

KONVERGENZSCHNELLE DES DIFFERENZVERFAHRENS DER POISSONSCHEN UND DER BIHARMONISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNG. I.

Von

T. FREY und P. RÓZSA

Lehrstuhl für Mathematik der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 2. Februar 1960)

1. Einleitung

In dieser ersten Arbeit werden wir bei homogenen Randbedingungen des rechteckigen Viereckbereiches eine Abschätzung dafür angeben, wie schnell das Lösungssystem des Differenzenverfahrens — mit dem wir die Poissonsche bzw. die biharmonische Differentialgleichung ersetzen — gegen die Lösung der ursprünglichen Randwertaufgabe strebt. Es ist uns nämlich gelungen, die Matrix des betrachteten Differenzgleichungssystem in geschlossener Form zu invertieren (P. RÓZSA). Weiterhin konnten wir abschätzen, wie schnell diese Greensche Matrix gegen die Greensche Funktion strebt (T. FREY).

In weiteren Arbeiten (II. bzw. III.) werden wir die Ergebnisse für Bereiche, die durch beliebige rektifizierbare Randkurven begrenzt sind, und für allgemeinere selbstadjungierte elliptische Differentialgleichungen verallgemeinern.

2. Poissonsche Gleichung: Biegung von Membranen

Betrachten wir eine rechteckige, an den Rändern fixierte Membrane mit den Seitenlängen a und b und mit der gleichmäßig verteilten Belastung $t(x, y)$. Bezeichnen wir die spezifische Rand-Spannungskraftdichte mit F und suchen wir die Biegung $u(x, y)$ von einem beliebigen Punkt (x, y) . Bekanntlich entspricht die Biegung der Poissonschen Differentialgleichung¹

$$\Delta u = -\frac{1}{F} t(x, y). \quad (2.1)$$

Zur annähernden Lösung der Aufgabe bedienen wir uns des Differenzenverfahrens, d. h. die partielle Differentialgleichung wird durch eine Differenzgleichung angenähert. Der Einfachheit halber soll noch angenommen werden, daß das Verhältnis der Seitenlängen des Rechtecks rational ist, und daß das Rechteck mit Quadraten derart bedeckt ist, daß $a = m \cdot h$ und $b = n \cdot h$, wenn h die Seitenlänge der Quadrate bezeichnet.

¹ Siehe z. B. [1], S. 82—84.

Die gleichmäßig verteilte Belastung $t(x, y)$ wird durch die in den Gitterpunkten wirkenden konzentrierten Kräfte der Größe

$$t_{ip} = h^2 t \left(\frac{p}{m} a, \frac{i}{n} b \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad p = 1, 2, \dots, m-1,$$

die am Rand auftretende kontinuierliche Spannungskraft hingegen durch die konzentrierten Spannungskräfte $S = hF$ ersetzt. Die Verschiebung der einzelnen Gitterpunkte wollen wir mit U_{ip} ($i = 1, 2, \dots, n-1; p = 1, 2, \dots, m-1$) bezeichnen und für die Summe der zur Bildung der zweiten Differenzen nach p und i dienenden Operatoren den »harmonischen« Differenzoperator Δ_h einführen, d. h. es gelte

$$\Delta_h U_{ip} = U_{i+1,p} + U_{i-1,p} + U_{i,p+1} + U_{i,p-1} - 4 U_{i,p}.$$

Es soll also die lineare Differenzgleichung

$$\frac{1}{h} S \Delta_h U_{i,p} = -t_{i,p} \quad (2.2)$$

gelöst werden, die die (homogenen) Randbedingungen

$$U_{0,p} = U_{n,p} = U_{i,0} = U_{i,m} = 0 \quad (2.3)$$

erfüllt.

Faßt man die Differenzgleichung (2.2) und die Randbedingungen (2.3) in ein lineares algebraisches Gleichungssystem zusammen, dann erhält man die Matrixgleichung

$$\mathbf{B} \mathbf{u} = \frac{1}{h} \mathbf{S} \mathbf{t}, \quad (2.4)$$

in der \mathbf{u} und \mathbf{t} Spaltenvektoren mit $m \cdot n$ Elementen darstellen, in der die Koeffizientenmatrix \mathbf{B} leicht in Blöcke partitioniert werden kann und die sich mit Hilfe der Kontinuantenmatrix

$$\mathbf{A} = [a_{ik}]; \quad a_{ii} = 2; \quad a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = -1; \quad a_{i,j} = 0 \quad (j \neq i-1; i; i+1), \quad (2.5)$$

in der Form

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ij}]; \quad \mathbf{B}_{ii} = \mathbf{A} + 2\mathbf{E}; \quad \mathbf{B}_{i+1,i} = \mathbf{B}_{i,i+1} = -\mathbf{E}; \quad \mathbf{B}_{i,j} = \mathbf{O} \quad (j \neq i-1; i; i+1). \quad (2.6)$$

aufschreiben läßt. Bezeichnen wir die Inverse der Hypermatrix \mathbf{B} mit $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{G}_p = [\mathbf{G}_{ij}]$. Wir wollen nun beweisen, daß die in den Blöcken \mathbf{G}_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$) stehenden Elemente

$$g_{p,q}^{(i,j)}, \quad (p; q = 1, 2, \dots, m-1)$$

aus dem Zusammenhang

$$g_{p,q}^{(i,j)} = \begin{cases} \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} \frac{sh i \vartheta_k}{sh \vartheta_k} \frac{sh(n-j) \vartheta_k}{sh n \vartheta_k} & (i \leq j) \\ \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} \frac{sh j \vartheta_k}{sh \vartheta_k} \frac{sh(n-i) \vartheta_k}{sh n \vartheta_k} & (i \geq j) \end{cases} \quad (2.7)$$

berechnet werden können, in welchem $\frac{1}{2} \vartheta_k = \sin k\pi \cdot \frac{1}{2m}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$).

Betrachten wir nämlich statt der Hypermatrix $B = [B_{ij}]$ jene Matrix $[b_{ij}]$, deren Elemente auf dieselbe Weise von dem Skalaren a abhängen wie die Blöcke der Hypermatrix $[B_{ij}]$ von der Matrix A der Ordnung $m-1$, dann haben wir

$$\tilde{B} = [b_{i,j}]; \quad b_{i,i} = a + 2; \quad b_{i+1,i} = b_{i,i+1} = -1; \quad b_{ij} = 0 \quad (j \neq i = 1; \quad i; \quad i + 1) \quad (2.8)$$

Wenn wir nun die Transformation $2chz = a + 2$ einführen, dann erhalten wir die Elemente der Reziprokenmatrix $[b_{ij}]^{-1} = [g_{i,j}]$ in folgender Form:²

$$g_{i,j} = \begin{cases} \frac{shiz}{shz} \cdot \frac{sh(n-j)z}{shnz} & (i \leq j) \\ \frac{shjz}{shz} \cdot \frac{sh(n-i)z}{shnz} & (i \geq j) \end{cases} \quad (2.9)$$

Da die rechte Seite dieses Zusammenhanges eine rationale Funktion der skalaren Unbestimmten a ist, bleibt (2.9) auch dann gültig, wenn wir an die Stelle von a die (nicht singuläre) Matrix A schreiben. In diesem Falle kann die durch den Zusammenhang

$$2chX = A + 2E \quad (2.10)$$

definierte Matrix X — durch die kanonische Zerlegung von A — in der Form

$$X = S \cdot \langle \vartheta_k \rangle \cdot S^* \quad (2.11)$$

hergestellt werden,³ in der die Spaltenvektoren der orthogonalen Matrix

$$S = [s_{p,k}] = \sqrt{\frac{2}{m}} \left[\sin \frac{pk\pi}{m} \right]$$

² Siehe z. B. [2] S. 457.

³ Eine ähnliche Herstellung ist z. B. in einer Arbeit von D. E. Rutherford zu finden (Siehe [4] S. 241.)

die Eigenvektoren von A sind, während man die Werte ϑ_k aus der in der Form

$$S \cdot \langle 2 \operatorname{ch} \vartheta_k \rangle \cdot S^* = S \cdot \left\langle 4 - 2 \cos \frac{k\pi}{m} \right\rangle \cdot S^*$$

durchgeführten kanonischen Zerlegung der Ausdrücke (2.10) aus dem Zusammenhang

$$\operatorname{sh} \frac{1}{2} \vartheta_k = \sin \frac{k\pi}{2m}, \quad (k = 1, 2, \dots, m-1)$$

erhält. So ergibt sich für die Blöcke $G_{i,j}$ der gesuchten Reziprokenmatrix $G_p = B^{-1}$ — wenn man auch die Matrix X gemäß (2.11) kanonisch zerlegt — der Ausdruck

$$G_{i,j} = \begin{cases} S \cdot \left\langle \frac{\operatorname{sh} i \vartheta_k}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \cdot \frac{\operatorname{sh} (n-j) \vartheta_k}{\operatorname{sh} n \vartheta_k} \right\rangle \cdot S^* & (i \leq j), \\ S \cdot \left\langle \frac{\operatorname{sh} j \vartheta_k}{\operatorname{sh} \vartheta_k} \cdot \frac{\operatorname{sh} (n-i) \vartheta_k}{\operatorname{sh} n \vartheta_k} \right\rangle \cdot S^* & (i \geq j). \end{cases}$$

Wenden wir hier die Regel der Multiplikation dreier Matrizen, dann erhalten wir für die gesuchten Elemente $g_{p,q}^{i,j}$ unmittelbar den Ausdruck (2.7).

Damit ergibt sich die Lösung der Gleichung (2.4) in der Form

$$U_{i,p} = \frac{h}{S} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{m-1} g_{p,q}^{(i,j)} \vartheta_{j,q}. \quad (2.12)$$

Die so errechnete Reziprokenmatrix G_p ist ein finites Analogon der Greenschen Funktion der Membrane, die wir »Greensche Matrix« nennen werden.

3. Biharmonische Gleichung: Biegung von Platten

Betrachten wir nun eine rechteckige, homogene isotrope Platte von konstanter Dicke mit den Seitenlängen a und b , auf die eine transversale gleichmäßig verteilte Belastung $v(x, y)$ wirkt. Die Platte soll auf allen vier Seiten gestützt sein. Die Gleichung der elastischen Fläche der Platte wird durch jene Lösung der inhomogenen biharmonischen Differentialgleichung

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{N} v(x, y) \quad (3.1)$$

bestimmt, die die Randbedingungen

$$w(0; y) = w(a; y) = w(x, 0) = w(x, b) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0 \quad (3.2)$$

erfüllt.⁴ Hier ist $N = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \cdot E\delta^3$, und darin E das Youngsche Modul, δ die Dicke der Platte, ν die Poissonsche Zahl. Die partielle Differentialgleichung (3.1) wird hier wieder mit einer Differenzgleichung angenähert. Wenn wir nun den durch die Formel

$$\begin{aligned} \Delta_h \Delta_h w_{i,p} = & \\ = 20 w_{ip} - 8 (w_{i-1,p} + w_{i+1,p} + w_{i,p-1} + w_{i,p+1}) + 2 (w_{i-1,p-1} + w_{i-1,p+1} + w_{i+1,p-1} + & \\ + w_{i+1,p+1}) + w_{i,p-2} + w_{i,p+2} + w_{i-2,p} + w_{i+2,p} & \end{aligned}$$

definierten »biharmonischen« Differenzenoperator $\Delta_h \Delta_h$ einführen, so haben wir die gewissen Randbedingungen genügende Lösung der inhomogenen biharmonischen Differenzgleichung

$$\Delta_h \Delta_h w_{i,p} = \frac{h^2}{N} v_{i,p} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; p = 1, 2, \dots, m-1) \quad (3.3)$$

zu bestimmen. Wir werden (3.3) wieder in der Form eines Gleichungssystems

$$\mathbf{B}^2 \mathbf{w} = \frac{1}{N} h^2 \cdot \mathbf{v} \quad (3.4)$$

aufschreiben, dessen \mathbf{B} unter (2.6) schon angegeben ist. Es ist klar, daß für die Inverse der erhaltenen Matrix \mathbf{B}^2 sich \mathbf{G}_p^2 ergibt, doch gestaltet sich die Berechnung der Elemente durch unmittelbare Matrizenmultiplikation langwierig und führt zu einem unübersichtlichen Ergebnis, weshalb es zweckmäßiger erscheint, sich folgender Methode zu bedienen.

Aus der Matrizenidentität⁵

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})^{-1} - \mathbf{B}^{-1} = \lambda (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

folgt die Relation

$$\left\{ \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \right\}_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \{ (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})^{-1} - \mathbf{B}^{-1} \} = \mathbf{B}^{-2} = \mathbf{G}_p^2.$$

Wollen wir diesen Zusammenhang auf die Matrix $[b_{ij}]$ des Ausdruckes (2.8) anwenden und führen wir zu diesem Zweck die Transformation $a + 2 - \lambda = = 2ch\varphi$ ein, dann erhalten wir für die Elemente λ_{ij} der charakteristischen Matrix

$$[\lambda_{i,j}] = [b_{i,j} - \delta_{i,j}]^{-1}$$

den Zusammenhang

$$c_{i,j} = \begin{cases} \frac{sh i \varphi}{sh \varphi} \cdot \frac{sh(n-j)\varphi}{sh n \varphi} & (i \leq j), \\ \frac{sh j \varphi}{sh \varphi} \cdot \frac{sh(n-i)\varphi}{sh n \varphi} & (i \geq j). \end{cases}$$

⁴ Siehe z. B. [1] S. 88—91.

⁵ Das ist ein finites Analogon der schon von D. HILBERT angegebenen Identität, die die Berechnung der iterierten Greenschen Funktion auf die Berechnung eines Differenzenquotienten zurückführt. (Siehe [5] S. 21.)

