

BESTIMMUNG DER ZAHNKOPFINTERFERENZ BEI INNENVERZAHNTEN ZAHNRADTRIEBWERKEN

Von

O. SZAMOSVÖLGYI

Lehrstuhl für Maschinenelemente an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 11. Februar 1959)

Die Anwendung von innenverzahnten Zahnrädern hat keine große Vergangenheit; vor ungefähr 20 Jahren nahm ihr allgemeiner Gebrauch seinen Anfang. Vermutlich verursachten es fabrikationstechnische Probleme und die Rückständigkeit der Konstrukteure, daß man sich von ihrem Gebrauch befremdete. In früheren Zeiten wendete man nur selten Innenverzahnungen an, wie z. B. in der Flugzeugindustrie; außerdem tauchten sie auch dort auf, wo keine allzu große Pünktlichkeit erforderlich war und große Übersetzungsverhältnisse zu erzielen waren. — Später wurden die Zweckmäßigkeit und die Bedeutung der innenverzahnten Planetengetriebe immer mehr bekannt. Da die Technologie die genaue Herstellung der Innenverzahnung ermöglichte, — gewann dieselbe überall dort an Bedeutung, wo bei relativ geringem Platzbedarf, verhältnismäßig hohe Leistungen bei großem Übersetzungsverhältnis zu übertragen waren. — Heutzutage ist dieselbe in der Fahrzeugindustrie, aber auch im Maschinenbau allgemein, ein bekanntes und angewandtes Konstruktionselement.

Bei den innenverzahnten Zahnradgetrieben entstehen mannigfache geometrische Probleme. Beim Ineinandergreifen von einem innen- und einem außenverzahnten Zahnrad kann es vorkommen — wenn die Zähnezah der Beiden nahezu gleich ist —, d. h. der Modul nach $i = 1$ gravitiert, daß die Punkte des Kopfkreises am außenverzahnten Rad mit den Zahnsitzen des innenverzahnten Rades stoßen. Dieser Stoß wird Zahnkopffinterferenz genannt und im Laufe unserer Untersuchungen weiter verfolgt.

Der mathematische Ausdruck dieser geometrischen Erscheinung wurde mit verschiedenen Methoden gelöst. Es handelt sich eigentlich darum, daß während des Abwälzens, — die Kopfpunkte des außenverzahnten Rades, im Verhältnis zum innenverzahnten Rad, — eine Bahn beschreiben. Wenn wir die relative Lage dieser Bahn zum innenverzahnten Zahnprofil konstruieren, erhalten wir die Relativbahn. Wenn nun diese Relativbahn das innenverzahnte Zahnprofil schneidet, haben wir es mit der Erscheinung der Zahnkopffinterferenz zu tun. Wenn die Beiden keinen Schnittpunkt ergeben, so besteht keine Interferenzerscheinung. — In Bild 1 wurde die Relativbahn der

Zahnspitze A eines außenverzahnten Rades, gegenüber dem Profil eines innenverzahnten Rades dargestellt.

Aus dieser Abbildung können im weiteren Verlauf der Betrachtungen — viele lehrreiche Schlüsse gezogen werden. Beobachten wir die Form der Relativbahn in Abhängigkeit der Durchmesser der außen- und innenverzahnten Räder.

a) Je kleiner der Unterschied zwischen den Wälzkreisen ist, um so größer wird der Krümmungsradius der Seitenlinie der Relativbahn, und um so mehr werden die beiden Zweige der Bahnlinie divergieren. Dies bedeutet — falls der Unterschied zwischen den Wälzkreisradien klein ist —, daß die Relativ-

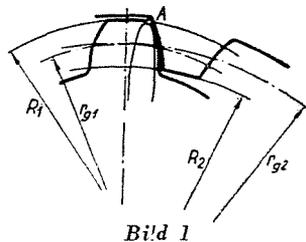


Bild 1

bahn das innenverzahnte Zahnprofil schneiden und somit eine Zahnkopfinterferenz erzeugen kann.

b) Wird hingegen die Differenz zwischen den Wälzkreisen vergrößert, so wird der Krümmungsradius der Seitenlinie der Relativbahn immer kleiner, die Seitenlinien werden immer mehr konvergieren und können sich sogar schneiden.

