

EINE METHODE ZUR ZAHLENMÄSSIGEN BESTIMMUNG DER EIGENWERTE (Z. B. EIGENFREQUENZEN) UND DER EIGENVEKTOREN (Z. B. SCHWINGUNGSFORMEN) MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE TECHNISCHEN EIGENWERTAUFGABEN

Herrn Professor Ádám Muttnyánszky
zum 70. Geburtstag am 4. Oktober 1959 gewidmet

Von
Á. BOSZNAY

Lehrstuhl für technische Mechanik Nr. III der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 17. März 1959)

1. Einleitung. Zielsetzung

Zahlreiche Probleme der technischen und theoretischen Mechanik und Elektrizitätslehre, in einem allgemeineren Sinne ja sogar die der technischen und theoretischen Physik, führen zu mit (linearen) algebraischen Gleichungssystemen verbundenen Eigenwertaufgaben. Wir wollen einige dieser Probleme anführen: Die Bestimmung der Eigenfrequenzen von Schwingungssystemen mit endlichem Freiheitsgrad, Bestimmung der kritischen (Ausknickung hervorrufenden) Kräftesysteme von Konstruktionen, die durch mit elastischen Gelenken verbundene starre Stäbe ersetzt worden sind [1], Bestimmung der Resonanzfrequenzen von aus konzentrierten Elementen bestehenden elektrischen Netzen, Berechnungen von infraroten Spektren. Alle diese Probleme können mit Hilfe der im allgemeinen hermiteschen, möglicherweise schräg hermiteschen Matrizen $\bar{A} = [a_{ij}]$ und $\bar{B} = [b_{ij}]$ und des Spaltenvektors $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ folgendermaßen formuliert werden: es werden die (Eigen)-Werte gesucht, für welche das für x_1, \dots, x_n angeschriebene homogene lineare algebraische Gleichungssystem

$$(\lambda \bar{B} + \bar{A}) \cdot \bar{x} = \bar{o} \quad (1)$$

auch Lösungen besitzt, die von $x_1 = \dots = x_n = 0$ unterschiedlich sind. Bei einigen Anwendungen stellt \bar{B} eine Einheitsmatrix (n-ter Ordnung) dar.

Es wurde von S. Falk bewiesen [2], daß diese Aufgabe mit Hilfe eines von ihm mitgeteilten endlichen Iterationsverfahrens und erforderlichenfalls

det $(\lambda \bar{E}_a + \bar{U}_a) = 0$ als eine Gleichung gedeutet werden, die die Eigenkreisfrequenz $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ des Schwingungssystems nach Bild 1, mit der Bewegungsgleichung $\bar{E}_a^\circ \cdot \ddot{\bar{y}} = -\bar{U}_a \cdot \bar{y}$, bestimmt. Hier unterscheidet sich \bar{E}_a° von \bar{E}_a und \bar{U}_a° von \bar{U}_a höchstens in einem konstanten Faktor entsprechender Dimension und mit einem Zahlenwert gleich 1. Die Maßzahlen der Massen und Federn des Schwingungssystems nach Bild 1 können somit aus den nachstehenden (im allgemeinen nur Maßzahl-) Gleichungen erhalten werden:

$$m_i = e_{ii}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$c_{01} = \frac{1}{u_{11} - u_{12}}; \quad c_{ij} = \frac{1}{u_{ij}}, \quad i \neq j.$$

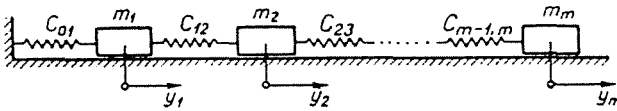


Bild 1. Die technischen Eigenwertaufgaben können im allgemeinen auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen dieses Schwingungssystems zurückgeführt werden. Die Maßzahlen der Federkonstanten wurden mit der folgenden Dimension definiert: Länge-dimension/Kraftdimension

Zusammenfassend: Die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren der oben ausgeführten Bedingungen genügenden Aufgabe kann auf die Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von einem oder mehreren Schwingungssystemen nach Bild 1 zurückgeführt werden.

Vorliegende Arbeit schlägt zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen (Eigenvektoren) des Schwingungssystems nach Bild 1 eine Methode [7] vor, die aus der Verbindung zweier bereits bekannter, jedoch nach Kenntnis des Autors bis zur Zeit nicht kombinierter Verfahren besteht, und demgemäß neuartig und nicht allein von theoretischem Interesse zu sein scheint. Die Eigenwertprobleme (z. B. die Bestimmung der Eigenfrequenzen der Torsionsschwingung der Kurbelwelle eines Verbrennungsmotors oder der longitudinalen Schwingung einer linearen Atomkette, die Bestimmung der Resonanzfrequenzen einiger Vierpolketten), die unmittelbar in der Form nach Bild 1 auftreten (oder sich von ihr nur darin unterscheiden, daß beide Enden des Modells frei oder gebunden sind), können somit mit Hilfe dieser Methode unmittelbar gelöst werden. Mit Hilfe der Falkschen Abbildung kann jedoch — wie wir es bereits in der Einleitung sahen — das Anwendungsgebiet der Methode in bedeutendem Maße ausgedehnt werden.

2. Die vorgeschlagene Methode zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen

Das Wesen der Methode [7] besteht darin, daß das sogenannte Baranowsche Abspaltungsprinzip nicht mit der Kutzbachschen Konstruktion, wie es in der Literatur üblich ist [2], [3], [4], [5], [6], vielmehr mit der bisher kaum verwendeten Kohnschen Konstruktion [8] verbunden wird. Die vorgeschlagene Methode weist gegenüber den bisher üblichen Verfahren folgende Vorteile auf:

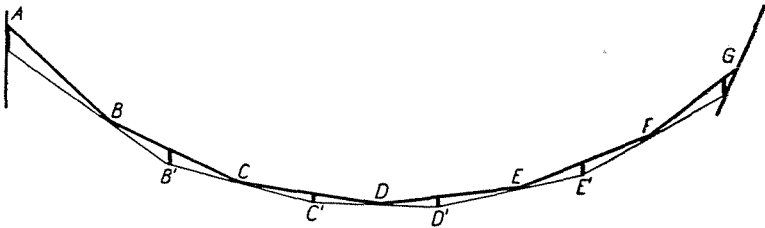


Bild 2. Wenn die Eigenfrequenzen durch die Kutzbach-Baranowsche Methode bestimmt werden, so muß unbedingt mit der Bestimmung der höchsten Eigenfrequenz begonnen werden. Das Bild zeigt mit welchem umständlichen Probieren diese wohlbekannte Konstruktion verbunden ist. Als Beispiel haben wir einen an dem einen Ende gebundenen Schwingungssystem mit 6 Freiheitsgraden gewählt. Durch die Winkelpunkte B, C, D, E und F der dick ausgezogenen fixierten und gegebenen (in einer hier nicht detaillierten Weise konstruierbaren) gebrochenen Linie werden fünf (dünn ausgezogene) Geraden gezogen, deren günstige Lage durch Probieren in der Weise bestimmt werden soll, daß die eingezeichneten sechs (in der Abb. »lotrechten«) Linienstücke die gleichen Längen besitzen. In der nächsten Stufe müssen durch die Punkte B', C', D', E' vier Geraden gezogen werden, und zwar in der Weise, daß die Längen der in ähnlicher Weise konstruierten fünf lotrechten Geradenstücke miteinander übereinstimmen, usw. Jedes Probieren ergibt je eine Längenmaßzahl. Die Quadratwurzeln der reziproken Werte dieser Längenmaßzahlen sind den entsprechenden Eigenkreisfrequenzen proportional