Die Elemente der Matrix $[h_{ij}] = [b_{i,j}]^{-1}$ ergeben sich aus der Berechnung der Ableitung dieses Zusammenhanges (wenn $\varphi = X$ ist); für $i \leq j$ erhalten wir

$$h_{i,j} = \frac{shiz \cdot sh(n-j)z}{2sh^2z \cdot shnz} \cdot \{ncth n z + cth z - icth iz - (n-j)cth(n-j)z\}. \quad (3.5)$$

(Ist $i > j$, dann wechseln i und j wegen der Symmetrie ihren Platz.) Hier ist $2chz = a + 2$.

Da die rechte Seite des Ausdruckes (3.5) eine rationale Funktion der skalaren Unbestimmten a ist, bleibt (3.5) auch dann noch gültig, wenn wir an Stelle von a die nichtsinguläre Matrix A setzen. Damit erhalten wir — wie im Abschnitt 2 — für $i \leq j$:

$$h_{p,q}^{(i,j)} = \frac{ab}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\sin \frac{pk\pi}{m} \cdot \sin \frac{qk\pi}{m}}{sh^2 \vartheta_k} \cdot \frac{shi\vartheta_k sh(n-j)\vartheta_k}{sh n \vartheta_k} \cdot \left\{ cth n \vartheta_k + \frac{1}{n} cth \vartheta_k - \frac{i}{n} cth i \vartheta_k - \left(1 - \frac{j}{n}\right) cth(n-j)\vartheta_k \right\}. \quad (3.6)$$

(Bei $i > j$ wechseln i und j infolge der Symmetrie den Platz.)

Damit ergibt sich die Lösung der Gleichung (3.4) in der Form

$$w_{i,p} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} h_{p,q}^{(i,j)}(m; n) \cdot v_{jq}. \quad (3.7)$$

4. Die Hauptabschätzung für Poissonsche Gleichung

Im folgenden wollen wir abschätzen wie groß die Abweichung der Elemente $g_{p,q}^{i,j}(m; n)$ der Greenschen Matrix $G_p(m; n)$ — wie unter (2.7) angegeben — und der Greenschen Funktion $G_p(x; y; \xi; \eta)$ des betrachteten Problems im entsprechenden Punkt, nämlich in

$$x = p \frac{a}{m}; \quad \xi = q \frac{a}{m}; \quad y = i \frac{b}{n}; \quad \eta = j \frac{b}{n} \quad (4.1)$$

sein kann. Es soll hierbei nicht mehr vorausgesetzt sein, daß b/a rational ist, vielmehr sollen bloß jene Zerspaltungen des Bereiches — d. h. nur solche Folgen $\{m_r\}$ bzw. $\{n_r\}$, ($r = 1, 2, \dots$) — berücksichtigt werden, für die eine Konstante C_1 sich so angeben läßt, daß

$$\left| \frac{m_r}{n_r} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{C_1}{m^2} \quad (r = 1, 2, \dots; m_r, n_r \rightarrow \infty, \text{ wenn } r \rightarrow \infty) \quad (4.2)$$

Gültigkeit hat.⁶

⁶ Für irrationale a/b s. z. B. ihre Kettenbruch-Folge! Mit C_1, C_2 usw. werden wir im folgenden von den laufenden Indexen m, n unabhängige Zahlen bezeichnen.

Die Greensche Funktion des betrachteten Problems ist bekannt (s. z. B. [6]):

$$G_p(x; y; \xi; \eta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{a} x \cdot \sin k \frac{\pi}{a} \xi \cdot \frac{sh k \frac{\pi}{a} y \cdot sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{k \cdot sh k \frac{\pi}{a} b} & (y < \eta) \\ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{a} x \cdot \sin k \frac{\pi}{a} \xi \cdot \frac{sh k \frac{\pi}{a} \eta \cdot sh k \frac{\pi}{a} (b - y)}{k \cdot sh k \frac{\pi}{a} b} & (y > \eta). \end{cases} \quad (4.3)$$

Um nun

$$\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n) = G_p\left(p \frac{a}{m}; i \frac{b}{n}; q \frac{a}{m}; j \frac{b}{n}\right) - g_{p;q}^{(i;j)}(m; n) \quad (4.4)$$

bei einem festgewählten $m = m_i$ abzuschätzen, betrachten wir vorerst

41. den Fall $\eta - y > \frac{1}{m_i} \left(= \frac{1}{m}\right)$. Wir betrachten zunächst nur eine von m abhängige Teilsumme von (4.3) und (2.7), bzw. ihre Differenz, nämlich

$$d_m = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \sin k \frac{\pi}{a} x \cdot \sin k \frac{\pi}{a} \xi \cdot \frac{sh k \frac{\pi}{a} y \cdot sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{k \cdot sh k \frac{\pi}{a} b} - \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \sin k \frac{\pi}{m} p \sin k \frac{\pi}{m} q \cdot \frac{sh i \vartheta_k \cdot sh (n - j) \vartheta_k}{sh \vartheta_k \cdot sh n \vartheta_k}, \quad (4.5)$$

in der $[\log m]$ die größte natürliche Zahl, kleiner oder gleich $\log m$ bedeutet. Um nun $|d_m|$ abzuschätzen, müssen wir uns vorerst ϑ_k bzw. $sh \vartheta_k$ für die in Frage kommenden, also für die hinsichtlich m relativ kleinen Werte von k genug pünktlich vorstellen. Wir haben dann

$$\vartheta_k = 2 \operatorname{arsh} \sin \frac{k\pi}{2m}. \quad (4.6)$$

Da hier

$$k \leq \frac{1}{2} m; \quad \frac{k\pi}{2m} < 1 \quad (4.7)$$

sicher Gültigkeit hat, so gelten hier (der Taylor-Entwicklung der betrachteten Funktionen gemäß) die Abschätzungen

$$z - \frac{z^3}{6} < \sin z < z \quad (0 < z < 1); \quad u - \frac{u^3}{6} < \operatorname{arsh} u < u \quad (0 < u < 1), \quad (4.8)$$

d. h.

$$\frac{k\pi}{m} - \frac{1}{3} \frac{k^3 \pi^3}{m^3} < \vartheta_k < \frac{k\pi}{m}. \quad (4.9)$$

d_m selbst soll in die fünf Teile zerspaltet werden, und zwar

$$d_m = a_m + \beta_m + \gamma_m + \delta_m + \varepsilon_m \quad (4.10)$$

$$a_m = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \frac{\operatorname{sh} i\vartheta_k \cdot \operatorname{sh} (n-j)\vartheta_k}{\operatorname{sh} n\vartheta_k} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{m} k \right)^{-1} - (\operatorname{sh} \vartheta_k)^{-1} \right], \quad (4.11)$$

$$\beta_m = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \frac{\operatorname{sh} (n-j)\vartheta_k}{k \cdot \operatorname{sh} n\vartheta_k} \cdot \left[\operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} y - \operatorname{sh} i\vartheta_k \right], \quad (4.12)$$

usw. und schließlich

$$\delta_m = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} y \cdot \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} (b - \eta) \cdot \left[\left(\operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} b \right)^{-1} - (\operatorname{sh} n\vartheta_k)^{-1} \right], \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_m = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \frac{\operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} y \cdot \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{k \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} b} \cdot \left[\sin k \frac{\pi}{a} x \cdot \sin k \frac{\pi}{a} \xi - \sin \frac{k\pi p}{m} \cdot \sin \frac{k\pi q}{m} \right]. \quad (4.14)$$

Um nun $|a_m|$ abzuschätzen, bemerken wir, daß für die hinsichtlich der Summierung in Frage kommenden Wert von k die Ungleichung $0 < \vartheta_k \ll 1$ gilt, daß

man also hier die Taylor-Entwicklung von $sh v$ von $\frac{v^3}{6!}$ an durch eine geometrische Reihe

$$sh v < v + \frac{20}{19} \frac{v^3}{6}, \quad (0 < v < 1) \tag{4.15}$$

majorisieren kann. Es soll noch die Abschätzung von ϑ_k unter (4.10) beachtet werden; damit wird

$$0 < \frac{k\pi}{m} - \frac{1}{3} \frac{k^3 \pi^3}{m^3} < \vartheta_k < sh \vartheta_k < \frac{k\pi}{m} + \frac{20}{19} \frac{k^3 \pi^3}{6m^3} \tag{4.16}$$

bzw.

$$\left| \left(\frac{k\pi}{m} \right)^{-1} - (sh \vartheta_k)^{-1} \right| < \left| \left(\frac{k\pi}{m} \right)^{-1} - \left(\frac{k\pi}{m} - \frac{1}{3} \frac{k^3 \pi^3}{m^3} \right)^{-1} \right| < \frac{3}{2} \frac{k\pi}{m}. \tag{4.17}$$

Man braucht noch eine obere Schranke für $\left| \frac{1}{sh n \vartheta_k} \cdot sh i \vartheta_k \cdot sh (n-j) \vartheta_k \right|$ wobei man beachten muß, daß wegen der Voraussetzung $y < \eta$ natürlich auch $i < j$ richtig ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{sh n \vartheta_k} sh i \vartheta_k sh (n-j) \vartheta_k \right| &= \left| \frac{1}{sh n \vartheta_k} ch i \vartheta_k sh (n-j) \vartheta_k th i \vartheta_k \right| < \\ &< 2 \frac{1}{2} \left| \frac{sh [n - (j-i)] \vartheta_k}{sh n \vartheta_k} \right| < 1, \end{aligned} \tag{4.18}$$

da $j + i < 2n$ auch gültig sein soll. Aus (4.19) und (4.20) folgt die Abschätzung

$$|a_m| < \frac{2}{m} \cdot \sum_{k=1}^{2[\log m]} \frac{3}{2} \frac{k\pi}{m} = \frac{3}{m^2} \sum_{k=1}^{2[\log m]} k \leq 7 \frac{\log^2 m}{m^2}. \tag{4.19}$$

Will man nun β_m betrachten, dann hat man, um $\left| sh k \frac{\pi}{a} y - sh i \vartheta_k \right|$ abzuschätzen, zu beachten, daß dem Mittelwertsatzes gemäß

$$\left| sh k \frac{\pi}{a} y - sh i \vartheta_k \right| = \left| k \frac{\pi}{a} y - i \vartheta_k \right| \cdot ch \Theta_k^{(i)} \tag{4.20}$$

mit $0 < i \vartheta_k < \Theta_k^{(i)} < k \frac{\pi}{a} y = \frac{ik\pi}{n} \cdot \frac{b}{a}$. Im Sinne von (4.10) wird (da auch

$k \leq 2$ [log m] gültig ist)

$$\begin{aligned} \left| k \frac{\pi}{a} y - i \vartheta_k \right| &= \left| k \frac{i\pi}{n} \frac{b}{a} - i \vartheta_k \right| \leq \left| k \frac{i\pi}{m} - ki \frac{\pi}{n} \cdot \frac{b}{a} \right| + \\ &+ \left| \frac{ik\pi}{m} - \left(\frac{ik\pi}{m} - \frac{1}{3} \cdot \frac{ik^3 \pi^3}{m^3} \right) \right| < \frac{ik\pi}{m} \frac{b}{a} C_1 \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{ik^3 \pi^3}{m^3} < \\ &< C_2 \frac{i}{m} \frac{k^3}{m^2} \leq C_3 \cdot \frac{k^3}{m^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Für $\left| \frac{1}{sh n \vartheta_k} \cdot sh(n-j) \vartheta_k ch \Theta_k^{(i)} \right|$ bekommen wir dieselbe Abschätzung wie früher, da $ch i \vartheta_k < ch \Theta_k^{(i)} < ch(i+1) \vartheta_k$ ist. Damit ist auch

$$|\beta_m| < C_4 \cdot \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \frac{1}{k} \cdot k^3 \leq C_5 \frac{\log^3 m}{m^2} \quad (4.22)$$

gültig. Für $|\gamma_m|$ resultiert natürlich eine ähnliche Abschätzung; die Differenz im Gedankengang besteht nur darin, daß anstatt i in den Formeln ja $(n-j)$ eine Rolle spielt, und daß man anstatt (4.27) den Bruch

$$\left| \frac{1}{sh n \vartheta_k} \cdot sh k \frac{\pi}{a} y \cdot ch(n-j+1) \vartheta_k \right|$$

abschätzen muß, der aber < 2 ist, da $\left| sh k \frac{\pi}{a} y \right| < |sh(i+1) \vartheta_k|$ und damit auch

$$|\gamma_m| \leq C_6 \frac{\log^3 m}{m^2} \quad (4.23)$$

Gültigkeit hat.