Falls sich, infolge der Korrektur, die Wälzkreise immer mehr nach außen, — in Richtung des Kopfkreises des außenverzahnten Rades verlagern — und der Wälzkreisradius des außenverzahnten Rades im Verhältnis zu dem, des innenverzahnten Rades zu klein wird — könnte folgender Fall eintreten: das innenverzahnte Zahnprofil würde die, dem Drehsinn entgegengesetzte Seite der Schleife der Relativbahn schneiden. Dies würde bedeuten, daß bevor der Punkt A des außenverzahnten Rades aus der Zahnücke herausgetreten wäre, — vom Kopfpunkt des innenverzahnten Rades überholt und abgeschnitten würde. In diesem Falle wäre ein so kleiner Wälzkreisradius des außenverzahnten Rades angebracht, — daß in der Praxis so eine Möglichkeit verneint werden kann. Eben deshalb wird nur der im Punkt a) angeführte Fall erörtert, weil ausschließlich dieser Gefahren in sich birgt.

I. Buckingham bediente sich bei seinen theoretischen Betrachtungen — bezüglich der Bestimmungen der Punkte der Relativbahn — der analytischen Methode.

Aus Bild 2 entnehmen wir auf Grund des Cosinus-Satzes den Wert des Radiusvektors

$$r_p = \sqrt{a^2 + R_1^2 + 2a \cdot R_1 \cdot \cos \xi_1} \quad (\text{I-1})$$

Der Zusammenhang zwischen ξ_1 und ξ_2 folgt aus der gleitfreien Abwälzung

$$\xi_2 = \frac{r_{g^1}}{r_{g^2}} \cdot \xi_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \xi_1 \quad (\text{I-2})$$

Ebenfalls aus Bild 2 ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\sin(\xi_2 + \vartheta) = \frac{R_1 \sin \xi_1}{r_p} \quad (\text{I-3})$$

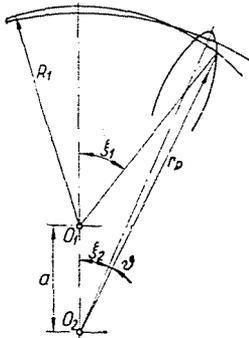


Bild 2

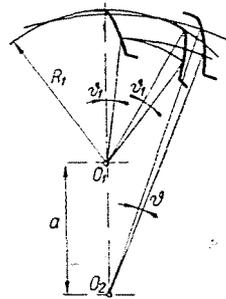


Bild 3

Diese Gleichung nach ϑ gelöst, ergibt sich zu

$$\vartheta = \text{Arc sin} \frac{R_1 \sin \xi_1}{r_p} - \xi_2 \quad (\text{I-4})$$

Bei den außen- und innenverzahnten Rädern ist es notwendig, den Zusammenhang der Evolventenwinkeln zu bestimmen.

Mit den Bezeichnungen des Bildes 3, ist

$$\vartheta = \frac{r_{g^1}}{r_{g^2}} \vartheta_1 \quad (\text{I-5})$$

Nun bestimmen wir denjenigen Verdrehungswinkel des außenverzahnten Rades, bei welchem sich die Kopfkreise der innen- und der außenverzahnten

Rädern schneiden, d. h. wenn der Radiusvektor der Relativbahn gleich dem Radius des Kopfkreises des innenverzahnten Rades ist. Dies ergibt sich aus der Gleichung (I-1), wenn für r_p der Wert von R_2 eingesetzt wird :

$$\cos \xi_1 = \frac{R_2^2 - a^2 - R_1^2}{2 a R_1} \quad (\text{I-6})$$

Bestimmen wir beim innenverzahnten Rad denjenigen — am Grundkreis gemessenen Wert in Radian —, welcher vom Ausgangspunkt A der Zahn-evolvente der Innenverzahnung, bis zum Schnittpunkt der Relativbahn reicht.

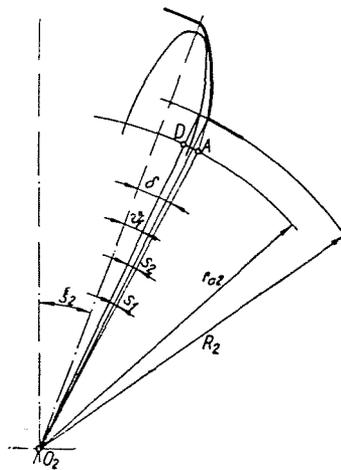


Bild 4

Dieser Wert sei mit s_1 bezeichnet. Es sei weiterhin durch Projizierung des Schnittpunktes der Relativbahn und des innenverzahnten Rades — der Winkelwert des Grundkreispunktes D vom Ausgangspunkt A der vorigen Evolvente bestimmt. Dieser erhalte die Bezeichnung s_2 . Durch den Vergleich der beiden Werte wird entschieden, ob eine Zahnkopffinterferenz vorhanden ist.

Die obenerwähnten Entfernungen sind durch Berechnung folgender Daten in Bogenmaß bestimmbar :

Die Entfernung zwischen dem Ausgangspunkt der Evolvente am Grundkreis des innenverzahnten Rades und der Symmetrieachse der Relativbahn des Zahnkopfes des außenverzahnten Rades,

und die Entfernung zwischen dem Schnittpunkt der Relativbahn mit dem Kopfkreis des innenverzahnten Rades, — und dem Schnittpunkt mit der Symmetrieachse der Relativbahn. Dies veranschaulicht Bild 4.