a) Das in Verbindung mit der Kutzbach-Baranowschen Konstruktion [3] wohl bekannte und unbequeme Herumprobieren fällt fort. Dies besteht darin, daß z. B. zur Bestimmung der m -ten Eigenfrequenz des Schwingungssystems nach Bild 1 — die unbedingt als Erste bestimmt werden soll — diejenige günstige Lage von $m-1$ Geraden durch Herumprobieren bestimmt werden muß, in welcher die Längen der durch sie ausgeschnittenen Strecken einander gleich sind. Die Schwierigkeiten dieses mehrmaligen Probierens für den Fall von $m = 6$ wurden in Bild 2 dargestellt.

- b) Die Methode liefert gleichzeitig Schwingungsformen,
- c) sie kann in einer recht einfachen Weise in ein Rechenverfahren umgewandelt werden,
- d) sie kann für eine Rechenmaschine in einfacher Weise programmiert werden,
- e) auf Grund des Verfahrens kann eine aus rein ohmschen Wider-

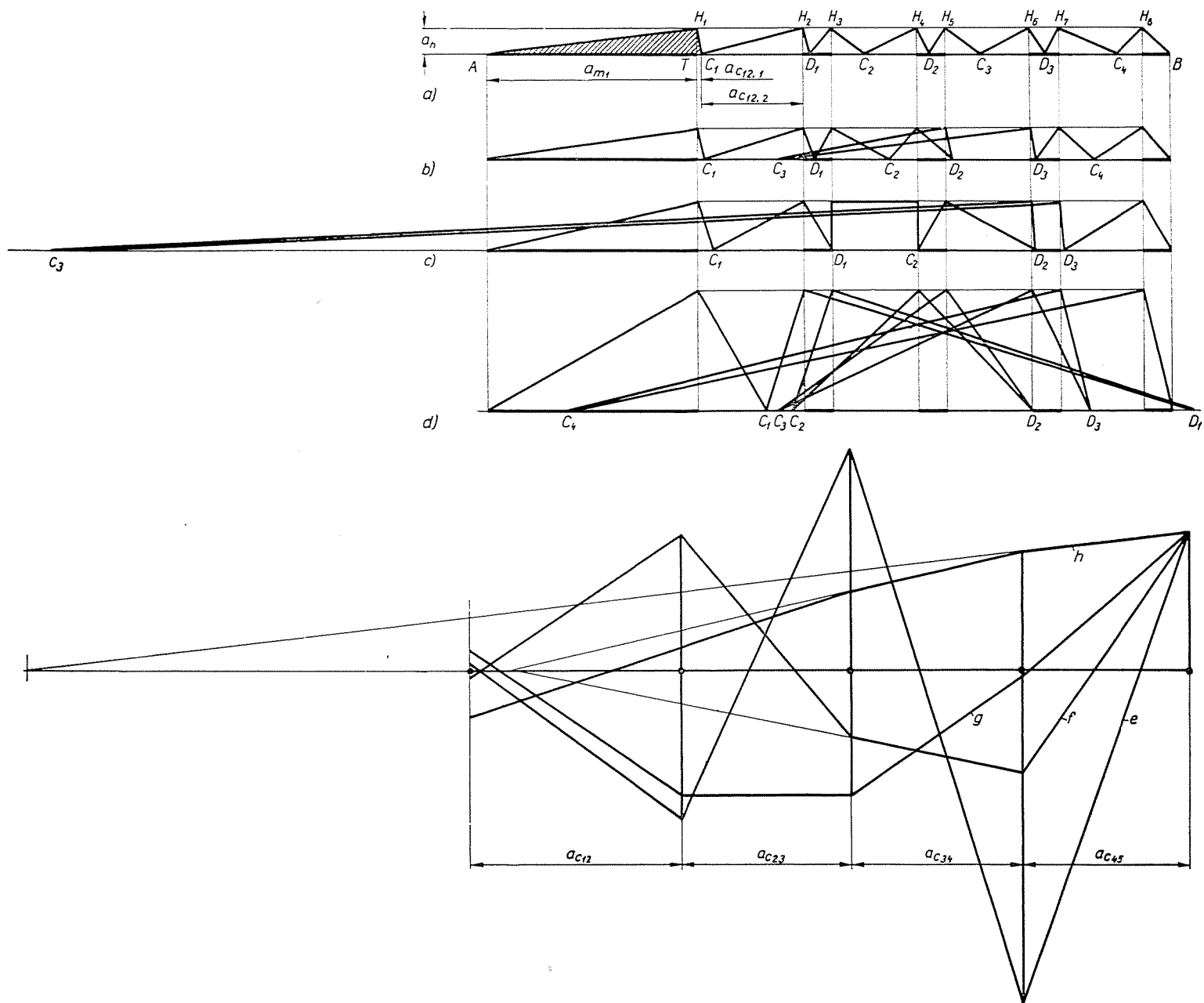


Bild 3. Die Daten des Schwingungssystems :

$m_1 = 1500 \text{ kgsec}^2 \text{ cm}^{-1}$	$c_{12} = 0,05 \cdot 10^{-6} \text{ cmkg}^{-1}$
$m_2 = 200 \text{ ,, ,,}$	$c_{23} = 0,04 \cdot 10^{-6} \text{ ,,}$
$m_3 = 200 \text{ ,, ,,}$	$c_{34} = 0,04 \cdot 10^{-6} \text{ ,,}$
$m_4 = 200 \text{ ,, ,,}$	$e_{45} = 0,04 \cdot 10^{-6} \text{ ,,}$
$m_5 = 200 \text{ ,, ,,}$	

Die Konstruktion ergibt folgende Eigenkreisfrequenzen :

$\alpha_4 = 658 \text{ sec}^{-1}$	$\alpha_2 = 349 \text{ sec}^{-1}$
$\alpha_3 = 542 \text{ sec}^{-1}$	$\alpha_1 = 141,5 \text{ sec}^{-1}$

ständen bestehende, auch in ihrer einfachsten Form halbautomatische, Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmende elektrische Schaltung und f) ein Mechanismus konstruiert werden.

Im folgenden wollen wir zuerst die Kohnsche Konstruktion und das Baranowsche Prinzip kurz beschreiben, um dann den Gedanken der Verbindung beider Verfahren darzulegen.