Die Abschätzung von δ_m verursacht nun schon keine Schwierigkeit, denn es gilt

$$\left| (sh n \vartheta_k)^{-1} - \left(sh k \frac{\pi}{a} b \right)^{-1} \right| = \left| sh k \vartheta_k - sh k \frac{\pi}{a} b \right| \cdot \left(sh n \vartheta_k \cdot sh k \frac{\pi}{a} b \right)^{-1}; \quad (4.24)$$

$$\left| sh n \vartheta_k - sh k \frac{\pi}{a} b \right| = \left| n \vartheta_k - k \frac{\pi}{a} b \right| \cdot ch \Theta_k^{[n]}, \quad (4.25)$$

wo also $\Theta_k^{(n)}$ zwischen $n \vartheta_k$ und $k\pi \frac{b}{a}$ liegt. Den Formeln (4.1), (4.2) bzw. (4.9)

gemäß folgt nun, daß

$$\begin{aligned} \left| n\vartheta_k - k\pi \frac{b}{a} \right| &\leq \left| n\vartheta_k - n \frac{k\pi}{m} \right| + \left| n \frac{k\pi}{m} - k\pi \frac{b}{a} \right| \leq \\ &\leq n \frac{1}{3} \frac{k^3 \pi^3}{m^3} + C_1 \frac{k}{m^3} \end{aligned} \tag{4.26}$$

und daraus weiter, daß

$$\frac{sh k \frac{\pi}{a} y ch \Theta_k^{(n)}}{sh n\vartheta_k ch k \frac{\pi}{a} y} < 2 \frac{sh \left[k \frac{\pi}{a} y + \Theta_k^{(n)} \right]}{sh \left[k \frac{\pi}{a} y + n\vartheta_k \right]} < 3 \quad (k \leq 2 \log m) \tag{4.27}$$

daß also

$$\left| \frac{sh k \frac{\pi}{a} y sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta) ch \Theta_k^{(n)}}{sh n\vartheta_k sh k \frac{\pi}{a} b} \right| < 3 \left| \frac{ch k \frac{\pi}{a} y \cdot sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{sh k \frac{\pi}{a} b} \right| \leq 3.1 \tag{4.28}$$

gültig ist, da $\eta > y$ und $\eta + y \leq 2b$. Damit haben wir also die Abschätzung

$$|\delta_m| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2[\log m]} 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{k} \left\{ \frac{n}{3m} \frac{k^3 \pi^3}{m^2} + n C_1 \frac{k}{m^3} \right\} \leq C_7 \cdot \frac{\log^3 m}{m^2} \tag{4.29}$$

Aus (4.1) bzw. aus (4.14) folgt weiter, daß $\varepsilon_m \equiv 0$, daß also

$$|d_m| \leq C_8 \frac{\log^3 m}{m^2} \tag{4.30}$$

Betrachten wir nun einen anderen Teil von $\Delta_{p,q}^{(i,j)}(m; n)$, nämlich

$$d_m^{(l)} = \alpha_m^{(l)} + \mu_m^{(l)} + \varepsilon_m^{(l)}, \tag{4.31}$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha_m^{(l)} = \frac{2}{m} \sum_{k=2[\log m]+1}^{3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta-y} \right]} \sin p \frac{k\pi}{m} \cdot \sin q \frac{k\pi}{m} \cdot \frac{sh i\vartheta_k sh (n-j)\vartheta_k}{sh n\vartheta_k} \cdot \\ \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k}{m} \right)^{-1} - (sh \vartheta_k)^{-1} \right], \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\mu_m^{(j)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta-y} \right] + 1} \sin pk \frac{\pi}{m} \sin qk \frac{\pi}{m} \cdot \frac{1}{k} \quad (4.33)$$

$$\left[\frac{\operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} y \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} (b-\eta)}{\operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} b} - \frac{\operatorname{sh} i \vartheta_k \cdot \operatorname{sh} (n-j) \vartheta_k}{\operatorname{sh} n \vartheta_k} \right],$$

$$\varepsilon_m^{(j)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta-y} \right] + 1} \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} y \cdot \frac{\operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} (b-\eta)}{k \cdot \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} b} \quad (4.34)$$

$$\cdot \left[\sin k \frac{\pi}{a} x \sin k \frac{\pi}{a} \xi - \sin \frac{k\pi p}{m} \sin \frac{k\pi q}{m} \right].$$

Alle drei Glieder von $d_m^{(j)}$ sollen nun nach denselben Überlegungen abgeschätzt werden wie früher. Für a_m^1 braucht man nichts zu wiederholen:

$$|a_m^{(j)}| \leq C_9 \frac{1}{m^2} \sum_{k=2}^{3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta-y} \right] + 1} k \leq C_{10} \frac{\log^2 m}{m^2 (\eta-y)^2} \quad (4.35)$$

Für $\mu_m^{(j)}$ ist zunächst $\left| \frac{\operatorname{sh} i \vartheta_k \operatorname{sh} (n-j) \vartheta_k}{\operatorname{sh} n \vartheta_k} - \frac{\operatorname{sh} i \frac{k\pi}{m} \operatorname{sh} (n-j) \frac{k\pi}{m}}{\operatorname{sh} n \frac{k\pi}{m}} \right| = D_m^{(k)}$ abzu-

schätzen, was wieder mit Hilfe des Mittelwertsatzes geschieht. Es gilt also

$$D_m^{(k)} \leq \left| \vartheta_k - \frac{k\pi}{m} \right| \cdot \left| \frac{d}{dz} \frac{\operatorname{sh} iz \cdot \operatorname{sh} (n-j) z}{\operatorname{sh} nz} \right|_{z=\zeta_k}; \quad \left(\vartheta_k < \zeta_k < k \frac{\pi}{m} \right). \quad (4.36)$$

Um nun hier den zweiten Faktor schätzen zu können, sei vorerst bemerkt, daß hier $k \geq 2 \log m$, und somit

$$n \zeta_k \geq C_{11} \log m, \quad \operatorname{sh} n \zeta_k > C_{12} m \quad (4.37)$$

gültig ist. Um nun zu beweisen, daß

$$\left| \frac{d}{dz} \frac{\operatorname{sh} iz \operatorname{sh} (n-j) z}{\operatorname{sh} nz} \right|_{\zeta_k} \leq 2 \left| \frac{d}{dz} e^{-(j-i)z} \right|_{\zeta_k} + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad (4.38)$$

zu Recht besteht. Es sei anstatt $sh\,nz$ zunächst $\frac{1}{2} \exp(nz)$ gesetzt, woraus

$$\begin{aligned} \left| \Delta = \left| \frac{d}{dz} \frac{sh\,iz\,sh(n-j)z}{sh\,nz} \right|_{\zeta_k} - \left| \frac{d}{dz} \frac{sh\,iz\,sh(n-j)z}{\frac{1}{2} \exp(nz)} \right|_{\zeta_k} \right| &\leq \\ \leq \left| \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{1}{2} \exp(nz) + \Delta(z) \right)^{-1} - \left(\frac{1}{2} \exp(nz) \right)^{-1} \right] \cdot [sh\,iz\,sh(n-j)z] \right|_{\zeta_k} &= \\ = \left| \frac{d}{dz} \left[\frac{sh\,iz\,sh(n-j)z}{sh\,nz} \cdot \frac{\Delta(z)}{\frac{1}{2} \exp(nz)} \right] \right|_{\zeta_k} &\quad (4.39) \end{aligned}$$

mit $\Delta z = -\frac{1}{2} \exp(-nz)$ ist. Es gilt also weiter

$$\begin{aligned} \Delta \leq \left| \frac{d}{dz} \frac{sh\,iz\,sh(n-j)z}{sh\,nz} \right|_{\zeta_k} \cdot \frac{\Delta(\zeta_k)}{\frac{1}{2} e^{n\zeta_k}} + \\ + \frac{sh\,i\zeta_k\,sh(n-j)\zeta_k}{sh\,n\zeta_k} \left(\frac{|\Delta'(\zeta_k)|}{\frac{1}{2} \exp(n\zeta_k)} + \frac{\Delta(\zeta_k)}{\frac{1}{2} \exp^2(n\zeta_k)} \cdot n \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Eine unmittelbare und sehr grobe Schätzung anhand (4.37) zeigt nun, daß

$$\left| \frac{d}{dz} \frac{sh\,iz\,sh(n-j)z}{sh\,nz} \right|_{\zeta_k} \leq C_{13} m; \quad \left| \frac{sh\,i\zeta_k\,sh(n-j)\zeta_k}{sh\,n\zeta_k} \right| \leq 1 \quad (4.41)$$

$$|\Delta(\zeta_k)| \leq \frac{C_{14}}{m}; \quad |\Delta'(\zeta_k)| \leq 1; \quad \exp(n\zeta_k) \geq C_{15} \cdot m; \quad \Delta < C_{16} \frac{1}{m} = O\left(\frac{1}{m}\right) \quad (4.42)$$

also auch (4.38) gültig ist. Für $f^*(z_0) \geq f(z_0) > 0$; $g(z_0) > 0$ und $f''(z_0) \geq g'(z_0) > 0$ besteht ferner auch

$$\frac{d}{dz} [f^*(z) \cdot g(z)]|_{z_0} \geq \frac{d}{dz} [f(z) \cdot g(z)]|_{z_0} \quad (4.43)$$

zu Recht. Wendet man (4.43) beim zweiten Glied von Δ an, so folgt, daß

$$\left| \frac{d}{dz} \frac{sh\,iz\,sh(n-j)z}{\frac{1}{2} \exp(nz)} \right|_{\zeta_k} \leq \left| \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} \cdot e^{(n-j)z}}{\frac{1}{2} \exp(nz)} \right|_{\zeta_k} = 2(j-i) \cdot \exp[-(j-i)\zeta_k] \quad (4.44)$$

ebenfalls Gültigkeit hat. Es sei noch bemerkt, daß

$$\frac{1}{n} (j - i) = \eta - y; \quad \zeta_k \simeq k \frac{\pi}{m} = k \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n}{m} \simeq k \frac{\pi}{n} \frac{b}{a} \quad (4.45)$$

und schließlich, daß für $2 \lfloor \log m \rfloor < k \leq 3 \frac{a}{\pi} \left\lfloor \frac{\log m}{\eta - y} \right\rfloor$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} D_m^{(k)} &\leq C_{17} \frac{k^3 \pi^3}{m^3} \left\{ 2 (\eta - y) n e^{-k(\eta - y) \frac{b}{a}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \right\} \leq \\ &\leq C_{18} \left\{ \frac{k^3}{m^2} (\eta - y) e^{-k \frac{b}{a} (\eta - y)} + \frac{k^3}{m^4} \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

gilt. Mit Hilfe von (4.46) läßt sich aber $\mu_m^{(l)}$ leicht abschätzen, u. zw. zu

$$\begin{aligned} \mu_m^{(l)} &\leq C_{19} \frac{(\eta - y)}{m^2} \cdot \sum_{k=2\lfloor \log m \rfloor + 1}^{3 \frac{a}{\pi} \left\lfloor \frac{\log m}{\eta - y} \right\rfloor} \exp \left[-k \frac{b}{a} (\eta - y) \right] \cdot k^2 \leq \\ &\leq C_{20} \frac{\log^3 m}{m^2 (\eta - y)^2} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$\varepsilon_m^{(l)}$ ist schließlich — und natürlich — wieder gleich 0, und somit im Sinne von (4.31), (4.35) bzw. (4.47)

$$d_m^{(l)} \leq C_{21} \frac{\log^3 m}{m^2 \cdot (\eta - y)^2} \quad (4.48)$$

Um nun $\Delta_{p,q}^{i,j}(m; n)$ — wie unter (4.4) angegeben — abzuschätzen, muß man auch für die Reste

$$r_m = \frac{2}{\pi} \sum_{k=3 \frac{a}{\pi} \left\lfloor \frac{\log m}{\eta - y} \right\rfloor + 1}^{m-1} \sin pk \frac{\pi}{m} \cdot \sin qk \frac{\pi}{m} \cdot \frac{\operatorname{sh} i \vartheta_k \cdot \operatorname{sh} (n - j) \vartheta_k}{\operatorname{sh} \vartheta_k \operatorname{sh} n \vartheta_k}, \quad (4.49)$$

bzw.

$$q_m = \frac{2}{\pi} \sum_{l=3 \frac{a}{\pi} \left\lfloor \frac{\log m}{\eta - y} \right\rfloor}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{a} x \cdot \sin k \frac{\pi}{a} \xi \cdot \frac{\operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} y \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{k \operatorname{sh} k \frac{\pi}{a} b} \quad (4.50)$$

eine obere Schranke angeben. Hierzu sei aber vorerst bemerkt, daß die Konvexität von $sh x$ für $x \geq 0$ gemäß $sh a sh \beta \leq sh^2 \frac{a + \beta}{2}$ für $a \geq 0$ und $\beta \geq 0$ gültig ist ($1 \leq ch(a - \beta) = ch a ch \beta - sh a sh \beta$; $sh a sh \beta < ch a ch \beta - 1$; $sh a sh \beta < \frac{1}{2} sh a sh \beta + \frac{1}{2} [-1 + ch a ch \beta]$). Es gilt daneben natürlich für $0 < \varepsilon < \gamma$ auch die Abschätzung $\frac{sh(\gamma - \varepsilon)}{sh \gamma} < e^{-\varepsilon}$.