Der Winkel ϑ_f wird aus der Gleichung (I-4) derart bestimmt, daß an Stelle von r_p , R_2 gesetzt wird.

$$\vartheta_f = \text{Arc sin } \frac{R_1 \sin \xi_1}{R_2} - \xi_2 \quad (\text{I-7})$$

Der Ausdruck für den Winkel δ wird lauten :

$$\delta = \frac{z_1}{z_2} (\text{Inv } \varepsilon_{f1} - \text{Inv } \varepsilon) + \text{Inv } \varepsilon \quad (\text{I-8})$$

wobei ε_{f1} der Kopfwinkel des außenverzahnten Rades und ε der Anschlußwinkel ist.

Hingegen kann der Kopfwinkel aus der bekannten Beziehung berechnet werden :

$$\cos \varepsilon_{f1} = \frac{r_{a1}}{R_1} \quad (\text{I-9})$$

$$\cos \varepsilon_{f2} = \frac{r_{a2}}{R_2} \quad (\text{I-10})$$

Der Wert von s_1 wird nichts weiter, als die Involute des Kopfwinkels des innenverzahnten Rades sein :

$$s_1 = \text{Inv } \varepsilon_{f2} = \text{Inv Arc cos } \frac{r_{a2}}{R_2} \quad (\text{I-11})$$

Der Wert von s_2 ergibt sich aus den Winkeln δ und ϑ_f

$$s_2 = \delta - \vartheta_f \quad (\text{I-12})$$

Nach Buckingham lautet also das Kriterium der Interferenz :

es besteht Interferenz, wenn $s_1 > s_2$

es besteht keine Interferenz, wenn $s_1 < s_2$

im Grenzfall der Interferenz ist $s_1 = s_2$

II. Diker und Watts versuchten die Erscheinung der Zahnkopferferenz auf einem anderen Weg zu bestimmen, welcher verhältnismäßig leichter zu befolgen war, jedoch ergaben sich die Resultate als komplizierter, als diejenigen Buckingham's.

Ihre Überlegungen versuchen wir auf Grund des Bildes 5 zu verfolgen. Als Ausgangspunkt sei die Stellung gewählt, in dem der Kopfpunkt des außenverzahnten Rades sich mit dem Evolventenpunkt des innenverzahnten Rades berührt, — also im Punkte B . In diesem Falle ist der Kopfpunkt des innenverzahnten Rades C , und der Ausgangspunkt der Evolvente der Innenverzahnung A . Die aus dem Punkt C , zum Grundkreis der Innenverzahnung gelegte Tangente berührt denselben im Punkte G . Der Winkel zwischen \overline{CO}_2 und \overline{GO}_2 ist ε_{f_2} , d. h. der Kopfwinkel des innenverzahnten Rades. Hingegen liegt zwischen \overline{CO}_2 und \overline{AO}_2 der Winkel $\text{Inv } \varepsilon_{f_2}$, d. h. die Involute des Kopf-

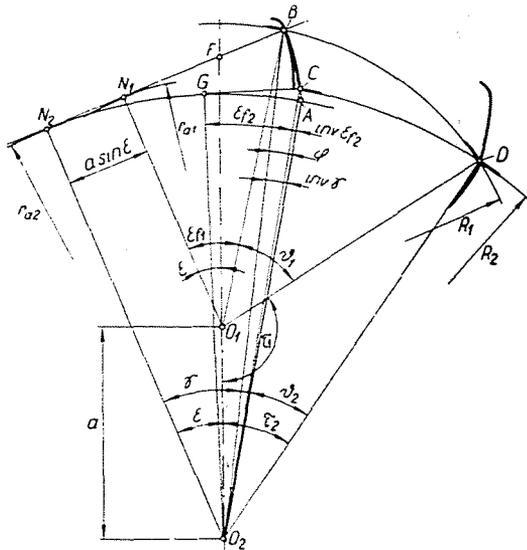


Bild 5

winkels des innenverzahnten Rades. Der Winkel zwischen \overline{BO}_1 und $\overline{N}_1\overline{O}_1$ ist ε_{f_1} und ist der Kopfwinkel des außenverzahnten Rades. Wenn der Winkel zwischen \overline{BO}_2 und $\overline{N}_2\overline{O}_2$, γ bezeichnet wird, dann wird der Wert des Winkels zwischen \overline{BO}_2 und \overline{AO}_2 , $\text{Inv } \gamma$ sein. Aus der Abbildung geht hervor, daß

$$\text{Arc } \varphi = \text{Inv } \gamma - \text{Inv } \varepsilon_{f_2} \quad (\text{II}-1)$$

Der Winkel γ kann hingegen aus dem Dreieck $\overline{BN}_2\overline{O}_2$ bestimmt werden :

$$\text{tg } \gamma = \frac{a \sin \varepsilon + R_1 \sin \varepsilon_{f_1}}{r_{a2}} \quad (\text{II}-2)$$

Die Winkel ε_{f_1} und ε_{f_2} sind aus den bereits angeführten Gleichungen (I-9) und (I-10) zu bestimmen.