Der Grundgedanke der Kohnschen Konstruktion — gleich dem Grundgedanken zahlreicher Verfahren mit ähnlicher Zielsetzung — besteht darin, daß das als die Hauptschwingung ausführend gedachte Schwingungssystem durch Zerschneiden der Federn und Massen an den entsprechenden Stellen probeweise in lauter Systeme mit einem Freiheitsgrad zerlegt wird, die miteinander übereinstimmende Eigenfrequenzen besitzen. Diese sich aus der Zerlegung unmittelbar ergebende Eigenfrequenz stellt gleichzeitig auch eine Eigenfrequenz des ganzen Schwingungssystems dar. Der Gedanke dieser Zerlegung ist besonders dann anschaulich, wenn durch die Zerlegung die höchste Eigenfrequenz bestimmt wird. In diesem Falle müssen nämlich die Federn entlang der sogenannten reellen Knotenpunkten als durchgeschnitten gedacht werden. Bei der Bestimmung anderer Eigenfrequenzen durch diese Methode kommen auch weniger anschauliche imaginäre Knotenpunkte vor. Ein besonderer Vorteil der Kohnschen Konstruktion im Vergleich mit anderen ähnlichen Konstruktionen besteht darin, daß bei ihrer Anwendung der günstige Wert nur einer einzigen geometrischen Angabe (einer Strecke) durch Probieren bestimmt werden muß, und die Konstruktion gestaltet sich noch einfacher als bei dem wohlbekannten Seilpolygon.

In Bild 3 wird die Kohnsche Konstruktion an einem an seinen beiden Enden freien System mit 5 Freiheitsgraden vorgeführt. (Die Konstruktion kann im Wesen in der gleichen Weise auf ein an seinen beiden Enden oder am einen Ende gebundenes kettenartiges Schwingungssystemmodell angewendet werden. Wir wählten dieses Beispiel aus dem Grunde, weil bei der unmittelbaren Untersuchung der Torsionsschwingungen der Kurbelwellen von Verbrennungsmotoren das Modell an seinen beiden Enden frei ist.) Die Konstruktion wird vorbereitet, indem nach erfolgter Annahme der voneinander unabhängig zu wählenden Maßstäbe der Federkonstanten und der Massen das sogenannte Gerüst des Modells aufgezeichnet wird. Wir wollen den Maßstab der Massen mit m_x ($\text{cm/kg sec}^2 \text{cm}^{-1}$), den der Federkonstanten mit c_x (cm/cm kg^{-1}) bezeichnen. Die Masse mit der Maßzahl m (ausgedrückt in $\text{kg sec}^2 \text{cm}^{-1}$) wird somit durch den Abstand $a_m = m \cdot m_x$, die Federkonstante mit der Maßzahl c (ausgedrückt in cm kg^{-1}) durch den Abstand $a_c = c \cdot c_x$ in centimeter dargestellt.

Schritte der Konstruktion: Zuerst lassen wir in den Schnittpunkten der die Massen und Federkonstanten darstellenden Strecken Senkrechten auf die Gerüstgerade fallen, sodann ziehen wir in dem probeweise angenommenen

Abstand a_h eine Parallele mit der Gerüstgeraden. Nun zeichnen wir die Gerade AH_1 ; diese wird im Punkte H_1 um einen rechten Winkel gebrochen und bis zur Gerüstgeraden verlängert; nun zeichnen wir die Gerade C_1H_2 , die im Punkte H_2 wieder um einen rechten Winkel gebrochen und bis zur Gerüstgeraden verlängert wird, und so weiter. Wenn die vom Punkte H_8 ausgehende letzte Strecke der gebrochenen Linie eben in den Endpunkt B der Gerüstgeraden einläuft, so wurde der Abstand a_h richtig angenommen. Es gelingt selten, den Abstand a_h beim ersten Probieren richtig zu treffen; in diesem Falle trifft die letzte Strecke der gebrochenen Linie im Punkte B' ein. Zweckmäßigerweise wird der Abstand $\overline{BB'}$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens in Abhängigkeit von einigen beim Probieren angenommenen a_h -Werten aufgezeichnet und mit Hilfe dieser Fehlerkurve der entsprechende a_h -Wert durch graphische Interpolation festgestellt. Wenn auch die Kohnsche Konstruktion mit Probieren verbunden ist, so kann doch der Fehler mit Hilfe der Fehlerkurve auf ein Maß verringert werden, was praktisch unbedeutend ist.

Sollten sich im Laufe der Konstruktion einige Geraden einander viel zu flach schneiden, so empfiehlt es sich, die Lage des Schnittpunktes durch Berechnung zu bestimmen.

Das Gerüst des ursprünglichen Systems wird durch die sich aus der Konstruktion ergebenden Punkte D_i und C_i in lauter Gerüststücke zerlegt, die Systemen mit nur einem Freiheitsgrad entsprechen. Die Eigenkreisfrequenz α eines solchen Systems mit einem Freiheitsgrad ist nach den Erörterungen des folgenden Abschnittes der reziproken Höhe des über das Gerüst gezeichneten rechtwinkligen Dreiecks proportional; nach der Konstruktion stimmen die zu den einzelnen Teilsystemen gehörenden Höhen miteinander überein, und so folgt es aus dem oben beschriebenen Zerlegungsprinzip, daß α gleichzeitig auch eine Eigenkreisfrequenz des ganzen Systems darstellt. C_1, C_2, C_3 und C_4 stellen die Knotenpunkte dar. Ein Teil dieser Knotenpunkte ist reell, ein anderer Teil imaginär. Die Anzahl der reellen Knotenpunkte beträgt in Bild 3a vier, in Bild 3b drei, in Bild 3c zwei und in Bild 3d eins. *Die Anzahl der reellen Knotenpunkte gibt an, das wievielte das eben bestimmte α in der üblichen Reihenfolge ist.* Wie aus den Abbildungen ersichtlich, ist die Konstruktion bei der Bestimmung der höchsten Eigenfrequenz die anschaulichste.

Wegen der geometrischen mittleren Proportionalität der Höhe des in Bild 3a schraffierten Dreiecks gilt: $\overline{H_1T} = \overline{AT} \cdot \overline{TC_1}$, das heißt, $a_h = a_{m_1} \cdot a_{c_{12,1}} = m_1 \cdot m_x \cdot c_{12,1} \cdot c_x$ und daraus $m_1 \cdot c_{12,1} = a_h/m_x c_x$, und die Eigenkreisfrequenz α des Systems mit einem Freiheitsgrad beträgt somit:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{m_1 \cdot c_{12,1}}} = \frac{\sqrt{m_x \cdot c_x}}{a_h}.$$

In Kenntnis der reellen und imaginären Knotenpunkte, und bei beliebiger Annahme der Elongation der einen Masse, können auch die Schwingungsformen konstruiert werden. In den Bildern 3e, f, g und h wurden auch die Schwingungsformen konstruiert; die Elongation von m_5 wurde in allen vier Fällen als gleich groß angenommen.