Benützt man diese Ungleichungen, so folgt

$$\frac{sh i \vartheta_k sh(n-j) \vartheta_k}{sh n \vartheta_k} < \frac{1}{2} \frac{sh^2 \frac{n - (j-i)}{2} \vartheta_k}{sh^2 \frac{n}{2} \vartheta_k} \leq \frac{1}{2} e^{-(j-i)\vartheta_k} \leq \frac{1}{2} C_{22} e^{-\frac{11}{12}(\eta-y) \frac{\pi}{a} k} \tag{4.51}$$

und ebenso

$$\frac{sh k \frac{\pi}{a} y sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{sh k \frac{\pi}{a} b} \leq \frac{1}{2} C_{22} e^{-(\eta-y) \frac{\pi}{a} k} \tag{4.52}$$

Es sei noch bemerkt, daß für $t > 0$ und $M_1 = 3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta - y} \right] + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=M_1}^{\infty} \frac{e^{-kt}}{k} &= \sum_{k=M_1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \leq x^{M_1} \cdot \sum_{k=M_1}^{\infty} \frac{x^{k-M_1}}{1-x} \leq \\ &\leq \frac{1}{1-e^{-t}} \frac{\eta-y}{\log m} \frac{\pi}{3a} e^{-3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta-y} \right] t} \end{aligned} \tag{4.53}$$

gilt, wie aus der Abelsche Umordnung hervorgeht. Es wird also

$$|r_m| \leq \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{2} C_{22} \frac{1}{1 - e^{-(\eta-y) \frac{\pi}{a}}} e^{-3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta-y} \right] (\eta-y) \frac{11}{12}} \leq C_{23} \frac{1}{m^3 (\eta-y)} \tag{4.54}$$

und

$$\begin{aligned} |q_m| &\leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(\eta-y) \frac{\pi}{a}}} \cdot \frac{\eta-y}{\log m} \cdot \frac{\pi}{3a} e^{-3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta-y} \right] (\eta-y) \frac{\pi}{a}} \leq \\ &\leq C_{24} \frac{1}{m^3 \log m}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

da

$$\frac{(\eta - y) \frac{\pi}{a}}{1 - e^{-(\eta - y) \frac{\pi}{a}}} < C_{25}; \quad \frac{1}{1 - e^{-(\eta - y) \frac{\pi}{a}}} < \frac{C_{25}}{(\eta - y) \frac{\pi}{a}} \quad (4.56)$$

für $0 < \eta - y \leq b$. Für $\eta - y > \frac{1}{m}$ gilt daher die Abschätzung

$$|\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n)| \leq |d_m| + |d_m^{(l)}| + |r_m| + |q_m| \leq \frac{C_{26} \log^3 m}{m^2 \cdot (\eta - y)^2}. \quad (4.57)$$

Betrachten wir nun näher

42. den Fall $\eta = y$. Nachdem in Abschnitt 2 hinsichtlich der Variablen x und y bzw. der Indizes p und i sowie q und j alles symmetrisch war, nachdem wir mithin eine willkürliche Unterscheidung für m gegen n machten, könnten wir all diese Formeln auch durch Tauschen der Rolle von x und y , bzw. p und i , bzw. q und j — also in entgegengesetzter Form, aber ohne Änderung der Werte — angeben. Daraus folgt aber ohne weiteren Beweis, daß auch die Abschätzung

$$|\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n)| \leq C_{27} \frac{\log^3 m}{m^2 (\xi - x)^2} \quad \left(\frac{1}{m} < \xi - x \right) \quad (4.58)$$

gültig ist.⁷

Aus den Symmetrieeigenschaften folgt ferner unmittelbar, daß die Formeln (4.57) bzw. (4.58) auch für $\eta - y < -\frac{1}{m}$ bzw. $\xi - x < -\frac{1}{m}$ d. h. für $|\eta - y| > \frac{1}{m}$ bzw. für $|\xi - x| > \frac{1}{m}$ Gültigkeit haben. Man kann also beiden in die Formel

$$|\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n)| \leq C_{28} \frac{\log^3 m}{m^2 \delta^2} \quad \left(\delta > \frac{1}{m} \right) \quad (4.59)$$

mit $\delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ zusammenfassen. Für $\delta \leq \frac{2}{m}$ benützen wir die trivialen Ungleichungen

$$|\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n)| \leq \Sigma \frac{1}{k} \leq C_{29} \log m; |G_p(x; y; \xi; \eta)| \leq C_{30} \{ |\log \delta| + 1 \}. \quad (4.60)$$

⁷ Es sei bemerkt, daß obige Abschätzungen auch direkt, aus der Formel (4.3) bzw. (4.4) hergeleitet werden können, doch nicht ohne Mühe. Die Schätzung von $|d_m|$ ist auch jetzt gültig, $|d_m^{(l)}|$, $|q_m|$ und $|r_m|$ müssen wir hingegen jetzt durch eine Abelsche Umordnung abschätzen.

5. Hauptabschätzung für die biharmonische Gleichung

Wir werden nun die Abweichung der Elemente $h_{p;q}^{(i;j)}(m; n)$ der Greenschen Matrix des biharmonischen Problems, wie unter (3.6) angegeben, und der Greenschen Funktion im entsprechenden Punkt abschätzen. Hierbei gehen wir von denselben Voraussetzungen aus und folgen den gleichen Bezeichnungen und Gedankengängen wie im vorangegangenen Abschnitt. Die Greensche Funktion des betrachteten Problems hat folgende Form (für $y \leq \eta$; für $y > \eta$ sind y und η zu tauschen):

$$G_B(x; y; \xi; \eta) = \frac{ab}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{a} x \cdot \sin k \frac{\pi}{a} \xi \frac{sh k \frac{\pi}{a} y sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{k^2 sh k \frac{\pi}{a} b} \cdot \left\{ \frac{a}{k\pi b} + cth \frac{k\pi b}{a} - \frac{y}{b} cth \frac{k\pi y}{b} - \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) cth k \frac{\pi}{a} (b - \eta) \right\}. \tag{5.1}$$

Wir schätzen jetzt wieder

$$\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n) = G_B \left(p \frac{a}{m}; i \frac{b}{n}; q \frac{a}{m}; j \frac{b}{n} \right) - h_{p;q}^{(i;j)}(m; n) \tag{5.2}$$

für ein festgewählte $m = m_i$ ab.

51. *Der Fall* $\eta - y > \frac{1}{m}$. Es sei wieder d_m eine Teilsumme — bis $k = 2 [\log m] = M_1$ — von $\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n)$, und zwar

$$d_m = A_m + B_m + C_m + D_m \tag{5.3}$$

mit

$$A_m = \sum_{k=1}^{M_1} S_{m;k} cth n \vartheta_k - \sum_{k=1}^{M_1} I_{m;k} cth k \frac{\pi}{a} b, \tag{5.4}$$

$$B_m = \sum_{k=1}^{M_1} \frac{1}{n} S_{m;k} cth \vartheta_k - \sum_{k=1}^{M_1} I_{m;k} \frac{a}{k\pi b}. \tag{5.5}$$

$$C_m = - \sum_{k=1}^{M_1} \frac{1}{n} S_{m;k} i cth i \vartheta_k + \sum_{k=1}^{M_1} \frac{y}{b} I_{m;k} cth k \frac{\pi}{a} b, \tag{5.6}$$

$$D_m = - \sum_{k=1}^{M_1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) S_{m;k} cth (n - j) \vartheta_k + \sum_{k=1}^{M_1} \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) cth \frac{k\pi}{a} (b - \eta) I_{m;k}, \tag{5.7}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$S_{m:k} = \frac{ab}{m^2} \sin \frac{pk\pi}{m} \cdot \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \frac{\text{sh } i\vartheta_k \cdot \text{sh } (n-j)\vartheta_k}{\text{sh}^2 \vartheta_k \cdot \text{sh } n\vartheta_k} \quad (5.8)$$

bzw.

$$I_{m:k} = \frac{ab}{\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{a} \cdot \sin \frac{k\pi \xi}{a} \cdot \frac{\text{sh } \frac{k\pi y}{a} \text{sh } \frac{k\pi}{a} (b-\eta)}{k^2 \cdot \text{sh } k \frac{\pi}{a} b} \quad (5.9)$$

benützen. Die Glieder von d_m bereiten wir durch weitere Zerspaltung zur Schätzung vor

$$A_m = \sum_{k=1}^{M_1} (S_{m:k} - I_{m:k}) \text{cth } n\vartheta_k + \sum_{k=1}^{M_1} I_{m:k} \left(\text{cth } n\vartheta_k - \text{cth } \frac{k\pi b}{a} \right), \quad (5.10)$$

$$B_m = \sum_{k=1}^{M_1} (S_{m:k} - I_{m:k}) \frac{\text{cth } \vartheta_k}{n} + \sum_{k=1}^{M_1} I_{m:k} \left(\frac{\text{cth } \vartheta_k}{n} - \frac{a}{h\pi b} \right), \quad (5.11)$$

$$C_m = \sum_{k=1}^{M_1} (I_{m:k} - S_{m:k}) \frac{i}{n} \text{cth } i\vartheta_k - \sum_{k=1}^{M_1} I_{m:k} \left(\frac{i}{n} \text{cth } i\vartheta_k - \frac{y}{b} \text{cth } k \frac{\pi}{a} b \right), \quad (5.12)$$

$$D_m = \sum_{k=1}^{M_1} (I_{m:k} - S_{m:k}) \left(1 - \frac{j}{n} \right) \text{cth } (n-j)\vartheta_k - \sum_{k=1}^{M_1} \left[\left(1 - \frac{j}{n} \right) \text{cth } (n-j)\vartheta_k - \left(1 - \frac{\eta}{b} \right) \text{cth } k \frac{\pi}{a} (b-\eta) \right] I_{m:k}. \quad (5.13)$$

Die erste Glieder dieser Summen sollen nun ebenso wie in Abschnitt 4 abgeschätzt werden, u. zw.

$$\begin{aligned} S_{m:k} - I_{m:k} &= \frac{ab}{m^2} \sin \frac{kp\pi}{m} \cdot \sin \frac{\text{sh } i\vartheta_k \cdot \text{sh } (n-j)\vartheta_k}{\text{sh}^2 \vartheta_k \cdot \text{sh } n\vartheta_k} - \\ &- \frac{ab}{\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{a} \cdot \sin \frac{k\pi \xi}{a} \cdot \frac{\text{sh } \frac{k\pi y}{a} \cdot \text{sh } \frac{k\pi}{a} (b-\eta)}{k^2 \text{sh } \frac{k\pi}{a} b} = \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$= \alpha_m^* + \beta_m^* + \gamma_m^* + \delta_m^* + \varepsilon_m^*$$

wo also

$$\alpha_m^* = \sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \frac{sh i \vartheta_k \cdot sh (n-j) \vartheta_k}{sh n \vartheta_k} \cdot \left[\frac{ab}{m^2} \frac{1}{sh^2 \vartheta_k} - \frac{ab}{\pi^2} \frac{1}{k^2} \right], \quad (5.15)$$

$$\beta_m^* = \sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \frac{sh (n-j) \vartheta_k}{k^2 sh n \vartheta_k} \left[sh i \vartheta_k - sh k \frac{a}{\pi} y \right] \cdot \frac{ab}{\pi^2}, \quad (5.16)$$

$$\gamma_m^* = \sin \frac{pk\pi}{m} \cdot \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{ab sh k \frac{\pi}{a} y}{\pi^2 sh n \vartheta_k} \cdot \left[sh (n-j) \vartheta_k - sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta) \right], \quad (5.17)$$

usf.,

$$\varepsilon_m^* = \frac{ab}{\pi^2} \cdot \frac{sh k \frac{\pi}{a} y sh k \frac{\pi}{a} (b - \eta)}{k^2 \cdot sh k \frac{\pi}{a} b} \cdot \left(\sin \frac{pk\pi}{m} \sin \frac{qk\pi}{m} - \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi \xi}{a} \right). \quad (5.18)$$

Die Methoden zur Abschätzung dieser Größen haben wir im Abschnitt 4 bereits angegeben, wir schreiben mithin kurz

$$\begin{aligned} |\alpha_m^*| &\leq \frac{ab}{m^2} \left| sh^{-2} \vartheta_k - \left(\frac{k\pi}{m} \right)^{-2} \right| < \frac{ab}{m^2} \left| \left(\frac{k\pi}{m} \right)^{-2} - \left(\frac{k\pi}{m} - \frac{1}{3} \frac{k^3 \pi^3}{m^3} \right)^{-2} \right| \leq \\ &\leq C_1 \cdot \frac{1}{m^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ebenso auf Grund der Gleichungen (4.20)–(4.21) und (4.22)

$$|\beta_m^*| \leq C_2 \cdot \frac{ik}{m^3} \cdot \frac{1}{k^2} + C_3 \frac{k^3}{m^2} \cdot \frac{1}{k^2} \leq C_4 \frac{1}{m^2}, \quad (5.20)$$

bzw.

$$|\gamma_m^*| \leq C_5 \cdot \frac{k}{m^2}, \quad (5.21)$$

und schließlich anhand von (4.24), (4.25–26) und (4.28)

$$|\delta_m^*| \leq C_6 \frac{n}{m} \frac{k^3}{m^2} \cdot \frac{1}{k^2} + C_7 \frac{n}{m} \frac{k}{m^2} \cdot \frac{1}{k^2} \leq C_8 \frac{k}{m^2}. \quad (5.22)$$

$|\varepsilon_m^*|$ ist natürlich wieder gleich 0.

Es sei noch bemerkt, daß

$$\operatorname{cth} n\vartheta_k \leq \operatorname{cth} n \frac{1 + C_9}{m} \leq \operatorname{cth} \frac{b}{a} = C_{10}, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{n} \operatorname{cth} \vartheta_k = \frac{1}{n} \frac{\operatorname{ch} \vartheta_k}{\operatorname{sh} \vartheta_k} < \frac{1}{n} \frac{2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{m}} \leq 2 \frac{b}{a} = C_{11}, \quad (5.24)$$

$$\frac{i}{n} \operatorname{cth} i\vartheta_k = \frac{i}{n} \frac{\operatorname{ch} i\vartheta_k}{\operatorname{sh} i\vartheta_k} \leq \frac{i}{n} \frac{\operatorname{ch} i\vartheta_1}{\operatorname{sh} i\vartheta_1} \leq \frac{i}{n} \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{a}}{i \frac{\pi}{2m}} \leq 4 \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{b}{a} = C_{12}, \quad (5.25)$$

und daß schließlich

$$\left(1 - \frac{j}{n}\right) \operatorname{cth} (n-j)\vartheta_k = \frac{1}{n} (n-j) \operatorname{cth} (n-j)\vartheta_k \leq C_{12}, \quad (5.26)$$

für $1 \leq k \leq m-1$ gültig ist.