Das Rad wird nun derart verdreht, daß der Kopfpunkt des außenverzahnten Rades im Punkte D in den Kopfkreis des innenverzahnten Rades gelangen soll. Der Verdrehungswinkel des außenverzahnten Rades um seine eigene Achse sei ϑ_1 , und der des innenverzahnten Rades sei ϑ_2 . Der dargestellte Fall ist genau der Grenzfall der Zahnkopffinterferenz, als die Zahnkopfpunkte der beiden Räder in einem einzigen Punkt zusammenfallen. Aus dem Dreieck DO_1O_2 ist mit Hilfe des Cosinus-Satzes der Hilfswinkel τ_1 und τ_2 zu bestimmen.

$$\cos \tau_1 = \frac{R_1^2 + a^2 - R_2^2}{2 R_1 a} \quad (\text{II-3})$$

$$\cos \tau_2 = \frac{R_2^2 + a^2 - R_1^2}{2 R_2 a} \quad (\text{II-4})$$

In Kenntnis dieser Winkeln sind aus der Abbildung die Hilfswinkel ϑ_1 und ϑ_2 zu berechnen:

$$\vartheta_1 = 180^\circ + \varepsilon - (\varepsilon_{f1} + \tau_1) \quad (\text{II-5})$$

$$\vartheta_2 = \tau_2 + \varepsilon - (\gamma + \varphi) \quad (\text{II-6})$$

Interferenz wird eintreten, wenn der Zahnkopfpunkt des außenverzahnten Rades vom Punkt B früher in den Punkt D gelangt, als der Punkt C des innenverzahnten Rades. D. h.

$$\frac{\vartheta_1}{\omega_1} < \frac{\vartheta_2}{\omega_2}$$

Die Ungleichheit ändert sich nicht, wenn beide Seiten mit ω_2 multipliziert werden, also

$$\vartheta_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} < \vartheta_2$$

Die Winkelgeschwindigkeiten sind hingegen mit der Zähnezahl umgekehrt proportional, so daß

eine Zahnkopffinterferenz besteht, wenn $\vartheta_1 \frac{z_1}{z_2} < \vartheta_2$

es besteht keine Zahnkopffinterferenz, wenn $\vartheta_1 \frac{z_1}{z_2} > \vartheta_2$

der Grenzfall der Interferenz tritt ein, wenn $\vartheta_1 \frac{z_1}{z_2} = \vartheta_2$

Diese Ableitung ist einfacher zu verfolgen, als diejenige Buckinghams, aber es sind viele Hilfswinkel zu berechnen, um feststellen zu können, ob bei einem bestimmten Wert die Erscheinung der Interferenz besteht, oder nicht.

III. Wir geben ein Verfahren zur Bestimmung der Zahnkopffinterferenz bekannt, das den Vorteil aufweist, daß das Vorhandensein der Interferenz auf Grund der geometrischen und Revisionsdaten des gegebenen Zahnrades einfach zu entscheiden ist, mit besonderer Hinsicht auf die Abmessungen des Zahnkopfes.

Aus Bild 6 geht hervor, daß aus dem Gesichtspunkt der Zahnkopffinterferenz, der mit A bezeichnete Kopfpunkt am gefährlichsten ist. Es genügt also zu entscheiden, ob dieser Punkt ohne Stoß in die Zahnücke einrollen kann.

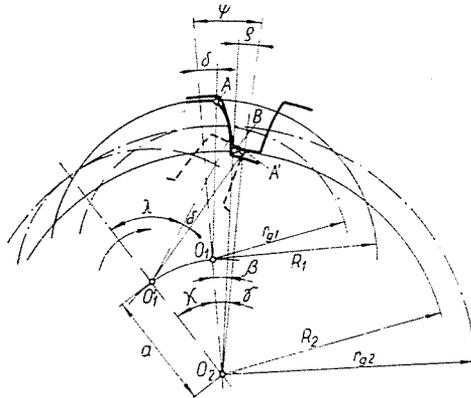


Bild 6

Im Falle eines, — in der Abbildung entgegengesetzt gerichteten Abrollens wird der gegenüber Punkt A liegende Kopfpunkt der Gefährliche, — aber der Symmetrie halber ergeben sich dieselben geometrischen Resultate. Die Ergebnisse der Untersuchungen sind also für das Abwälzen nach beiden Richtungen gültig.