Die Kohnsche Konstruktion ist somit auch an und für sich geeignet sämtliche Eigenfrequenzen (Eigenwerte) und Schwingungsformen (Eigenvektoren) zu bestimmen. Die Vorteile der Konstruktion sind jedoch bei der Bestimmung der höchsten Eigenfrequenz am meisten ausgeprägt. Bei der Bestimmung niedrigerer Eigenfrequenzen ist die Konstruktion einer sich mehrmals kreuzenden gebrochenen Linie etwas schwerfällig, und somit die Aufnahme des zum Beginn mit dem Probieren erforderlichen ersten a_h -Wertes ebenfalls; all dies erschwert die Konstruktion. Erst durch die Kombination der Kohnschen Konstruktion mit dem im nachstehenden zu erörternden Baranowschen Prinzip wird es ermöglicht, daß bei der Bestimmung sämtlicher Eigenfrequenzen die gebrochene Linie der Konstruktion sich so übersichtlich wie bei der Konstruktion der höchsten Eigenfrequenz gestaltet.

Mit Hilfe des Baranowschen Prinzips [10] wird, in Kenntnis der zu irgendeiner Eigenfrequenz gehörenden Schwingungsform, vom System nach Bild 1, das m Freiheitsgrade besitzt, oder aber sich nur in den Randbedingungen von ihm unterscheidet, ein Freiheitsgrad und die als Ausgangsbasis gewählte Eigenfrequenz in der Weise gleichsam »abgespalten«, daß die Eigenfrequenzen des verbliebenen Systems mit den Eigenfrequenzen des ursprünglichen Systems (mit Ausnahme der als Ausgangsbasis gewählten Eigenfrequenz) der Reihe nach übereinstimmen sollen. Diese Abspaltung gestaltet sich auch dann am anschaulichsten, wenn die höchste Eigenfrequenz »abgespaltet« wird.

Das mit seinem Namen verbundene Prinzip wurde von Baranow im Jahre 1931 publiziert [9]. Diese Arbeit ist jedoch nach den Autoren, die sich mit dieser Frage befaßten [3], [11], nicht zugänglich. Im Jahre 1932 publizierte Baranow sein Verfahren, das in der Kombination der Kutzbachschen Konstruktion mit seinem Abspaltungsprinzip besteht, auch in der Zeitschrift V. D. I. [10], doch brachte er hier keinen Beweis; in dieser Hinsicht verwies er auf [9]. So wurde von Klotter [3], in Unkenntnis des Beweises, die Methode als ein Näherungsverfahren mit überraschend hoher Genauigkeit bezeichnet. Erst Haug [11] wies darauf hin, daß es sich hier um ein genaues Verfahren handelt, wobei er auch den Beweis des diesbezüglichen Verfahrens mitteilte. Den vollen Beweis erbrachte erst H. Schaefer [12], und später gab er noch einen Beweis, der in Anschaulichkeit dem früheren überlegen war [13]. Auch Pestel teilte einen ebenfalls anschaulichen Beweis mit [14].

Außer dem Baranowschen Abspaltungsprinzip sind noch zahlreiche andere Verfahren mit der gleichen Zielsetzung bekannt geworden, die als Deflation oder Verminderung der Ordnungszahl bezeichnet wurden [15]. Keines von diesen Verfahren konnte jedoch bisher in eine Form gebracht werden, die in Anschaulichkeit dem Baranowschen ebenbürtig wäre.

In Bild 4 wird das Baranowsche Abspaltungsprinzip an dem in Bild 3 bereits untersuchten Schwingungssystem veranschaulicht. In der Abbildung wurde die höchste Eigenfrequenz mit Hilfe der Kohnschen Konstruktion abermals bestimmt, und das aus dem ursprünglichen Schwingungssystem nach

der Baranowschen Vorschrift abgeleitete System, das um einen Freiheitsgrad weniger als das ursprüngliche besitzt, wurde in die Figur eingezeichnet. Die Art der Ableitung wurde durch Beschriftung angezeigt.

In Bild 5 wird eine bisher nicht angewandte Veranschaulichung vorgeführt, die zum einfachen Einprägen der Art der Abspaltung dient. Nach Bild 12 kann das Gerüst des abgespalteten Modells auch durch Zeichnung von Parallelogrammen dargestellt werden.

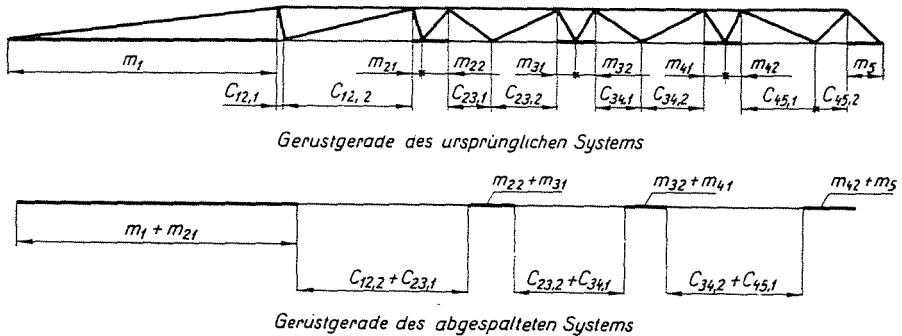


Bild 4. Die Baranowsche Abspaltung

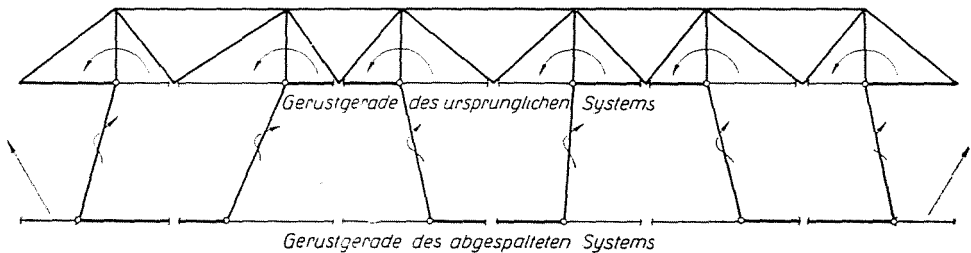


Bild 5. Die Veranschaulichung der Baranowschen Abspaltung durch Drehungen um 180°

Nach der obigen Vorbereitung kann Bild 6, die die Kombination der Kohnschen Konstruktion mit dem Baranowschen Prinzip an dem bereits untersuchten Schwingungssystem vorführt, ohne weitere Erklärung verstanden werden. Bei diesem Verfahren werden die Schwingungsformen dadurch erhalten, daß die gebrochene Linie der Kohnschen Konstruktion mit den bereits *bekannt*en Höhen, die den einzelnen Eigenkreisfrequenzen entsprechen, gezeichnet wird. Da die Höhen bekannt sind, erübrigt sich das Probieren, und *es wird gleichzeitig auch eine Kontrolle erhalten. Diese einfache Kontrolle empfiehlt sich auch dann, wenn es der Schwingungsformen nicht bedarf.*