Mit Hilfe der Ungleichungen (5.19)–(5.26) lassen sich nunmehr die ersten Glieder von (5.10), (5.11) usw. abschätzen. Um auch die zweiten abschätzen zu können, bemerken wir noch, daß gemäß (4.28)

$$I_{m;k} \leq C_{13} \cdot \frac{1}{k^2},$$

daß weiters im Sinne des Mittelwertsatzes

$$\left| \operatorname{cth} n\vartheta_k - \operatorname{cth} k \frac{\pi b}{a} \right| = \operatorname{sh}^{-2} \Theta_k \cdot \left| n\vartheta_k - \frac{k\pi b}{a} \right|; \quad \left(n\vartheta_k < \Theta_k < \frac{k\pi b}{a} \right) \quad (5.27)$$

d. h. daß

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{cth} n\vartheta_k - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \right| &\leq \left[\frac{1}{\sqrt{2}} k\pi \frac{b}{a} \right]^{-2} \cdot \left[\left| n\vartheta_k - n \frac{k\pi}{m} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{n}{m} - \frac{b}{a} \right| k\pi \right] \leq C_{14} \frac{k}{m^2}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

(weil $\operatorname{sh} \Theta_k > \Theta_k$). Um nun auch B_m abzuschätzen, sei zunächst bemerkt, daß wegen

$$\frac{d}{dx} x \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x = \frac{d}{dx} \operatorname{sh} x + x \operatorname{sh} x > \frac{d}{dx} \operatorname{sh} x \quad (x > 0)$$

auch $x \operatorname{ch} x > \operatorname{sh} x$ für $x > 0$ gültig ist, weiters, daß

$$\begin{aligned} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x &= \frac{x^3}{2!} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{x^5}{4!} \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \dots < \\ &< \frac{x^3}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r}}{12^r} \leq 3x^3 \quad (0 \leq x \leq \sqrt{10}) \end{aligned}$$

und daß schließlich

$$0 < \frac{k\pi}{m} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{m} - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{m} < 3 \frac{k^3 \pi^3}{m^3} \quad (1 \leq k \leq m-1) \quad (5.29)$$

zu Recht besteht. Hieraus aber folgt, daß

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \operatorname{cth} \vartheta_k - \frac{a}{k\pi b} \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \operatorname{cth} \vartheta_k - \frac{1}{n} \operatorname{cth} \frac{k\pi}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \operatorname{cth} \frac{k\pi}{m} - \frac{1}{n} \cdot \frac{m}{k\pi} \right| + \\ &+ \left| \frac{m}{n} \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{k\pi} \frac{a}{b} \right| \leq \frac{1}{n} \operatorname{sh}^{-2} \Theta_k \cdot \left| \vartheta_k - \frac{k\pi}{m} \right| + \frac{1}{n} \cdot \\ &\cdot \frac{\left| \frac{k\pi}{m} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{m} - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{m} \right|}{\frac{k\pi}{m} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{m}} + \frac{1}{k} C_{15} \frac{1}{m^2} \leq C_{16} \frac{k}{m^2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ebenso ist dem Mittelwertsatz gemäß

$$\left| \frac{i}{n} \operatorname{cth} i\vartheta_k - \frac{y}{b} \operatorname{cth} k \frac{\pi}{a} y \right| \leq \frac{i}{n} \operatorname{sh}^{-2} i\Theta_k \cdot \frac{k^3 \pi^3 i}{3m^3} + \frac{i}{n} \cdot \frac{k\pi}{\operatorname{sh}^2 \zeta_k} \left| \frac{n}{m} - \frac{a}{b} \right|,$$

wo ζ_k zwischen $k\pi \cdot \frac{i}{m}$ und $k\pi \cdot \frac{i}{n} \cdot \frac{b}{a}$ liegt. Sonach gilt

$$\left| \frac{i}{n} \operatorname{cth} i\vartheta_k - \frac{y}{b} \operatorname{cth} k \frac{\pi}{a} y \right| \leq C_{17} \frac{k}{m^2}, \quad (5.31)$$

und schließlich Wort für Wort wie oben

$$\left| \frac{n-j}{n} \operatorname{cth} (n-j) \vartheta_k - \frac{b-\eta}{b} \operatorname{cth} k\pi \frac{b-\eta}{a} \right| \leq C_{18} \frac{k}{m^2}. \quad (5.32)$$

Betrachtet man nun (5.19), (5.20) usf., bis (5.22) und $\varepsilon^* = 0$, so folgt

$$|S_{m;k} - I_{m;k}| \leq C_{19} \frac{k}{m^2} \quad (5.33)$$

und im Sinne von (5.33) und (5.23), ferner von (5.27) und (5.28) die Abschätzung

$$|A_m| \leq C_{20} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \frac{k}{m^2} + C_{21} \sum_{k=1}^{2[\log m]} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k}{m^2} \leq C_{22} \frac{\log^2 m}{m^2}, \quad (5.34)$$

weilers anhand der Gleichungen (5.33) und (5.24), ferner (5.27) und (5.30)

$$|B_m| \leq C_{23} \cdot \frac{\log^2 m}{m^2}, \quad (5.35)$$

ebenso laut (5.33) und (5.25) ferner auf Grund von (5.27) und (5.31)

$$|C_m| \leq C_{24} \cdot \frac{\log^2 m}{m^2}, \quad (5.36)$$

und schließlich im Sinne von (5.33) und (5.26), ferner von (5.27) und (5.32)

$$|D_m| \leq C_{25} \cdot \frac{\log^2 m}{m^2}. \quad (5.37)$$

Danach haben wir nach (5.3) und (5.34)–(5.37) für $\eta - y > \frac{1}{m}$ die Ungleichung

$$|d_m| \leq C_{26} \cdot \frac{\log^2 m}{m^2}. \quad (5.38)$$

Wir müssen nun natürlich auch

$$|d_m^I| \leq |A_m^I| + |B_m^I| + |C_m^I| + |D_m^I| \quad (5.39)$$

abschätzen, wo die Größen A_m^I ; B_m^I usw. dieselbe Form haben wie A_m ; B_m usw.; die Summierung geht aber jetzt anstatt von

$$1 \leq k \leq 2[\log m] \text{ von } M_1 = 2[\log m] + 1 \text{ bis } M_2 = 3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta - y} \right].$$

Die Größe $(S_{m;k}^I - I_{m;k}^I)$ werden wir — ebenso wie in Abschnitt 4 — nur in drei Teile zerspalten, u. zw. in

$$S_{m;k}^I - I_{m;k}^I = a_m^I + \mu_m^I + \varepsilon_m^I \quad (5.40)$$

wo a_m^I und ε_m^I dieselbe Bedeutung haben, wie unter (5.15) bzw. (5.18), und wo

$$\mu_m^I = \frac{1}{k^2} \sin \frac{pk\pi}{m} \cdot \sin \frac{qk\pi}{m} \cdot \left\{ \frac{sh i\vartheta_k \cdot sh(n-j)\vartheta_k}{sh n\vartheta_k} - \frac{sh \frac{k\pi y}{a} \cdot sh k \frac{\pi}{a} (b-\eta)}{sh k \frac{\pi}{a} b} \right\}. \quad (5.41)$$

Bei den Abschätzungen werden wir demselben Gedankengang folgen, d. h. von der Ungleichung (4.46) ausgehen, die schon in Abschnitt 4 eine große Rolle spielte. Damit haben wir kurz

$$\mu_m^1 \leq \frac{1}{k^2} C_{27} \frac{k^3}{m^2} (\eta - y) e^{-k \frac{b}{a} (\eta - y)} = C_{27} \frac{k \cdot (\eta - y)}{m^2} e^{-k \frac{b}{a} (\eta - y)}, \quad (5.42)$$

weitere

$$|A_m^1| \leq C_{28} \sum_{M_1}^{M_1} m^{-2} + C_{29} (\eta - y) \sum_{M_1}^{M_1} \frac{k}{m^2} + C_{30} \cdot \frac{1}{k^2} \leq C_{31} \frac{\log^2 m}{|\eta - y| m^2}, \quad (5.43)$$

usw. und schließlich

$$|d_m^1| \leq C_{32} \frac{\log^2 m}{|\eta - y| \cdot m^2}. \quad (5.44)$$

Auch die Reste r_m bzw. q_m schätzen wir ebenso ab, wie es in Abschnitt 4 geschehen ist. Hierzu benötigen wir nur für $\sum \frac{1}{k^2} e^{-kt}$ eine neue Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=M_2}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-kt} &= \sum_{k=M_2}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \leq x^{M_2} \cdot \sum_{k=M_2}^{\infty} \frac{x^{k-M_2}}{k^3 (1-x)} = C_{33} \frac{1}{1-e^{-t}} \\ &\cdot \frac{(\eta - y)^2}{\log^2 m} e^{-3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta - y} \right] t}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Mit dieser wird

$$|q_m| \leq \frac{C_{34}}{m^2} \frac{m^2}{1 - e^{-\frac{(\eta - y) \pi}{a}}} \cdot \frac{(\eta - y)^2}{\log^2 m} e^{-3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta - y} \right] \cdot \frac{(\eta - y) \pi}{a}} \leq C_{35} \frac{(\eta - y)}{m^3 \log^2 m}. \quad (5.46)$$

und

$$|r_m| \leq C_{36} \frac{1}{1 - e^{-\frac{(\eta - y) \pi}{a}}} e^{-3 \frac{a}{\pi} \left[\frac{\log m}{\eta - y} \right] (\eta - y) \frac{11 \pi}{12 a}} \leq C_{37} \frac{1}{m^4 (\eta - y)}. \quad (5.47)$$

Letzten Endes bekommt man also für $\eta - y > \frac{1}{m}$ — bzw. für $|\eta - y| > \frac{1}{m}$ — die Abschätzung

$$|\Delta_{p,q}^{(i,j)}(m;n)| \leq \frac{C_{38} \log^2 m}{|\eta - y| \cdot m^2}. \quad (5.48)$$

Betrachten wir nun näher

52. den Fall $\eta = y$. Da hier wieder alles symmetrisch in x bzw. in y ist, so gilt die Abschätzung

$$|\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m; n)| \leq \frac{C_{39} \log^2 m}{m^2 \delta}; \left(\delta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}; \delta > \frac{1}{m} \right). \quad (5.49)$$

Es sei schließlich bemerkt, daß auch die trivialen Relationen

$$|G_B(x; y; \xi; \eta)| \leq C_{40}; \quad |h_{p;q}^{(i;j)}(m; n)| \leq C_{40} \quad (5.50)$$

gültig sind.

6. Fehlerabschätzung der angenäherten Lösung

Die exakte Lösung der Poissonschen bzw. der biharmonischen Gleichung, die den homogenen Randbedingungen unter (2.3) bzw. (3.2) genügt, läßt sich mit Hilfe der Greenschen Funktion der betrachteten Probleme unschwer aufschreiben, u. zw. in der Form⁸

$$U = U_P(x; y) = \int_{R_{\xi; \eta}} G_P(x; y; \xi; \eta) \cdot t(\xi; \eta) d\omega_{\xi; \eta}, \quad (6.1)$$

bzw.

$$w = w_B(x; y) = \int_{R_{\xi; \eta}} G_B(x; y; \xi; \eta) v(\xi; \eta) d\omega_{\xi; \eta}. \quad (6.2)$$

Diese exakten Lösungen nähern wir in dem Gitterpunkten mit den Werten gemäß (2.12) bzw. (3.7) an. Der Fehler, d. h. die Differenz der so gewonnenen Werte und des Funktionswertes der exakten Lösung im entsprechenden Punkt ergibt sich aus zwei Grundursachen. Würden wir in die Gleichungen (6.1) bzw. (6.2) anstatt der Elemente der Green-Matrix die Werte der entsprechenden Gitterpunkt zugehörigen Green-Funktion einsetzen, dann käme dieses Verfahren bloß einer mechanischen Quadratur gleich.

6.1. Fehler aus der Benützung der Green-Matrix. Zum zweiten soll die Fehlerabschätzung dieses letzteren Teiles angegeben werden. Da aber wir mit der Green-Matrix rechnen, tritt noch ein zusätzlicher Fehler auf, den wir vor allem abschätzen wollen. Hierzu braucht man nur vorauszusetzen, daß die perturbierende Funktion, $t(x; y)$ bzw. $v(x; y)$ beschränkt ist, daß also

$$|t(x; y)| \leq T \text{ bzw. } |v(x; y)| \leq V, \text{ falls } (x; y) \in R. \quad (6.3)$$

⁸ Falls nur die perturbierende Funktion, $t(x; y)$ bzw. $v(x; y)$ gewissen — für uns auch zu allgemeinen — Voraussetzungen genügt (s. z. B. [6], bzw. [7]).