Es kann keine Zahnkopffinterferenz auftreten, wenn die Relativbahn des Punktes A , das Kopfband nicht schneidet. Es ist aber nicht notwendig, die ganze Relativbahn zu kennen; es genügt, wenn der Punkt am Kopfkreis des innenverzahnten Rades bekannt ist. Dieser Punkt ist mittels geometrischer Zusammenhänge bestimmbar. Die Formel wurde auf Grund folgender Voraussetzungen und Überlegungen aufgestellt:

a) Die — die Mittelpunkte O_1O_2 verbindende Gerade sei die Symmetrieachse des Zahnes am außenverzahnten Rad und gleichzeitig der Zahnücke des innenverzahnten Rades. Diese wird als Ausgangsstellung betrachtet.

b) Nun rollen wir das außenverzahnte Rad am unbeweglichen innenverzahnten Rad ab. So verbleibt die Symmetrieachse der Zahnücke in der

ursprünglichen Lage. Das Abwälzen wird so lange fortgesetzt, bis der Punkt A am Kopfkreis des innenverzahnten Rades in die Stellung A' gelangt.

c) Die Verbindungsgerade zwischen dem Punkte B des innenverzahnten Rades und Punkt O_2 — schließt mit der, die Ausgangsstellung bestimmenden Symmetrieachse den Winkel β ein.

d) Der Winkel zwischen der Verbindungsgerade der Punkte A' und Mittelpunkt O_2 , — und der, die Ausgangsstellung bestimmenden Symmetrieachse sei mit γ bezeichnet.

e) Bis der Punkt A nach A' abrollt, gelangt der Mittelpunkt O_1 in die Stellung O_1' und $\overline{O_2O_1'}$ schließt mit der Symmetrieachse der Ausgangsstellung den Winkel \varkappa ein. Dies ist der Abwälzwinkel vom Mittelpunkt O_1 . Bis der Mittelpunkt O_1 nach O_1' abrollt, verdreht sich das außenverzahnte Rad um den Winkel λ , um die eigene Achse. Das Abrollen ist natürlich als gleitfrei vorausgesetzt.

f) Die relative Lage der Punkte A' und B zu einander entscheidet über das Vorhandensein der Interferenzerscheinung.

Bestimmung des Winkels β :

Mit ψ wurde der von dem Symmetrieachsen der Zahnücke und des Zahnes eingeschlossene Winkel bezeichnet, welcher dem Wert des halben Teilungswinkels gleichkommt, sodaß

$$\psi = \frac{360^\circ}{2z_2} \quad (\text{III}-1)$$

Mit ϱ bezeichnen wir den Winkel zwischen der, — die Punkte B und O_2 verbindenden Gerade — und der Symmetrieachse des Zahnes. Es ist zweckmäßig dessen Wert auf indirektem Wege zu bestimmen. Nachdem in den meisten Fällen Räder mit korrigierter Verzahnung verwendet werden — scheint es angebracht, — die Zahnkopfbreite am Kopfkreis zu kontrollieren. In deren Kenntnis, ist der Wert von ϱ in Bogenmaß zu berechnen.

$$\hat{\varrho} = \frac{vf_2}{2R_2}$$

Dieser Wert in Winkelmaß umgerechnet, ergibt :

$$\varrho = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{vf_2}{2R_2} \quad (\text{III}-2)$$

Aus der Abbildung ist es ersichtlich, daß der Winkel β sich als die Differenz von ψ und ϱ ergibt :

$$\beta = \psi - \varrho \quad (\text{III}-3)$$

Bestimmung des Winkels γ :

Da das Abwälzen gleitfrei ist, — entstehen an beiden Wälzkreisen Bögen gleicher Größe, d. h.

$$\varkappa r_{g2} = \lambda r_{g1} \quad (\text{III-4})$$

hieraus :

$$\lambda = \varkappa \frac{r_{g2}}{r_{g1}}$$

hingegen :

$$\frac{r_{g2}}{r_{g1}} = i$$

folglich :

$$\lambda = \varkappa \cdot i \quad (\text{III-5})$$

Unsere Voraussetzung lautete, daß der Punkt A gerade am Kopfkreis des innenverzahnten Rades liegt. Auf Grund der Bezeichnungen der Abbildung, kann aus dem Dreieck O_2O_1A' folgender Zusammenhang aufgestellt werden :

$$R_2^2 = R_1^2 + a^2 - 2R_1 a \cos [180^\circ - (\lambda + \delta)]$$

geordnet :

$$\frac{R_2^2 - R_1^2 - a^2}{2R_1 a} = \cos (\lambda + \delta)$$

$\lambda = \varkappa i$ eingesetzt :

$$\frac{R_2^2 - R_1^2 - a^2}{2R_1 a} = \cos (\varkappa i + \delta) \quad (\text{III-6})$$