Unser Verfahren kann ohne Schwierigkeit auch in die Form eines Rechenverfahrens gebracht werden. In dieser Form empfiehlt es sich, die Berech-

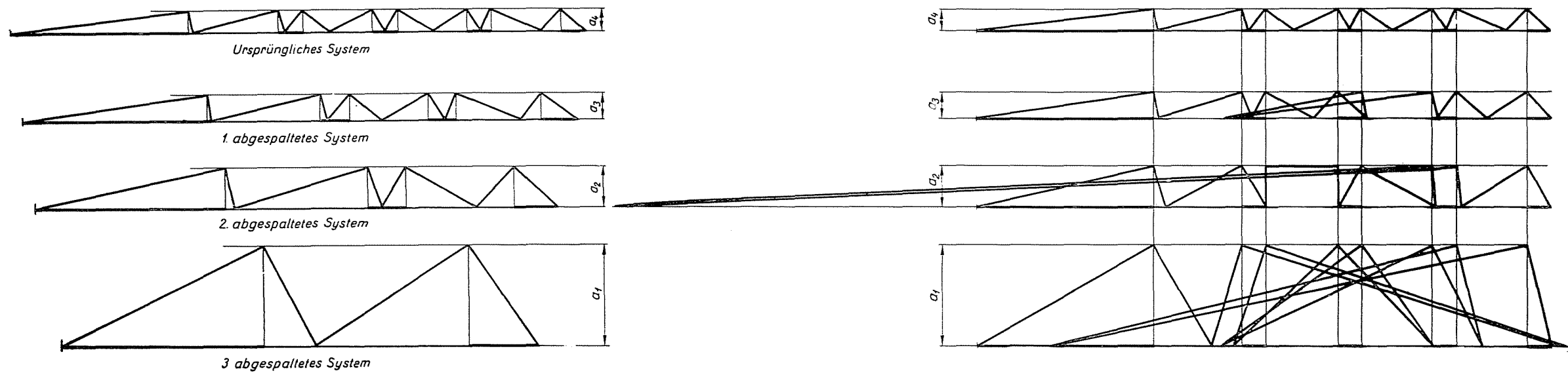


Bild 6. Graphische Form der durch Verbindung der Kohnschen Konstruktion mit dem Baranowschen Prinzip erhaltenen Methode zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und der Schwingungsformen

nung, z. B. in der im vorstehenden dargestellten Weise (siehe Tab. I), tabellarisch anzuordnen.

Bei vielen praktischen Eigenwertaufgaben (in erster Linie bei denen, die mit den Eigenfrequenzen der mechanischen Schwingungssysteme verknüpft sind) sind lediglich die ersten drei-vier kleinsten Eigenwerte interessant. In diesem Falle, wenn die Freiheitsgrade des in der Aufgabe vorkommenden Schwingungssystems (oder die des zur Aufgabe nach I. zugeordneten Systems) mehr als sieben—acht betragen, erscheint die Anwendung unseres Verfahrens als unbequem, da vor der Bestimmung der gesuchten Eigenfrequenzen erst die höheren nicht gesuchten Eigenfrequenzen bestimmt werden müssen. Die Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens ist jedoch äußerst einfach und schnell, und dank der beschriebenen Kontrollmöglichkeit ist auch eine Überhandnahme der Fehler nicht zu befürchten, so daß diese Unbequemlichkeit ohne Belang bleibt.

In dem Falle jedoch (wie z. B. bei der Untersuchung der Biegeschwings — Eigenfrequenzen bzw. der kritischen Umdrehungszahlen des Rotors eines Turbogenerators), wenn die in der ursprünglichen Aufgabe vorkommenden Matrizen \bar{B} und \bar{A} nicht von der Art der in (2) angeschriebenen \bar{E}_a und \bar{U}_a sind, wenn also zum Zwecke der Anwendbarkeit des vorgeschlagenen Verfahrens vorher die Falksche Abbildung ohnehin angewendet werden muß, kann für eine nicht singuläre Matrix \bar{A} auch diese etwaige Unbequemlichkeit eliminiert werden. An Stelle der ursprünglichen Eigenwertaufgabe

$$\lambda \bar{B} \cdot \bar{x} = - \bar{A} \cdot \bar{x} \quad (3)$$

wollen wir in diesem Fall zur Eigenwertaufgabe

$$\lambda^* \bar{B}^* \bar{x} = - \bar{A}^* \bar{x} \quad (4)$$

übergehen. Hier ist $\bar{B}^* = \bar{A}$ und $\bar{A}^* = \bar{B}$, und nun wollen wir die Falksche Abbildung anwenden. \bar{A} kann aus dem Grunde nicht singulär sein, weil bei der Abbildung auch $\bar{B}^{*-1} = \bar{A}^{-1}$ benötigt wird. In der Regel besitzt aber \bar{A} mehr von Null unterschiedliche Elemente als \bar{B} , und so hat der Übergang zu (4) nicht nur Vorteile, sondern auch den Nachteil zur Folge, daß an Stelle von \bar{B} die Reziproke von \bar{A} bestimmt werden muß. Die Eigenwerte λ^* dieser Aufgabe stellen die reziproken Werte der ursprünglichen Eigenwerte dar. Auf diese Weise werden die Eigenfrequenzen bereits in der gewünschten Reihenfolge erhalten. Wegen des erwähnten Nachteils kann erst in einem konkreten Fall entschieden werden, ob es dafür steht, das hier geschilderte Verfahren mit den λ^* anzuwenden.

Die am Anfang des Abschnittes unter den Punkten a), b), c) und d) angeführten Vorteile werden durch die vorangehenden Erörterungen bestätigt.

In den nun folgenden zwei Abschnitten wollen wir das unter den Punkten e) und f) Gesagte ausführlicher behandeln.

3. Die Eigenfrequenzen (Eigenwerte) und Schwingungsformen (Eigenvektoren) bestimmende elektrische Schaltung

Die von mir vorgeschlagene elektrische Schaltung [7] ahmt der die höchste Eigenfrequenz liefernden Kohnschen Konstruktion dadurch nach, daß die Einzeichnung der gebrochenen Linie durch die Bildung entsprechender Wheatstone-Brücken und die nacheinander erfolgende Ausgleiche derselben ersetzt wird. Die Schaltung enthält in ihrer einfachsten Form lediglich ohmsche Widerstände, und kann mit einer Gleichstromquelle betätigt werden. An Stelle der ohmschen Widerstände können auch sonstige Elemente mit veränderlicher Impedanz und an Stelle des Gleichstromes auch Wechselstrom verwendet werden.