Benützt man nun die Abschätzungen unter (4.59) und (4.60), bzw. (5.49) und (5.50), so folgt, daß

$$\begin{aligned}
 F_{P;II}(m) &= \left| \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} g_{p;q}^{(i;j)}(m;n) t_{jq} - \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} G_P \left(\frac{pa}{m}; \frac{qa}{m}; \frac{ib}{n}; \frac{jb}{n} \right) t_{jq} \right| \leq \\
 &\leq T \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m;n)| \leq C_1 T \int_{R_{\xi;\eta}} |\Delta_{p;q}^{(i;j)}(m;n)| d\omega_{\xi;\eta} \leq \\
 &\leq C_1 \cdot T \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\max\{a,b\}} \log^3 m \cdot m^{-2} \cdot \delta^{-2} \cdot \delta \cdot d\delta \right\} d\varphi + C_2 \frac{T \log m}{m \cdot n} + \\
 &\quad + C_3 T \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \log \delta \cdot \delta \cdot d\delta \right\} d\varphi \leq C_4 \frac{\log^4 m}{m^2}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

und ebenso

$$F_{B;II}(m) = \left| \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left[h_{p;q}^{(i;j)}(m;n) - G_B \left(\frac{pa}{m}; \frac{qa}{m}; \frac{ib}{n}; \frac{jb}{n} \right) \right] v_{jq} \right| \leq C_5 \frac{\log^2 m}{m^2}. \tag{6.5}$$

6.2 *Hilfssätze über Quadraturfehler.* Um Fehler der mechanischen Quadratur abzuschätzen, benötigen wir einige Hilfsformeln. Vor allem sei bemerkt, daß man bei Annäherung des Integrals $\int_a^b \psi(x) dx$ durch die Trapez-Formel

$$T_n = \frac{b-a}{2n} \left\{ \psi(a) + \psi(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \psi \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right\} \tag{6.6}$$

den Fehler $R_n = \left| \int_a^b \psi(x) dx - T_n \right|$ folgendermaßen abschätzen kann:

$$\text{a) } R_n \leq (b-a) \cdot \omega \left(\frac{b-a}{2n}; \psi \right) \tag{6.7}$$

falls ψ stetig in $[a+0; b-0]$, bzw.

$$\text{b) } R_n \leq \frac{(b-a)^2}{4n} \omega \left(\frac{b-a}{2n}; \psi' \right) \tag{6.8}$$

falls ψ stetig differenzierbar, bzw.

$$\text{c) } R_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{\xi \in [a,b]} |\psi''(\xi)| \tag{6.9}$$

falls ψ in $[a + 0; b - 0]$ zweimal differenzierbar ist, wobei $\omega(\delta; \varphi; a; b) = \omega(\delta; \varphi) = \sup_{0 < \theta \leq \delta} \sup_{\{x; x+\theta \in [ab]\}} |\varphi(x+\theta) - \varphi(x)|$ das Dini—Lipschitzsche Stetigkeitsmodul von $\varphi(x)$ ist.⁹

Für die Fälle b) bzw. c) benützen wir auch bessere Abschätzungen, die aber direkte Folgen der Ungleichung (6.IV) sind. Es sei also zunächst vorausgesetzt, daß $\psi(x)$ in $[a + 0; b - 0]$ stetig differenzierbar ist. Es gilt dann die Abschätzung

$$R_n \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \sum_{k=1}^{2n} \omega \left(\frac{b-a}{2n}; \psi'; a + (k-1) \frac{b-a}{2n}; a + k \frac{b-a}{2n} \right), \quad (6.10)$$

worin die beiden letzten Veränderlichen von ω das Intervall anzeigen, wo das Stetigkeitsmodul genommen werden soll. Da weiters

$$\left| \sup_{a \leq x \leq a+\Delta} \psi'(x) - \inf_{a \leq x \leq a+\Delta} \psi'(x) \right| \leq \Delta |\psi''(a + \Theta\Delta)|$$

falls ψ' in $[a + 0; a + \Delta - 0]$ differenzierbar ist, so folgt auch die Abschätzung

$$R_n \leq \frac{(b-a)^3}{24 n^3} \sum_{k=1}^n \sup_{a + \frac{k-1}{n}(b-a) \leq x \leq a + \frac{k}{n}(b-a)} |\psi''(x)|. \quad (6.11)$$

⁹ Formel a) ist eine triviale Folge der Definition des Stetigkeitsmoduls und des Integralbegriffes, Formel c) ist wohlbekannt (s. z. B. [8]), während man Formel b), wie folgt, bekommen kann:

Es sei φ als in $[a; a + \Delta]$ stetig differenzierbar vorausgesetzt. Dann ist aber

$$\varphi(x) \leq \varphi(a) + (x-a) \sup_{\xi \in [a; a+\Delta]} \varphi'(\xi) \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x) \geq \varphi(a) + (x-a) \inf_{\xi \in [a; a+\Delta]} \varphi'(\xi) \quad (6. I)$$

gültig, da andernfalls — wenn z. B. eine $\zeta \in (a; a + \Delta]$ existierte, für welche

$$\varphi(\zeta) > \varphi(a) + (\zeta - a) \sup_{\xi \in [a; a+\Delta]} \varphi'(\xi) \quad (6. II)$$

gültig wäre —, dem Mittelwertsatz gemäß [s. die Gleichung (6. II)] auch eine $\zeta^* \in (a; a + \Delta]$ mit der Eigenschaft

$$\varphi'(\zeta^*) > \sup_{\xi \in [a; a+\Delta]} \varphi'(\xi) \quad (6. III)$$

angegeben werden könnte, usw. Aus (6. Ia) und (6. Ib) folgt aber, daß

$$\varphi(a) \cdot \Delta + \frac{\Delta^2}{2} \sup \varphi' \geq \int_a^{a+\Delta} \varphi(x) dx \geq \varphi(a) \cdot \Delta + \frac{\Delta^2}{2} \inf \varphi', \quad (6. IV)$$

d. h. daß

$$\left| \int_a^{a+\Delta} \varphi(x) dx - \varphi(a) \cdot \Delta \right| \leq \frac{\Delta^2}{2} \omega(\Delta; \varphi'). \quad (6. V)$$

Setzt man hierin $\Delta = \frac{1}{2n}(b-a)$ und addiert man alle Teilintervalle, so erhält man Formel (6.8).

Wir wenden nun die Formeln unter (6.6)–(6.11) – sinngemäß – auf das Integral

$$I = \int_{\bar{T}} \psi(x; y) dt = \int_a^x \left\{ \int_0^{\frac{y}{X}} \psi(x; y) dy \right\} dx \quad (6.12)$$

bzw. auf die entsprechende Trapezformel

$$\begin{aligned} T_{m;n} = & \frac{X}{2m} \cdot \frac{Y}{2n} \left\{ \psi(a; 0) + \psi(X; 0) + \psi(X; Y) + \psi(a; b) + \right. \\ & + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \psi\left(k \frac{X}{m}; 0\right) + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \psi\left(k \frac{X}{m}; k \frac{Y}{m}\right) + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \psi\left(X; l \frac{Y}{n}\right) + \\ & \left. + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \psi\left(a; l \frac{Y}{n}\right) + 4 \sum_{k=r+1}^{m-1} \sum_{l=1}^{(k \frac{n}{m}-1)} \varphi\left(k \frac{X}{m}; l \frac{Y}{n}\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

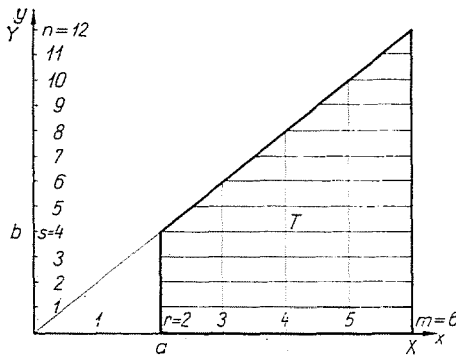


Abb. 1

an, wo wir (s. Abb. 1) Intervall $[0, X]$ in m , Intervall $[0, Y]$ in n gleiche Teile zerspalten haben, und worin weiters $\frac{n}{m}$, weiters $r = \frac{a}{X} m$ und $s = \frac{b}{Y} n$ ganze Zahlen sein sollen. Dem Falle a) entsprechend bekommen wir nun erst

$$\left| I - \frac{X}{2m} \left\{ \int_0^b \psi(a; y) dy + \int_0^Y \psi(X; y) dy + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \int_0^{\frac{y}{m}} \psi\left(k \frac{X}{m}; y\right) dy \right\} \right| \leq \quad (6.14)$$

$$\leq X \cdot \omega \left(\frac{X}{2m}; \int_0^{\frac{y}{X}} \psi(x; y) dy \right) \leq \frac{X}{2m} \cdot \sup_{(x,y) \in T} |\psi(x; y)| + \omega_{x;l} \left(\frac{X}{2m}; \psi \right),$$

wo wir die Bezeichnung

$$\omega_{x;l}(\delta; \varphi) = \sup_{0 < \vartheta \leq \delta} \left\{ \sup_x \int_0^{\frac{Y}{X}} |\varphi(x + \vartheta; y) - \varphi(x; y)| dy \right\} \quad (6.15)$$

benützt haben.¹⁰

Weiters gilt

$$\left| \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dy - \frac{Y \cdot k}{2nk} \left\{ \psi \left(k \frac{X}{m}; 0 \right) + \psi \left(k \frac{X}{m}; k \frac{Y}{m} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{l=1}^{k \frac{n}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; l \frac{Y}{n} \right) \right\} \right| \leq \frac{kY}{m} \cdot \omega \left(\frac{Y}{2n}; \psi; x \equiv k \frac{X}{m} \right), \quad (6.16)$$

wo definitionsgemäß

$$\omega \left(\frac{Y}{2n}; \psi; x \equiv k \frac{X}{m} \right) = \sup_{0 < \vartheta \leq \frac{Y}{2n}} \left\{ \sup_y \left| \psi \left(k \frac{X}{m}; y + \vartheta \right) - \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) \right| \right\} \quad (6.17)$$

ist. Die letzte Ungleichung in (6.16) erhält man durch Anwendung der Formel (6.7); $\frac{kY}{m}$ ist die Länge des Integrationsintervalls, $\frac{Y}{n}$ hingegen die der Einteilung. Mit den Formeln (6.13) und (6.15) hat man die Abschätzung

$$|I - T_{m;n}| \leq \left| I - \frac{X}{2m} \left\{ \int_0^b \psi(a; y) dy + \int_0^Y \psi(X; y) dy + \right. \right.$$

¹⁰ Die letzte Ungleichung in (6.14) ist folgendermaßen ersichtlich:

$$\omega \left(\delta; \int_a^x \varphi(x; y) dy \right) = \sup_{0 < \vartheta \leq \delta} \left\{ \sup_x \left| \int_a^{x+\vartheta} \varphi(x + \vartheta; y) dy - \int_a^x \varphi(x; y) dy \right| \right\} \leq \\ \leq \sup_{0 < \vartheta \leq \delta} \left\{ \sup_x \left| \int_a^{x+\vartheta} \varphi(x + \vartheta; y) dy - \int_a^x \varphi(x + \vartheta; y) dy \right| + \sup_x \left| \int_a^x [\varphi(x + \vartheta; y) - \varphi(x; y)] dy \right| \right\} \leq \\ \leq \delta \sup_{(x;y) \in T} |\varphi(x; y)| + \omega_{x;l}(\delta; \varphi), \text{ w. z. B. w.}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dx \Bigg| + \left| \frac{X}{2m} \left\{ \int_0^b \psi(a; y) dy + \int_0^Y \psi(X; y) dy + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dy \right\} - T_{m:n} \right| \leq X \omega \left(\frac{X}{2m}; \int_0^{x \frac{Y}{X}} \psi(x; y) dy \right) + \\
 & + \frac{X}{2m} \left| \int_0^b \psi(a; y) dy - \left[\psi(a; 0) + \psi(a; b) + 2 \sum_{l=1}^{s-1} \psi \left(a; l \frac{Y}{k} \right) \right] \frac{Y}{n} + \int_0^Y \psi(X; y) dy - \right. \\
 & \left. - \left[\psi(X; 0) + \psi(X; Y) + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \psi \left(X; l \frac{Y}{n} \right) \right] \frac{Y}{2n} + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dy - \right. \\
 & \left. - 2 \left[\sum_{k=r+1}^{m-1} \psi \left(k \frac{X}{m}; 0 \right) + \sum_{k=r+1}^{m-1} \psi \left(k \frac{X}{m}; k \frac{Y}{m} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \sum_{l=1}^k \psi \left(k \frac{X}{m}; l \frac{Y}{n} \right) \right] \frac{Y}{2n} \right| \leq X \cdot \omega \left(\frac{X}{2m}; \int_0^{x \frac{Y}{X}} \psi; (x; y) dy \right) + \\
 & + \frac{X}{2m} b \omega \left(\frac{Y}{2n}; \psi; x \equiv a \right) + \frac{X}{2m} \cdot Y \omega \left(\frac{Y}{2n}; \psi; x \equiv X \right) + \\
 & + \frac{X}{2m} \sum_{k=r+1}^{m-1} \frac{kY}{m} \cdot \omega \left(\frac{Y}{2n}; \psi; x \equiv k \frac{X}{m} \right).
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Dem Falle b) entsprechend, ergibt sich ferner, daß erstens — gemäß (6.10) —

$$\left| I - \frac{X}{2m} \left\{ \int_0^b \psi(a; y) dy + \int_0^Y \psi(X; y) dy + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dy \right\} \right| \leq \tag{6.19}$$

$$\frac{X^2}{8m^2} 2 \sum_{k=r}^m \omega \left(\frac{X}{2m}; \frac{d}{dx} \int_0^{x \frac{Y}{X}} \psi(x; y) dy; k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m} \right),$$

daß zweitens — im Sinne von (6.8) —

$$\left| \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dy - \frac{Y \cdot k}{2nk} \left\{ \psi \left(k \frac{X}{m}; 0 \right) + \psi \left(k \frac{X}{m}; k \frac{Y}{m} \right) + \right. \right. \quad (6.20)$$

$$\left. + 2 \sum_{l=1}^{k \frac{n}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; l \frac{Y}{n} \right) \right\} \leq \frac{k^2 Y^2}{m^2} \cdot \frac{1}{4n} \cdot \omega \left(\frac{Y}{2n}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; x \equiv k \frac{X}{m} \right),$$

und somit schließlich

$$\begin{aligned} |I - T_{mn}| &\leq \frac{X^2}{8m^2} \cdot 2 \sum_{k=r}^m \omega \left(\frac{X}{2m}; \frac{d}{dx} \int_0^{x \frac{Y}{X}} \psi(x; y) dy; k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m} \right) + \\ &+ \frac{X}{2m} \cdot \frac{b^2}{4n} \omega \left(\frac{Y}{2n}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; x \equiv a \right) + \frac{X}{2m} \cdot \frac{Y^2}{4n} \cdot \omega \left(\frac{Y}{2n}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; x \equiv X \right) + \\ &+ \frac{X}{2m} \frac{1}{4n} \sum_{k=r+1}^{m-1} \frac{k^2 Y^2}{m^2} \omega \left(\frac{Y}{2n}; \frac{\partial \psi}{\partial y}; x \equiv k \frac{X}{m} \right). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dem Falle c) entsprechend, bekommen wir erstens — anhand von (6.11) — die Abschätzung