Gleichfalls aus diesem Dreieck ergibt sich, daß

$$R_1^2 = R_2^2 + a^2 - 2R_2 a \cos (\varkappa + \gamma)$$

geordnet :

$$\frac{R_2^2 + a^2 - R_1^2}{2R_2 a} = \cos (\varkappa + \gamma) \quad (\text{III-7})$$

Wenn

$$\frac{R_2^2 - R_1^2 - a^2}{2R_1 a} = C_1$$

und

$$\frac{R_2^2 - R_1^2 + a^2}{2 R_2 a} = C_2$$

Bezeichnung eingeführt wird, so können die beiden vorigen Gleichungen wie folgt geschrieben werden :

$$C_1 = \cos (z i + \delta) \quad \text{und} \quad (\text{III}-8)$$

$$C_2 = \cos (z + \gamma) \quad (\text{III}-9)$$

Hingegen ist

$$z + \gamma = \text{Arc cos } C_2$$

hieraus

$$z = \text{Arc cos } C_2 - \gamma$$

und nach Substitution

$$C_1 = \cos (i \text{Arc cos } C_2 - i \gamma + \delta)$$

geordnet :

$$C_1 = \cos (i \text{Arc cos } C_2 + \delta - i \gamma)$$

Nehmen wir dessen Arcus, ordnen wir die Gleichung und dividieren mit i :

$$\gamma = \text{Arc cos } C_2 - \frac{1}{i} \text{Arc cos } C_1 + \frac{\delta}{i} \quad (\text{III}-10)$$

Der Winkel δ kann zweckentsprechend ebenfalls aus dem Maß des Kopfbandes bestimmt werden

$$\delta = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{v_{f1}}{2 R_1}$$

Folgende Zusammenhänge bestimmen die Zahnkopffinterferenz :

es gibt keine Interferenz, wenn $\beta > \gamma$

Grenzfall der Interferenz, wenn $\beta = \gamma$

Interferenz ist vorhanden, wenn $\beta < \gamma$

Die in den Abbildungen und Berechnungen vorkommenden, genormten Buchstabenzeichen sind laut den ungarischen Normen MSZ 2792 benutzt worden.

| | | |
|---------------|---|---|
| r_1 | = | Teilkreisradius des außenverzahnten Rades |
| R_1 | = | Kopfkreis „ „ „ „ |
| r_{a1} | = | Grundkreis „ „ „ „ |
| r_{g1} | = | Wälzkreis „ „ „ „ |
| O_1 | = | Mittelpunkt „ „ „ „ |
| z_1 | = | Zähnezahl „ „ „ „ |
| r_2 | = | Teilkreisradius „ innenverzahnten Rades |
| R_2 | = | Kopfkreis „ „ „ „ |
| r_{a2} | = | Grundkreis „ „ „ „ |
| r_{g2} | = | Wälzkreis „ „ „ „ |
| O_2 | = | Mittelpunkt des „ „ „ „ |
| z_2 | = | Zähnezahl „ „ „ „ |
| α | = | Werkzeug Anschlußwinkel |
| ε | = | Rad „ „ |
| m | = | Modul |
| F | = | Hauptpunkt |
| a | = | Wellenentfernung |
| i | = | Übersetzungsverhältnis |
| t | = | Teilung |

Beispiel zur Bestimmung der Zahnkopffinterferenz

Es sei zu bestimmen, ob eine Interferenzerscheinung auftritt, wenn :

Zähnezahl des außenverzahnten Rades $z_1 = 42$

„ „ innen „ „ „ „ $z_2 = 50$

Modul $m = 2$

Anschlußwinkel $\alpha = 20^\circ$

Die Räder haben keine Korrektion erfahren.

Nach der im Kapitel I beschriebenen Lösung :

Seien zunächst die zum Zusammenhang erforderlichen Werte berechnet.