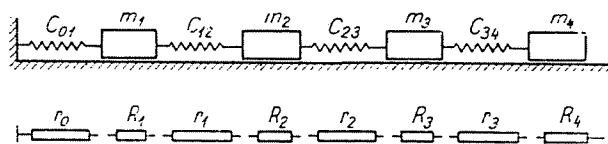


Bild 7. Die den Elementen des Schwingungssystems entsprechenden ohmschen Widerstände

Für die Massen und Federkonstanten nehmen wir die Widerstandsmaßstäbe m_D ($\text{Ohm}/\text{kg sec}^2 \text{ cm}^{-1}$) bzw. c_D ($\text{Ohm}/\text{cm kg}^{-1}$) an, und auf Grund dieser Maßstäbe lassen wir jeder Masse und Federkonstante je einen ohmschen Widerstand entsprechen. Die Buchstaben, die die ohmschen Widerstände bezeichnen, und den einzelnen Elementen des zur Erklärung aufgenommenen Schwingungssystems entsprechen, wurden in Bild 7 angeführt. Aus den Widerständen werden nun der Reihe nach verschiedene Wheatstone-Brücken gebildet. Die erste Brücke wird gebildet, indem R_1 versuchsweise in R_{11} und R_{12} geteilt wird, und nun suchen wir, welcher mit r_{11} zu bezeichnender Anteil von r_1 zum Ausgleich der Brücke a) des Bildes 8 erfordert wird. Im Falle der Ausgeglichenheit gilt $r_0 \cdot R_{11} = R_{12} \cdot r_{11}$. In der nun folgenden Stufe wird vom restlichen Anteil von r_1 (der $r_{12} = r_1 - r_{11}$ beträgt) ausgegangen und die Brücke b) gebildet, wobei durch Ausgleich R_{21} bestimmt werden muß. Anschließend werden der Reihe nach die Brücken c), d), e) und f) verbunden und ausgeglichen. Hierdurch werden die der Kohnschen Konstruktion entsprechenden Operationen durchgeführt. Wenn im Laufe des Probierens $R_{41} = R_4$ erhalten wird, so kann a_4 aus den in der letzten Stufe des Probierens erhaltenen Wider-

standswerten folgendermaßen berechnet werden :

$$a_4 = \sqrt{\frac{m_{\Omega} \cdot c_{\Omega}}{r_0 \cdot R_{11}}}$$

An Stelle von $r_0 \cdot R_{11}$ kann das Produkt aus den »gegenüberstehenden« Widerständen einer beliebigen (in der letzten erfolgreichen Stufe des Probierens erhaltenen) Brücke genommen werden.

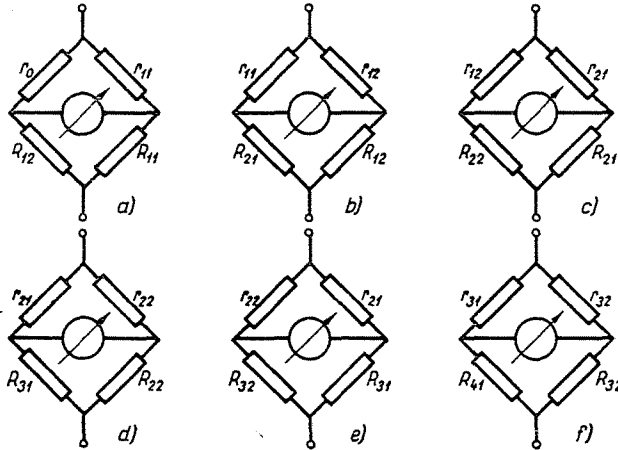


Bild 8. Die durch die halbautomatische Schaltung des Bildes 9 gebildeten Wheatstone-Brücken. Brücke a) wird in Stellung A des am Fuße des Bildes 9 gezeichneten Schleifkontaktes gebildet, usw.

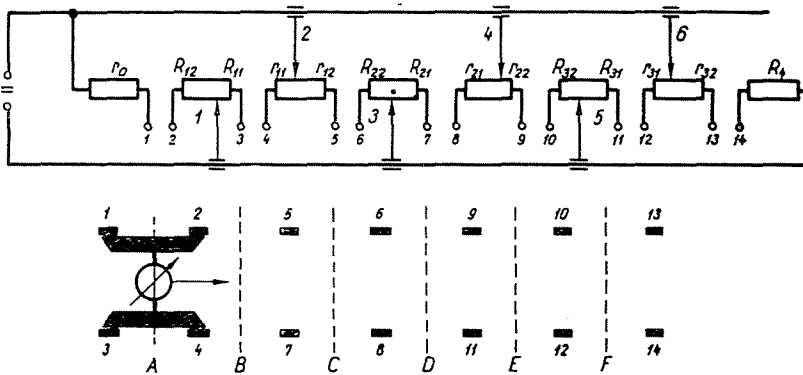


Bild 9. Halbautomatische elektrische Schaltung zur Bestimmung der Eigenfrequenz und der Schwingungsform. Die mit gleichen Zahlen bezeichneten Punkte müssen als mit Leitern verbunden gedacht werden

Mit Hilfe der in Bild 9 dargestellten Schaltung kann das obige Probieren halbautomatisch vorgenommen werden. R_{11} wird mit Hilfe des Schleifkontaktes

1 eingestellt, die Kontakte des Galvanometers werden in Stellung *A* geschoben, und der Zeiger des Galvanometers mit Schleifer 2 auf Null eingestellt. Nun werden die Kontakte des Galvanometers in die Stellung *B* geschoben, und der Zeiger des Galvanometers wird mit Hilfe des Schleifers 3 wieder auf Null eingestellt, usw. Die letzte Stufe des ersten Probierens besteht darin, daß die Kontakte des Galvanometers in Stellung *F* gestellt werden; zeigt hierbei das Galvanometer Null an, so gelang es, den Schleifer 1 richtig einzustellen. Zeigt jedoch das Galvanometer nicht Null an, so wird Schleifer 1 in einem neuen Versuch in dem entsprechenden Sinne verschoben, und das ganze Verfahren wird so lange wiederholt, bis das Galvanometer in Stellung *F* Null anzeigt.

In Kenntnis der zur höchsten Eigenfrequenz gehörenden Widerstandsteilungspunkte werden nun durch Anwendung des Baranowschen Prinzips die den Elementen des abgespaltenen Schwingungssystems entsprechenden Widerstandswerte bestimmt und eingestellt, und durch Bildung von sukzessiven Brückenschaltungen und durch ihren Ausgleich wird nun die höchste Frequenz auch dieses neuen Systems bestimmt, usw.

Auch bei Verwendung der im vorangehenden beschriebenen Schaltung empfiehlt es sich, eine der Tabelle I ähnliche Tabelle anzuwenden.