$$\left| I - \frac{X}{2m} \left\{ \int_0^b \psi(a; y) dy + \int_0^Y \psi(X; y) dy + 2 \sum_{k=r+1}^{m-1} \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dy \right\} \right| \leq \quad (6.22)$$

$$\leq \frac{X^3}{24m^3} 2 \sum_{k=r}^m \sup_{k \frac{X}{m} \leq x \leq (k-1) \frac{X}{m}} \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{x \frac{Y}{X}} \psi(x; y) dy \right|,$$

zweitens

$$\left| \int_0^{k \frac{Y}{m}} \psi \left(k \frac{X}{m}; y \right) dy - \frac{Y \cdot k}{2nk} \left\{ \psi \left(k \frac{X}{m}; 0 \right) + \psi \left(k \frac{X}{m}; k \frac{Y}{m} \right) + \right. \quad (6.23)$$

$$\left. + 2 \sum_{l=1}^{k \frac{n}{m} - 1} \psi \left(k \frac{X}{m}; l \frac{Y}{n} \right) \right\} \leq \frac{k^3 Y^3}{m^3} \frac{1}{12n^2} \sup_{0 < \eta \leq k \frac{Y}{m}} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=k \frac{X}{m} \\ y=\eta}}$$

und schließlich die Formel

$$\begin{aligned}
 |I - T_{m;n}| &\leq \frac{X^3}{12 m^3} \cdot \sum_{k=r}^{m-1} \sup_{\frac{kX}{m} \leq x \leq (k+1)\frac{X}{m}} \left| \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\frac{Y}{X}} \psi(x; y) dy \right| + \\
 &+ \frac{X}{2 m} \cdot \frac{b^3}{12 n^2} \sup_{0 \leq \eta \leq b} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=a \\ y=\eta}} + \frac{X}{2 m} \cdot \frac{Y^3}{12 n^2} \sup_{0 \leq \eta \leq Y} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=X \\ y=\eta}} + (6.24) \\
 &+ \frac{X}{2 m} \cdot \frac{1}{12 n^2} \cdot \frac{Y^3}{m^3} \sum_{k=r+1}^{m-1} k^3 \cdot \sup_{0 \leq \eta \leq k\frac{Y}{m}} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=k\frac{Y}{m} \\ y=\eta}}.
 \end{aligned}$$

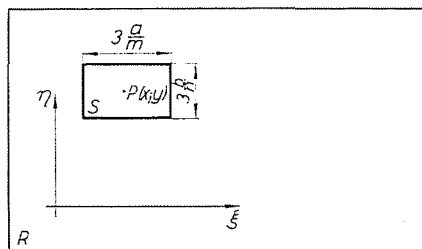


Abb. 2

6.3. *Quadraturfehler.* Wir schätzen nun den Fehler der direkten mechanischen Quadratur des Integrals (6.1) bzw. (6.2) ab, u. zw. mit Hilfe der Formeln (6.18) bzw. (6.21) bzw. (6.24). Diesen Quadraturfehler darf man nur in einem zweifach zusammenhängenden Bereich betrachten, da man in jener Umgebung des Punktes $(x; y)$ — in der die Greensche Funktion allenfalls eine Singularität besitzt —, anders verfahren muß. Wir werden hierzu das Viereck S , mit den den Koordinatenachsen parallelen $\frac{3 a}{m}$ bzw. $\frac{3 b}{n}$ langen Seiten um $P(x; y)$ aus S herausgreifen und den Quadraturfehler folgendermaßen Schätzen (s. Abb. 2):

$$I = I_1 + I_2; Q = Q_1 + Q_2; F = |I - Q| \leq |I_1 - Q_1| + |I_2| + |Q_2|, \quad (6.25)$$

mit

$$I_a = \int_{(T_a)} G(x; y; \xi; \eta) \cdot \begin{Bmatrix} t(\xi; \eta) \\ v(\xi; \eta) \end{Bmatrix} d\omega_{\xi; \eta} \quad (a = 1, 2) \quad (6.26)$$

worin

$$T_1 = (R - S)_{\xi; \eta}; T_2 = S_{\xi; \eta}$$

bedeutet, weiters

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{m-1} G \left(\frac{pa}{m}; \frac{ib}{n}; \frac{qa}{m}; \frac{jb}{n} \right) \cdot \begin{Bmatrix} t_{jq} \\ v_{jq} \end{Bmatrix}, \quad (6.27)$$

($j \neq i-1; i+1; q \neq p-1; p+1$)

wo der Stern über dem Summenzeichen angibt, daß man nur Größen mit solche Indexen summieren soll, neben denen die entsprechenden Punkte nicht in S fallen, und schließlich

$$Q_2 = \sum_{j=i-1}^{i+1} \sum_{q=p-1}^{p+1} G \left(\frac{pa}{m}; \frac{ib}{n}; \frac{qa}{m}; \frac{jb}{n} \right) \cdot \begin{Bmatrix} t_{jq} \\ v_{jq} \end{Bmatrix} \quad (6.28)$$

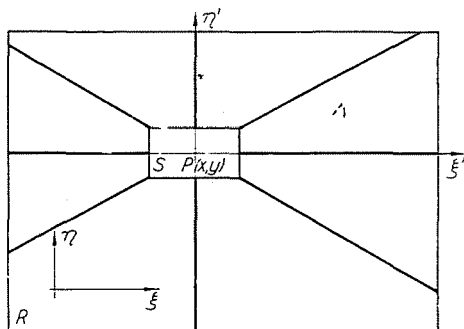


Abb. 3

wo man also nur die Glieder mit jenen Indexen summiert, die aus (6.27) weggelassen wurden; es sei hier gleich bemerkt, daß $\eta = y$ im Falle des harmonischen Problems G_p in $\xi = x$ gar nicht definiert ist. Für dieses Indexpaar nimmt man statt $G_p(x; y; x; y)$ den entsprechenden Wert der Green-Matrix, wie unter (2.7) angegeben. (6.26a), (6.26b) für $a = 2$, weiters (6.28a) und (6.28b) wird man nun leicht, u. zw. mit Hilfe einer Schranke der angegebenen perturbierenden Funktion, t bzw. v mit Hilfe des bekannten Betrages der Green-Funktion abschätzen, da Glied $|I_1 - Q_1|$ hingegen mit Hilfe der in 6.2 angegebenen Ungleichungen. Zuerst werden wir also $|I_1 - Q_1|$ abschätzen. Hierzu sei nun vorerst bemerkt, daß hier (s. z. B. Formel (6.26a)–(6.26b)) die integrierende Funktion das Produkt der perturbierenden und der Greenschen Funktion darstellt. Da weiters diese letztere im betrachteten Bereiche zweimal stetig differenzierbar ist, und da der Modul dieser zweiten Derivierten gegen Unendlich, falls $(\xi; \eta)$ gegen $(x; y)$ strebt, werden wir den betrachteten Bereich — wie Abb. 3 zeigt —, in 8 Teile zerspalten, und den Quadraturfehler in jedem Teil gesondert abschätzen. Da weiter die Verhältnisse in allen 8 Teilbereichen sozusagen

äquivalent sind, genügt es, nur einen — repräsentierenden — zu betrachten. Ist dieser z. B. der mit A bezeichnete Bereich, und ist die Koordinatentransformation $\xi - x = \xi'$; $\eta - y = \eta'$, dann sei einleitend nur vorausgesetzt, daß die perturbierende Funktion t bzw. v im betrachteten Bereiche A stetig ist. Es bezeichne ferner $\omega_a(\delta; t) = T_\omega(\delta)$ bzw. $\omega_a(\delta; v) = V_\omega(\delta)$ den verallgemeinerten Stetigkeitsmodul der Funktion t bzw. v im Bereich A ,¹¹ ebenso T bzw. V eine Schranke ihrer Beträge. Um den Quadraturfehler abzuschätzen, müssen wir die Produkte $t \cdot G_p$ bzw. $v G_B$ betrachten. Nun sei $\delta = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ und, da in AG_p stetig differenzierbar ist:

$$|G_p| \leq C_6 \cdot \min \left\{ \log \frac{C_7}{\delta}; \log m \right\} \tag{6.29}$$

$$|\overrightarrow{\text{grad}} G_p| \leq C_8 \cdot \min \left\{ \frac{1}{\delta}; m \right\} \tag{6.30}$$

in A . Ferner und allgemein ist die Abschätzung

$$\omega_x(\delta; \varphi \cdot \psi) \leq \sup |\varphi| \cdot \omega_x(\delta; \psi) + \sup |\psi| \cdot \omega_x(\delta; \varphi) \tag{6.31}$$

bei beliebiger Konkretisierung des Indexes x (also z. B. $x = x; \int, \dots$ usw.) gültig, speziell aber

$$\begin{aligned} \omega_{\xi'; \int} \left(\frac{X}{2m}; tG_p \right) &= \sup_{0 < \vartheta \leq \frac{X}{2m}} \left\{ \sup_{\xi' \in \left[\frac{1}{m}; X \right]} \int_0^{\xi' \frac{Y}{X}} |t(\xi'; \eta') \cdot G_p(x; y; \xi'; \eta') - \right. \\ &\quad \left. - t(\xi' + \vartheta; \eta') \cdot G_p(x; y; \xi' + \vartheta; \eta')| d\eta' \right\} \leq \sup_{0 < \vartheta \leq \frac{X}{2m}} \left\{ \sup_{\xi' \in \left[\frac{1}{m}; X \right]} \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\xi' \frac{Y}{X}} [|t(\xi' + \vartheta; \eta')| \cdot |G_p(x; y; \xi' + \vartheta; \eta') - G_p(x; y; \xi'; \eta')| + |G_p(x; y; \xi'; \eta')| \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot |t(\xi' + \vartheta; \eta') - t(\xi'; \eta')|] d\eta' \right\} \leq C_9 \sup_{\xi' \in \left[\frac{1}{m}; X \right]} \int_0^{\xi' \frac{Y}{X}} \left\{ T \cdot \frac{X}{2m} \cdot \frac{1}{\xi' + \pi'} + \right. \\ &\quad \left. + T_0 \left(\frac{X}{2m} \right) \log \frac{1}{\xi' + \eta'} \right\} d\eta' \leq C_{10} \cdot T \cdot \frac{\log m}{m} + C_{11} \cdot T_0 \left(\frac{X}{2m} \right). \tag{6.32} \end{aligned}$$

¹¹ Den verallgemeinerten Stetigkeitsmodul des Skalarfeldes $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r_i)$; nennt man die Größe

$$\begin{aligned} \omega_a(\delta; \varphi) &= \sup_{0 < |\vec{\vartheta}| \leq \delta} \left\{ \sup_{\vec{r}} |\varphi(\vec{r} + \vec{\vartheta}) - \varphi(\vec{r})| \right\} = \\ &= \sup_{0 < \sqrt{\sum \vartheta_i^2} \leq \delta} \left\{ \sup_{r_i} |\varphi(r_i + \vartheta_i) - \varphi(r_i)| \right\} \end{aligned}$$



Da ferner auch

$$|G_B| \geq C_{12}; |\overrightarrow{\text{grad}} G_B| \leq C_{13} \cdot \min \left\{ \log \frac{C_{14}}{\delta}; \log m \right\} \quad (6.33)$$

in A gültig ist, bestehen folgende Abschätzungen:

$$\omega_a(\delta; G_B) \leq C_{15} \cdot \delta \cdot \log m; \omega(\delta; G_B; \xi' \equiv z) \leq C_{16} \cdot \delta \cdot \log \frac{C_{18}}{|z|}, \quad (6.34)$$

und

$$\omega_{\xi'} \left(\frac{X}{2m}; v G_B \right) \leq C_{18} \cdot V \cdot \frac{1}{m} + C_{19} \cdot V_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right). \quad (6.35)$$

Nach (6.18)–(6.24) bzw. (6.29)–(6.35) gilt also die Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_1 - Q_1|_A &\leq \frac{X}{2m} T \log m + C_{10} T \frac{\log m}{m} + C_{11} T_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right) + \frac{X}{2m} \\ &\cdot \frac{C_{20}}{m} \left\{ \log m \cdot T_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right) + T \frac{1}{m} \cdot m \right\} + \frac{X}{2m} \cdot Y \left\{ C_{21} T_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right) \log 2 + \right. \\ &+ \log 2 \cdot C_{22} \frac{T}{m} \left. \right\} + \frac{XY^2}{2m^2} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} C_{23} \left\{ kT \frac{1}{m} \frac{k}{mX} + kT_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right) \log \frac{k}{mX} \right\} \leq \\ &\leq C_{24} \max \left\{ \frac{\log m}{m}; T_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

bzw. und ebenso

$$|I_1 - Q_1|_A \leq C_{25} \cdot \max \left\{ \frac{1}{m}; V_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right) \right\} = C_{25} V_{\omega} \left(\frac{X}{2m} \right), \quad (6.37)$$

da der Stetigkeitsmodul höchstens die Größenordnung von Anwachsen besitzt. Es sei nun t bzw. v als in A stetig differenzierbar vorausgesetzt, ferner bezeichne T' bzw. V' den Betrag von $|\overrightarrow{\text{grad}} t|$ bzw. $|\overrightarrow{\text{grad}} v|$, und $T'_{\omega}(\delta)$ bzw. $V'_{\omega}(\delta)$ den verallgemeinerten Stetigkeitsmodul von $|\overrightarrow{\text{grad}} t|$ bzw. $|\overrightarrow{\text{grad}} v|$ in A . Wir müssen nun vorerst (6.19) berechnen, wo also ψ das Produkt von perturbierenden und Greenschen Funktionen ist. Zunächst ist