$$r_{a1} = \frac{z_1 m}{2} \cos \alpha = \frac{42 \cdot 2}{2} \cdot 0.9396 = 39.4632 \text{ mm}$$

$$r_{a2} = \frac{z_2 m}{2} \cos \alpha = \frac{50 \cdot 2}{2} \cdot 0.9396 = 46.98 \text{ mm}$$

$$R_1 = \frac{(z_1 + 2) m}{2} = \frac{(42 + 2) \cdot 2}{2} = 44 \text{ mm}$$

$$R_2 = \frac{(z_2 - 2) m}{2} = \frac{(50 - 2) 2}{2} = 48 \text{ mm}$$

$$a = \frac{(z_2 - z_1) m}{2} = \frac{(50 - 42) 2}{2} = 8 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{f1} = \text{Arc cos} \frac{r_{a1}}{R_1} = \text{Arc cos} \frac{39.4632}{44} = 26.2478^\circ$$

$$\varepsilon_{f2} = \text{Arc cos} \frac{r_{a2}}{R_2} = \text{Arc cos} \frac{46.98}{48} = 11.8327^\circ$$

$$\text{Inv } \varepsilon_{f1} = 0.034986$$

$$\text{Inv } \varepsilon_{f2} = 0.002987$$

$$\text{Inv } \varepsilon = \text{Inv } \alpha = 0.014904$$

Auf Grund der Gleichung (I-8) :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{z_1}{z_2} (\text{Inv } \varepsilon_{f1} - \text{Inv } \varepsilon) + \text{Inv } \varepsilon = \\ &= \frac{42}{50} (0.034986 - 0.014904) + 0.014904 = 0.031172 \end{aligned}$$

Die Gleichung (I-6) ergibt :

$$\cos \xi_1 = \frac{R_2^2 - a^2 - R_1^2}{2 a R_1} = \frac{48^2 - 8^2 - 44^2}{2 \cdot 8 \cdot 44} = 0.431818$$

$$\xi_1 = \text{Arc cos } 0.431818 = 64.417^\circ$$

Laut dem Zusammenhang (I-2)

$$\xi_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \xi_1 = \frac{42}{50} \cdot 64.417 = 54.1102^\circ$$

Aus der Gleichung (I-7)

$$\begin{aligned} \vartheta &= \text{Arc sin} \frac{R_1 \sin \xi_1}{R_2} - \xi_2 = \text{Arc sin} \frac{44 \cdot \sin 64.417^\circ}{48} - 54.1102' = \\ &= 1.6609^\circ = 0.028988 \text{ Radian.} \end{aligned}$$

Der Wert von s_2 :

$$s_2 = \delta - \vartheta_f = 0.031772 - 0.028988 = 0.002784$$

Der Wert von s_1 wird :

$$s_1 = \text{Inv } \varepsilon_{f2} = 0.002987$$

Da $s_1 > s_2$ ist, besteht eine Interferenz.

Der Stoß in Radian :

$$s_1 - s_2 = 0.002987 - 0.002784 = 0.000203 \text{ Radian}$$

Auf dem Kopfkreis des innenverzahnten Rades in mm gemessen :

$$s_1 - s_2 = 48 \cdot 0.000203 = 0.009744 \text{ mm.}$$

Entsprechend der Lösung des Kapitels II :

Die in den Gleichungen vorkommenden Werte ergeben sich zu :

$$\varepsilon = \alpha = 20^\circ$$

Aus der Gleichung (II-2)

$$\text{tg } \gamma = \frac{a \sin \varepsilon + R_1 \sin \varepsilon_{f1}}{r_{a2}} = \frac{8 \cdot 0.3420 + 44 \cdot 0.442724}{46.91} = 0.473584$$

$$\gamma = \text{Arc tg } 0.473584 = 25.3415^\circ$$

$$\text{Inv } \gamma = 0.031291$$

Auf Grund der Gleichung (II-1)

$$\text{Arc } \varphi = \text{Inv } \gamma - \text{Inv } \varepsilon_{f2} = 0.031291 - 0.002989 = 0.028304$$

$$\varphi = 1.6217^\circ$$

Aus (II-3) ergibt sich

$$\cos \tau_1 = \frac{R_1^2 + a^2 - R_2^2}{2 R_1 \cdot a} = \frac{44^2 + 8^2 - 48^2}{2 \cdot 44 \cdot 8} = -0.431818$$

$$\tau_1 = 90^\circ + 64.417^\circ = 154.417^\circ$$

Aus der Gleichung (II-4) errechnet sich

$$\cos \tau_2 = \frac{R_2^2 + a^2 - R_1^2}{2 R_2 \cdot a} = \frac{48^2 + 8^2 - 44^2}{2 \cdot 48 \cdot 8} = 0.5625$$

$$\tau_2 = 55.7711^\circ$$

Aus (II-5):

$$\vartheta_1 = 180 + \varepsilon - (\varepsilon_{f1} + \tau_1) = 180 + 20 - (26.2478 + 154.417) = 19.3352^\circ$$

Aus (II-6):

$$\vartheta_2 = \tau_2 + \varepsilon - (\gamma + \varphi) = 55.7711 + 20 - (25.3415 + 1.6217) = 48.8079^\circ$$

Es besteht Interferenz, wenn

$$\frac{z_1}{z_2} \vartheta_1 < \vartheta_2$$

Im Falle des Beispiels

$\frac{42}{50} \cdot 19.3352 < 48.8079$ d. h. $16.2415 < 48.8079$, folglich wird eine Interferenz vorhanden sein.