Auf Grund der beschriebenen Prinzipien hat Herr Győző Ludvig, Adjunkt an der Technischen Hochschule in Budapest, freundlicherweise die Pläne einer solchen Einrichtung entworfen (nach seinen Plänen wird die Einstellung und auch die Ablesung der Widerstände in Brückenschaltung, durch Ausgleich vorgenommen), und die Einrichtung wurde durch die Gefälligkeit der Herren Professoren Muttnyánszky und Reuss in der Werkstätte des Lehrstuhls I. für Technische Mechanik von Herrn Werkstattaufseher Imre Galaczi auch fertiggestellt. Auch an dieser Stelle will ich ihnen allen meinen herzlichsten Dank aussprechen. Herr Győző Ludvig sammelte über die Genauigkeit der Vorrichtung recht gute Erfahrungen. Das Grundprinzip und den Aufbau des Apparates und über die an demselben gesammelten Erfahrungen hat er im Herbst des Jahres 1958 in Budapest abgehaltenen Internationalen Kongreß für Meßtechnik berichtet.

Die oben beschriebene elektrische Schaltung kann mit Hilfe entsprechender Hilfseinrichtungen auch automatisch betätigt werden.

4. Mechanismus zur Bestimmung der Eigenfrequenz (Eigenwert) und der Schwingungsform (Eigenvektor)

Der Umstand, daß die gebrochene Linie der auf das gegebene Schwingungssystem gezeichneten Kohnschen Konstruktion durch eine einzige Angabe bestimmt wird, ermöglicht, das Probieren mit Hilfe eines Mechanismus mit nur einem Freiheitsgrad durchführen zu können. Der entworfene Mechanismus

eignet sich unmittelbar nur zur Bestimmung der höchsten Eigenfrequenz, doch können durch Anwendung des Baranowschen Prinzips mit seiner Hilfe alle Eigenfrequenzen bestimmt werden.

Ein auf an seinen beiden Enden freies Modell konstruierter Mechanismus mit drei Freiheitsgraden wird in Bild 10 dargestellt. Die mit Doppelkreisen bezeichneten Zapfen können entsprechend den Daten des Modells eingestellt und nach erfolgter Einstellung fixiert werden. Die übrigen Zapfen können sich in der fixierten, starren Führung »a« bewegen. Die Geradföhrung des Wagens »b« wird durch die Schienen »c« gesichert. Um die Zapfen am Wagen »b« können sich starre, rechtwinklige Kniehebel drehen.

Die Schenkel der Kniehebel sitzen in der gezeichneten Weise auf den geradegeföhrten Zapfen des Wagens »a« auf; der äußerste linke Schenkel

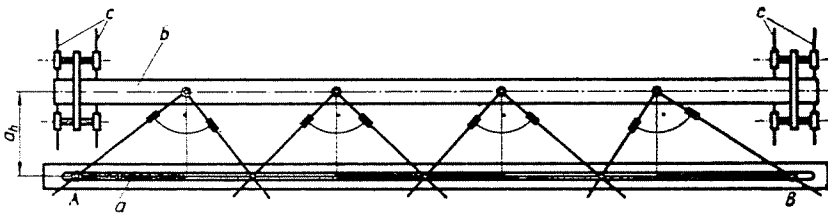


Bild 10. Mechanismus zur Bestimmung der höchsten Eigenfrequenz und der ihr angehörenden Schwingungsform. Als Geradföhrung wurde der Einfachheit halber eine Gleitbahn gezeichnet. In Wirklichkeit muß diese zur Verringerung der Reibung durch einen geradegeföhrnden Gelenkmechanismus (z. B. mit Lipkin—Paucellierschen Inversoren) verwirklicht werden

sitzt auf dem (mit einem Doppelkreis bezeichneten) festgehaltenen Zapfen auf. Der äußerste rechte Hebelarm wird freigelassen; dieser ist nicht gezwungen auf dem Zapfen B aufzusitzen. Wird der Wagen »b« auf der Schiene »c« auf- und abwärts bewegt, so bewegt sich der äußerste rechte Hebelarm fächerartig hin und her. Der Wagen »b« muß in die Lage eingestellt werden, in welcher dieser Hebelarm durch den Punkt B hindurchgeht. Auf Grund des Voranstehenden wird es klar, daß in dieser Lage aus dem auf einer entsprechenden Skala (z. B. mit Hilfe eines Nonius) abgelesenen Abstand a_h die höchste Eigenkreisfrequenz mit Hilfe der Gleichung

$$\alpha = \frac{\sqrt{m_x \cdot c_x}}{a_h}$$

berechnet werden kann. In dieser Stellung können auch die zur Anwendung der Baranowschen Abspaltung notwendigen Daten abgelesen werden.

Durch Verbindung mehrerer solcher Mechanismen wird die Ablesung der Daten des abgespaltenen Systems und die Neueinstellung des Mechanismus auf Grund dieser Daten überflüssig werden. In Bild 12 wird ein Gelenk-

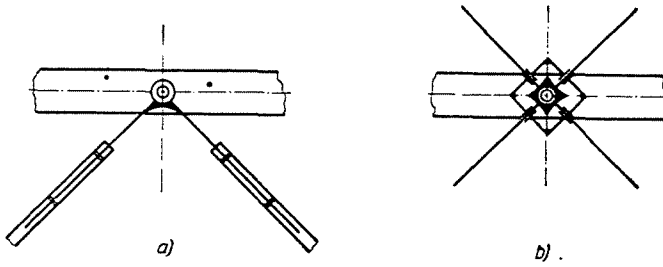


Bild 11. Zwei Ausbaumöglichkeiten der Kniehebel des die Eigenfrequenz bestimmenden Mechanismus

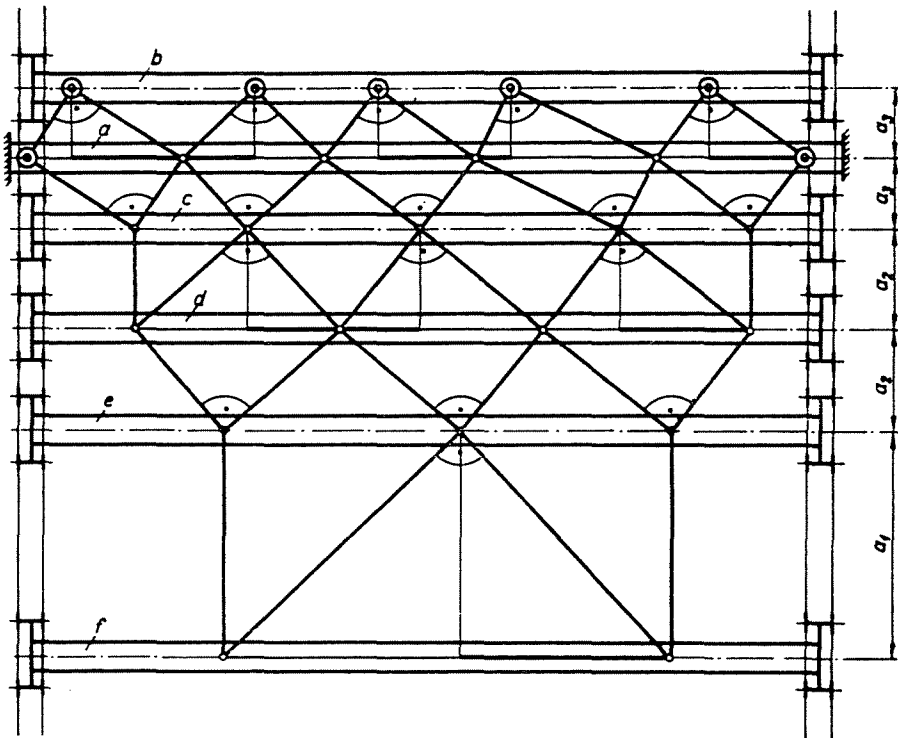


Bild 12. Gelenkketten-Netz zur Bestimmung sämtlicher Eigenfrequenzen und Schwingungsformen