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\frac{Y}{X}} \psi(x; y) dy = \frac{X}{Y} \psi \left(x; x \frac{Y}{X} \right) + \int_0^{\frac{Y}{X}} \frac{\partial \psi}{\partial x} dy, \quad (6.38)$$

falls ψ als stetig differenzierbar vorausgesetzt ist. Es gilt weiter, daß

$$\omega(\delta; a + \beta) \leq \omega(\delta; a) + \omega(\delta; \beta); \omega(\delta; a \cdot \beta) < \sup |a| \cdot \omega(\delta; \beta) + \sup |\beta| \cdot \omega(\delta; a). \quad (6.39)$$

Im betrachteten Falle ist

$$\psi = t(\xi'; \eta') \cdot G_P(x; y; \xi'; \eta') \text{ bzw. } \psi = v(\xi'; \eta') \cdot G_B(x; y; \xi'; \eta'). \quad (6.40)$$

Da nun t stetig differenzierbar ist und somit $T_\omega(\delta) \leq C_{27} \delta$ gilt — haben wir

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{X}{2m}; \frac{Y}{X} \psi\left(x; x \frac{Y}{X}\right); k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right) &\leq \frac{Y}{X} \left\{ \sup_{\xi' \in \left[k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right]} |t(\xi'; \eta')| \cdot \right. \\ &\cdot \omega\left(\frac{X}{2m}; G_P; k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right) + \left. \sup_{\xi' \in \left[k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right]} |G_P(x; y; \xi'; \eta')| \cdot \omega\left(\frac{X}{2m}; t\right) \right\} \leq \\ &\leq T \cdot \frac{Y}{X} \cdot \frac{X}{2m} \cdot \sup_{\xi' \in \left[k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right]} \left| \frac{\partial G_P}{\partial \xi'} \right| + \frac{Y}{X} \log \frac{C_{27}}{k \frac{X}{m}} \cdot T_\omega\left(\frac{X}{2m}\right) \leq C_{28} \cdot T \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{k} + \\ &\quad + C_{29} T_\omega\left(\frac{X}{2m}\right) \log \frac{m}{k}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

weilers im Sinne der Fussnote 10

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{X}{2m}; \int_0^{\frac{Y}{X}} (tG_P)'_{\xi'}; d\eta'; k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right) &\leq \frac{X}{2m} \cdot \sup_{\xi' \in \left[k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right]} \left| \frac{\partial}{\partial \xi'} (tG_P) \right| + \\ &+ \sup_{0 < \delta \leq \frac{X}{2m}} \left\{ \sup_{\xi' \in \left[k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right]} \int_0^{\frac{Y}{X}} \left| \frac{\partial}{\partial \xi'} (tG_P)^{\xi'+\delta; \eta'} - \frac{\partial}{\partial \xi'} (tG_P)^{\xi'; \eta'} \right| d\eta' \right\} \leq C_{30} \frac{X}{2m} \cdot \\ &\cdot \left(T' \log \frac{m}{k} + T \frac{m}{k} \right) + C_{31} \left\{ T \frac{X}{2m} \cdot \frac{m^2}{k^2} + T'_\omega\left(\frac{X}{2m}\right) \log \frac{m}{k} \right\} \frac{k}{m}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

d. h.

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{X}{2m}; \int_0^{\frac{Y}{X}} \frac{\partial}{\partial \xi'} (tG_P) d\eta'; k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right) &\leq C_{32} \left\{ T \frac{1}{k} + \frac{T'}{m} \log \frac{m}{k} + \frac{T \cdot k}{m^2} + \right. \\ &\quad \left. + T'_\omega\left(\frac{X}{2m}\right) \cdot \frac{k}{m} \log \frac{m}{k} \right\}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Ebenso erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{X}{2m}; \int_0^{\frac{Y}{X}} \frac{\partial}{\partial \xi'} (vG_B) d\eta'; k \frac{X}{m}; (k+1) \frac{X}{m}\right) &\leq C_{33} \left\{ \frac{V}{m} \log \frac{m}{k} + \frac{V'}{m} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{m} V'_\omega\left(\frac{X}{2m}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Für das erste Glied von (6.21) bekommt man also schließlich eine Schranke in der Form

$$\begin{aligned} C_{34} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \log \frac{m}{k} + \frac{k}{m^2} + \frac{k}{m} \log \frac{m}{k} T'_\omega \left(\frac{X}{2m} \right) \right\} &\leq \\ &\leq C_{35} \max \left\{ \frac{\log m}{m^2}; \frac{1}{m} T'_\omega \left(\frac{X}{2m} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

bzw.

$$\begin{aligned} C_{36} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{1}{m} \log \frac{m}{k} + \frac{1}{m} + V'_\omega \left(\frac{X}{2m} \right) \cdot \frac{k}{m} \right\} &\leq C_{37} \left\{ \frac{1}{m^2}; \frac{1}{m} V'_\omega \left(\frac{X}{2m} \right) \right\} \leq \\ &\leq C_{38} V'_\omega \left(\frac{X}{2m} \right) \cdot \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Die weiteren Glieder von (6.21) schätzt man ebenso wie zuvor ab. Es folgt also schließlich für den Quadraturfehler

$$|I_1 - Q_1|_A \leq C_{39} \cdot \max \left\{ \frac{\log m}{m^2}; \frac{1}{m} T'_\omega \left(\frac{X}{2m} \right) \right\}, \text{ bzw. } |I_1 - Q_1|_A \leq C_{40} \frac{1}{m} V'_\omega \left(\frac{X}{2m} \right). \quad (6.47)$$

Abschätzung von $|I_2|$ bzw. $|Q_2|$ finden sich schon in Abschnitt 6, und zwar unter (6.4) bzw. (6.5). Es sei noch bemerkt, daß $\omega(\lambda\delta; \varphi) \leq (\lambda + 1) \omega(\delta; \varphi)$ für den Stetigkeitsmodul allgemein gültig ist (siehe z. B. [8]).

6.4. *Korollarien.* Der Einleitung von Abschnitt 6 gemäß haben wir also für Fehler des Differenzenverfahrens folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} H_m^{(P)\text{bzw.}(B)} &= \left| \int_{R_{\xi;\eta}} \left\{ \begin{matrix} G_P \\ \text{bzw.} \\ G_B \end{matrix} (x; y; \xi; \eta) \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} t \\ \text{bzw.} \\ v \end{matrix} (\xi; \eta) \right\} d\omega_{\xi;\eta} - \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} g \\ \text{bzw.} \\ h \end{matrix} \right\}_{p,q}^{(i,j)} (m, n) \cdot \\ &\cdot \left\{ \begin{matrix} t \\ \text{bzw.} \\ v \end{matrix} \right\}_{j,q} \right| \leq \left| \int_{R_{\xi;\eta}} \left\{ \begin{matrix} G_P \\ \text{bzw.} \\ G_B \end{matrix} (x; y; \xi; \eta) \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} t \\ \text{bzw.} \\ v \end{matrix} (\xi; \eta) \right\} d\omega_{\xi;\eta} - \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} G_P \\ \text{bzw.} \\ G_B \end{matrix} \left(p \frac{a}{m}; \right. \right. \\ & \left. \left. i \frac{b}{n}; q \frac{a}{m}; j \frac{b}{n} \right) \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} t \\ \text{bzw.} \\ v \end{matrix} \right\}_{j,q} \right| + \left| \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \left\{ \begin{matrix} G_P \\ \text{bzw.} \\ G_B \end{matrix} \left(p \frac{a}{m}; i \frac{b}{n}; q \frac{a}{m}; j \frac{b}{n} \right) \right\} - \right. \\ & \left. - \left\{ \begin{matrix} g \\ \text{bzw.} \\ h \end{matrix} \right\}_{p,q}^{(i,j)} (m; n) \right\rangle \cdot \left\{ \begin{matrix} t \\ \text{bzw.} \\ v \end{matrix} \right\}_{j,q} \right|. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Das erste Glied rechts in (6.48) haben wir nun unter (6.4) bzw. (6.5), das zweite hingegen unter (6.36) bzw. (6.37) resp. unter (6.43) bzw. (6.44), $|Q_2|$ und $|I_2|$ hingegen unter (6.4) bzw. (6.5) abgeschätzt. Zusammenfassend gelangt man also zu folgenden Feststellungen: Betrachtet man das achsparallele Rechteck R , zerspaltet gemäß (4.2), und das Poissonsche bzw. das biharmonische Problem mit homogenen Randbedingungen an R , und geht man hierbei von den folgenden Voraussetzungen aus

a) daß die *perturbierende Funktion* t bzw. v stetig auf R ist, und daß

$$\max_{(x; y) \in R} |t(x; y)| = T; \max_{(x; y) \in R} |v(x; y)| = V; \omega_a(\delta; t; R) = T_\omega(\delta); \omega_a(\delta; v; R) = V_\omega(\delta); \quad (6.49)$$

b) daß die *perturbierende Funktion* stetig differenzierbar auf R ist und daß

$$\left(\max_{(x; y) \in R} \left| \overrightarrow{\text{grad}} t \right| \right) = T'; \max_{(x; y) \in R} \left| \overrightarrow{\text{grad}} v \right| = V'; \omega_a(\delta; \overrightarrow{\text{grad}} t; R) = T'_\omega(\delta); \omega_a(\delta; \overrightarrow{\text{grad}} v; R) = V'_\omega(\delta); \quad (6.50)$$

dann läßt sich folgender

6.1. *Satz ableiten* : Mit den genannten Voraussetzungen und Bezeichnungen, so bestehen folgende Abschätzungen für Fehler der durch die Differenzgleichungsmethode gewonnenen angenäherten Lösungen des Poissonschen bzw. des biharmonischen Problems

$$H_m^{(P)} \leq C_{41}(T) \cdot \max \left\{ \frac{\log m}{m^4}; T_\omega \left(\frac{1}{m} \right) \right\}, \quad (6.51)$$

bzw.

$$H_m^{(B)} \leq C_{42}(V) \cdot V_\omega \left(\frac{1}{m} \right); \quad (6.52)$$

bzw.

$$H_m^{(P)} \leq C_{43}(T; T') \cdot \max \left\{ \frac{\log^4 m}{m^2}; \frac{1}{m} T'_\omega \left(\frac{1}{m} \right) \right\}, \quad (6.53)$$

$$H_m^{(B)} \leq C_{44}(V; V') \cdot \max \left\{ \frac{\log^2 m}{m^2}; \frac{1}{m} V'_\omega \left(\frac{1}{m} \right) \right\}, \quad (6.54)$$

sofern t bzw. v in R differenzierbar ist, wo m die Anzahl der Unterteilung einer Seite von R bedeutet.

Beweis : (6.51) folgt unmittelbar aus (6.48), (6.4) und (6.36); (6.52) folgt aus (6.48), (6.5) und (6.37); (6.53) aus (6.48), (6.4) und (6.43); (6.54) aber aus (6.48), (6.5) und (6.44).

Zusammenfassung

In dieser ersten Arbeit schätzen die Verfasser ab, wie schnell das Lösungssystem des Differenzenverfahrens — mit dem sie die Poissonsche bzw. die biharmonische Differenzialgleichung mit homogenen Randbedingungen an einem rechteckigen Viereckbereich ersetzen — gegen die Lösung der ursprünglichen Randwertaufgabe strebt. Die Konvergenzschnelle hängt wesentlich von den Stetigkeitseigenschaften der perturbierenden Funktion ab, u. zw. sind folgende Ungleichungen für den Fehler des Differenzenverfahrens gültig (den rechteckigen Viereckbereich R teilen Verfasser in m, n gleiche Pseudoquadrate ein; s. Ungl. (4.2)):

$$a) \quad H_m^{(P)} \leq C_1(T) \cdot \max \left\{ \frac{\log m}{m}; T_\omega \left(\frac{1}{m}; R \right) \right\},$$

$$H_m^{(B)} \leq C_2(V) \cdot \max \left\{ \frac{1}{m}; V_\omega \left(\frac{1}{m}; R \right) \right\} = C_2(V) \cdot V_\omega \left(\frac{1}{m}; R \right),$$

wobei Verfasser mit T bzw. mit V den Modul der perturbierenden Funktion des Poissonschen bzw. des biharmonischen Problems, mit $T_\omega \left(\frac{1}{m}; R \right)$ bzw. mit $V_\omega \left(\frac{1}{m}; R \right)$ hingegen den Stetigkeitsmodul dieser Funktionen in R bezeichnet haben; C_1, C_2 usw. bezeichnen Größen, die von m unabhängig sind.

$$b) \quad H_m^{(P)} \leq C_3(T; T') \cdot \max \left\{ \frac{\log^2 m}{m^2}; \frac{1}{m} T'_\omega \left(\frac{1}{m}; R \right) \right\},$$

$$H_m^{(B)} \leq C_4(V; V') \cdot \max \left\{ \frac{\log^2 m}{m^2}; \frac{1}{m} V'_\omega \left(\frac{1}{m}; R \right) \right\},$$

falls die perturbierende Funktion stetig differenzierbar in R ist; mit einem Strich sind die entsprechenden Größen der derivierten Funktion bezeichnet.

Literatur

1. GEIGER, H.—SCHEEL, K.: Handbuch der Physik. Bd. IV. Mechanik der elastischen Körper. Springer, Berlin, 1928.
2. EGERVÁRY, J.: Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. MTA III. Oszt. Közl. **3** (1953).
3. EGERVÁRY, E.: On hypermatrices, whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Sci. Math. (Szeged), **15** (1954).
4. RUTHERFORD, D. E.: Some continuant determinants arising in physics and chemistry, II. Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, **63** (1952).
5. HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig, 1912.
6. KANTOROVICS, L. V.—KRÜLOV, V. I.: A felsőbb analízis közelítő módszerei. Akadémiai Kiadó, Budapest 1953.
7. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akad. Verl., Leipzig, 1943.
8. NATANSZON, I. P.: Konstruktív függvénytan. Akad. Kiadó, Budapest 1952.

T. FREY }
P. RÓZSA } Budapest V. Szerb u. 23. Ungarn.