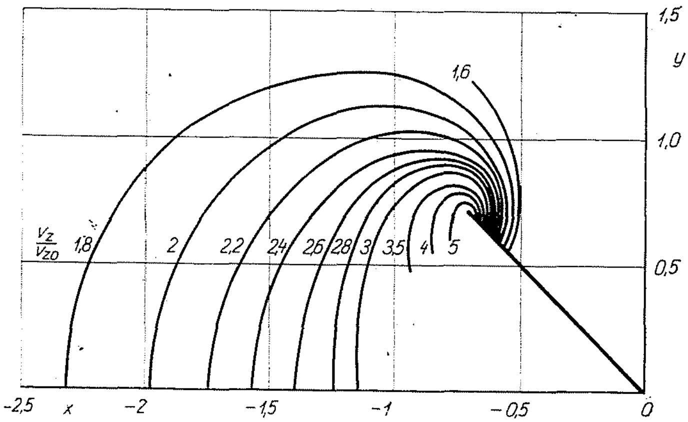

Bild 5

Da der halbe Öffnungswinkel 45° beträgt, ist $n = 0{,}5$. Die erhaltenen Stromlinien und die potentialgleichen Linien sind in Bild 4, das Geschwindigkeitsfeld in Bild 5 dargestellt.

Am Ende des Schirmes ist die Geschwindigkeit theoretisch unendlich aber auch praktisch sehr groß. Aus diesen Grunde löst sich die Strömung von der Innenseite des Schirmes ab, so daß im inneren des Schirmes die tatsächliche Strömung den berechneten Stromlinien voraussichtlich nicht entspricht. Da die Strömung beim Eintritt kontrahiert, sind in der Symmetrieebene größere Geschwindigkeiten zu erwarten als die berechneten. Grunde dessen wurde die Berechnung der genannten Kennfelder für das Innere des Schirmes nicht durchgeführt.

Die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung um den Schirm ist für die Beurteilung seiner Wirksamkeit von erheblicher Bedeutung.

Es sollen zum Beispiel die von einer Wanne aufsteigenden warmen Dämpfe abgesaugt werden. Das bekannte Geschwindigkeitsfeld um den Schirm kann mit jener der parallelen Aufwärtsströmung superponiert werden. Es ergeben sich daraus Staupunkten auf dem Schirm. Die Stromlinien, die sich in den Staupunkten verzweigen, bilden die Grenzen der abgesaugten Strömung und ermöglichen so die Beurteilung der Wirksamkeit des Schirmes.

Zusammenfassung

Das Geschwindigkeitsfeld der als unendlich lang zu betrachtenden oder mit Endscheiben begrenzten Absaugschirme kann mit Anwendung der konformen Abbildung bestimmt werden. Die Doppellinie, die den Schirm darstellt wird mit der Abbildung ausgestreckt, im tiefsten Punkt des Schirmes wird eine Quelle untergebracht und durch Transformation lassen sich die Stromlinien, die potentialgleichen Linien und das Geschwindigkeitsfeld bestimmen. Die Anwendung des Verfahrens wird am Beispiel eines Schirmes mit einem Öffnungswinkel von 90° gezeigt. Die in den Staupunkten sich verzweigenden Stromlinien eignen sich zur Beurteilung der Wirksamkeit der Absaugung.

Literatur

БАТУРИН В. В.: Основы промышленной вентиляции, Москва, 1951.

BETZ, A.: Konforme Abbildung (Springer Verlag, 1948).

DÄTWYLER, G.: Untersuchungen über das Verhalten von Tragflügelprofilen sehr nahe am Boden. Dissertation, Zürich, 1934.

T. SZENTMÁRTONY, Budapest XI. Bertalan Lajos u. 4—6. Ungarn.