Auf Grund der im Kapitel III geschilderten Lösung:

Die zu bestimmenden Werte zur Beurteilung der Interferenz auf Grund der Gleichung (III-1)

$$\psi = \frac{360}{2 z_2} = \frac{360}{2 \cdot 50} = 3.6^\circ$$

$$v_{f2} = 2 R_2 \left(\frac{v_2}{2 r_2} - \text{Inv } \alpha + \text{Inv } \varepsilon_{f2} \right) =$$

$$= 2 \cdot 48 \left(\frac{3.141592}{2 \cdot 50} - 0.014904 + 0.002987 \right) = 1.871808 \text{ mm}$$

In der Gleichung ist

$$v_2 = \frac{t}{2} = \frac{m \cdot \pi}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = 3.141592 \text{ mm}$$

Aus (III-2) errechnet sich

$$\varrho = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{v_{f2}}{2 R_2} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1.871808}{2 \cdot 48} = 1.117153^\circ$$

Aus dem Zusammenhang (III—3) errechnet sich

$$\beta = \psi - \varrho = 3,6 - 1.117153 = 2.482847^\circ$$

$$\begin{aligned} v_{f1} &= 2 R_1 \left(\frac{v_1}{2 r_1} + \text{Inv } a - \text{Inv } \varepsilon_{f1} \right) = \\ &= 2 \cdot 44 \left(\frac{3.141592}{2 \cdot 42} + 0.014994 - 0.034986 \right) = 1.523896 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$v_1 = \frac{t}{2} = 3.141592 \text{ mm}$$

Die Gleichung (III—11) ergibt

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{v_{f1}}{2 R_1} = \frac{180}{\pi} \frac{1.523896}{2 \cdot 44} = 0.992191^\circ$$

$$C_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2 - a^2}{2 R_1 \cdot a} = \frac{48^2 - 44^2 - 8^2}{2 \cdot 44 \cdot 8} = 0.431818$$

$$C_2 = \frac{R_2^2 - R_1^2 + a^2}{2 R_2 \cdot a} = \frac{48^2 - 44^2 + 8^2}{2 \cdot 48 \cdot 8} = 0.5625$$

$$\text{Arc cos } C_1 = 64.417^\circ$$

$$\text{Arc cos } C_2 = 55.7711^\circ$$

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{50}{42} = 1.190476$$

Der Zusammenhang (III—10) ergibt :

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{Arc cos } C_2 - \frac{1}{i} \text{Arc cos } C_1 + \frac{\delta}{i} = \\ &= 55.7711 - 54.11028 + 0.833440 = 2.494226^\circ \end{aligned}$$

Wenn $\beta < \gamma$, dann besteht eine Interferenz und um diesen Fall handelt es sich hier. Die Überdeckung beträgt :

$$\gamma - \beta = 2.494226 - 2.482847 = 0.011379^\circ$$

Dies entspricht am Kopfkreis des innenverzahnten Rades 0.009532 mm.

Zusammenfassung

Beim Ineinandergreifen von innen- und außenverzahnten Zahnrädern — wenn der Unterschied in der Zähnezahl gering ist, das Übersetzungsverhältnis also nahezu 1 ist — tritt eine Stoßerscheinung auf, welche als Zahnkopffinterferenz bezeichnet wird. Wir schildern die Verfahren von Buckingham und Diker—Watts sowie eine neuere Berechnungsmethode, mit deren Hilfe es sich aus den Fabrikations- und Revisionsangaben bestimmen läßt, ob eine Interferenz auftreten wird und welcher Größenordnung. Im Rahmen eines Beispiels wurde die Bestimmung der Zahnkopffinterferenz — auf dieselbe Angaben bezogen — nach allen drei Verfahren ausgearbeitet.

Literatur

- BUCKINGHAM, E.: Manuel of gear design I., II., III. New York 1935, 1937.
BUCKINGHAM, E.: Analytical mechanics of gears. New York 1949.
ERNEY, Gy.: Belső fogazású hengeres kerekek elmélete és tervezése. Felsőoktatási Jegyzet-ellátó, Budapest 1954.
JUREK, A.: A belső fogazás egyes kérdései és a bolygóművek áttételének grafikus szerkesztése. Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztálya közleményei. IV, 1952.
VÖRÖS, I.: Gépelemek III. Fogaskerekek. Budapest 1956. Tankönyvkiadó.

O. SZAMOSVÖLGYI; Budapest XI., Műegyetem rakpart 3. Ungarn.