ketten-Netz dargestellt, das zur Bestimmung sämtlicher Eigenkreisfrequenzen eines an einem Ende gebundenen Systems mit drei Freiheitsgraden dient. Nach Einstellung und Fixierung der mit Doppelkreisen bezeichneten Zapfen an den Wagen »a« und »b« und nach Verschieben des Wagens »b« in die entsprechende Lage wird a_3 aus dem Abstand a_3 in bekannter Weise erhalten. Der Wagen »c« wird nun in einem Abstand a_3 vom Wagen »a« eingestellt.

Diese Einstellung erübrigt sich, wenn es durch einen hier nicht eingezeichneten Mechanismus gesichert wird, daß der Abstand der Wagen »c« und »a« mit dem der Wagen »a« und »b« in jeder Lage des gezeichneten Mechanismus übereinstimmt. Hierdurch wird es erreicht, daß die zwischen die Wagen »a« und »c« eingefügten Kniehebel die entlang dem Wagen »c« beweglichen Zapfen entsprechend dem abgespaltenen Modell einstellen. Diese Kniehebel bilden nämlich mit den auf Wagen »b« aufsitzenden Parallelogramme, und diese führen die Umdrehungen nach Bild 5 um 180° automatisch aus. In der nächsten Stufe muß der Wagen »d« durch Verschieben auf seinen Schienen in die entsprechende Lage gebracht werden, wodurch der die Kreisfrequenz a_2 liefernde Abstand a_2 erhalten wird, usw.

Der über die beschriebenen Eigenschaften verfügende Mechanismus kann auf verschiedene Arten ausgeführt werden. Die Kniehebelarme können z. B. in der teleskopartigen Ausführung nach Bild 11a oder in einer Ausführung nach Bild 11b verfertigt werden. Die Führungen müssen überall mit Laufrollen ausgeführt werden, um die Möglichkeit einer Selbstsperrung zu vermeiden; eventuell muß das den Mechanismus tragende Tischchen in steter Vibration gehalten werden. Aus dem gleichen Grunde müssen die Geradföhrungen als geradeföhrnde Gelenkmechanismen (z. B. mit Lipkin—Paucellierschen Inversoren) ausgebildet werden.

5. Zeitbedarf und Genauigkeit des beschriebenen Verfahrens

Bei der graphischen Form des Verfahrens erfordert die Bestimmung einer Eigenfrequenz etwa 10—60 Minuten, wobei sich der höhere Wert auf die Bestimmung der höheren Eigenfrequenzen eines Systems mit mehr Freiheitsgraden, der geringere Wert auf die Bestimmung von niedrigeren Eigenfrequenzen bezieht. Der Fehler in der graphischen Bestimmung der einzelnen Eigenfrequenzen ist nicht größer als bei den üblichen graphischen Konstruktionen.

Natürlich kann die Genauigkeit der rechnerischen Form des Verfahrens beliebig gesteigert werden.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein genaues und schnell ausführbares, in erster Linie graphisches Verfahren beschrieben, das zur zahlenmäßigen Lösung von technischen und theoretischen Eigenwertaufgaben dient. Es wird auch eine zu dem nämlichen Zwecke dienende elektrische Schaltung und ein Mechanismus beschrieben. Die beschriebenen Methoden können unmittelbar nur auf ein Schwingungssystem nach Bild 1, oder auf Schwingungssysteme, die sich von diesem nur in den Randbedingungen unterscheiden, angewendet werden; durch die vorherige Anwendung der Falkschen Abbildung [2] können jedoch außer den Eigenwertaufgaben der Schwingungslehre auch die ganz allgemeinen Eigenwertaufgaben nach (1) mit Hilfe des Verfahrens gelöst werden.

Literatur

1. HENCKY, H.: Über die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum mittels der elastischen Gelenkkette, *Der Eisenbau* 7, 437 (1920).
2. FALK, S.: Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette, *Ing. Arch.* 23, 314 (1955).
3. KLOTTER, K.: Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigen-schwingungen von Maschinenwellen, *Ing. Arch.* 17, 1 (1949).
4. Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, Maschinenbau (Teil A), 28. Auflage, 1954, 332.
5. HAUG, K.: Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen, Springer, Berlin 1952. 93, 94, 97.
6. WEIGAND, A.: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen, Band II. VEB Verlag Technik, Berlin 1958. 159.
7. BOSZNAY, Á.: Többszabadságfokú lengőrendszerék sajátkörfrekvencia- és gerjesztett lengéskép-meghatározásának egy módszeréről és annak gyakorlati alkalmazásáról, kandidátusi értekezés, Bpest 1956. 32. — (Über eine Methode und deren praktische Anwendung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen und der erregten Schwingungs-ausschläge von Schwingungssystemen mit mehreren Freiheitsgraden, Kandidats-dissertation, Bpest 1956. 32.)
8. KOHN, P.: Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Torsionsschwingungen von Wellen, *Maschinenbau* 5, 220 (1926).
9. BARANOW, G.: *Met. Ind. Herald*, Moskau, 11, 60 (1931).
10. BARANOW, G.: Zur Berechnung der Drehschwingungszahlen, *Z. VDI* 76, 184 (1932).
11. Siehe [5], 189—194.
12. SCHAEFER, H.: Reduktion eines linearen Eigenwertproblems zweiter Ordnung mit Hilfe einer bekannten Eigenfunktion, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* 5, 141 (1953).
13. SCHAEFER, H.: Über das Verfahren von Baranow und seine Erweiterung auf die Ermittlung der Eigenschwingungsformen von Schwingerketten, *Ing. Arch.* 23, 307 (1955).
14. PESTEL, E.: Anschauliche Herleitung und Beweis des Baranow—Schaefer-Verfahrens zum Ermitteln der Eigenschwingungszahlen und der Eigenschwingungsformen von Schwingerketten, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, Ausgabe B, 21, 154 (1955).
15. Siehe z. B. BODEWIG, E.: *Matrix calculus*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956. 304—311.

Dozent Á. BOSZNAY; Budapest V., Szerb utca 23. Ungarn.