# EINIGE FRAGEN DER WIRTSCHAFTLICHEN BERECHNUNG VON ZAHNRADGETRIEBEN

Von

J. VARGA

Lehrstuhl für Wasserkraft- und Strömungsmaschinen der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 24. August 1959)

## 1. Einleitung

Die Verringerung des Gewichtes von Konstruktionen ist eine allgemeine Bestrebung im Maschinenbau. Von jenen speziellen Fällen abgesehen, in denen das Streben nach dem kleinstmöglichen Gewicht so wichtig ist, daß es selbst auf Kosten der Wirtschaftlichkeit durchgesetzt werden muß (z. B. Flugzeugtriebwerke), haben die Bemühung um ein kleineres Gewicht im allgemeinen wirtschaftliche Gründe. Gleiche Werkstoffe und gleiche Technologie vorausgesetzt, werden die Herstellungskosten von Konstruktionen gleicher Qualität bei geringerem Gewicht niedriger, d. h. die leichtere Konstruktion ist zugleich auch wirtschaftlicher.

Die Theorie der Zahnräder hat sich in den letzten Jahrzehnten wesentlich entwickelt, doch befaßt sich das umfangreiche Schrifttum kaum mit den Fragen der Wirtschaftlichkeit bzw. mit der Möglichkeit wirtschaftlich optimaler Lösungen. Diese Tatsache gibt den Anlaß, im folgenden einige einschlägige grundlegende Fragen einer Prüfung zu unterziehen.

## 2. Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| $a$ | = Achsabstand [cm] |
| $b$ | = nutzbare Zahnbreite (tragende Radbreite) [cm] |
| $d$ | = Durchmesser [cm] |
| $i$ | = Übersetzung |
| $k$ | = Wälzpressung [kg/cm²] |
| $p$ | = Linienbelastung (Zahndruck auf 1 cm Zahnbreite) [kg/cm] |
| $r$ | = Halbmesser [cm] |
| $z$ | = Zähnezahl |
| $A, B, C$ | = Längenabmessungen [cm] |
| $F$ | = Fläche [cm²] |
| $M$ | = Drehmoment [cmkg] |
| $V$ | = Volumen [cm³] |
| $\alpha_0$ | = Bezugseingriffswinkel |
| $\alpha$ | = Betriebseingriffswinkel |
| $\xi_k$ | = Verhältnis der Wälzpressung im inneren Einzeleingriffspunkt zur Wälzpressung im Wälzpunkt |

*Indizes*

| | |
|---|---|
| 1 | = erste Stufe (bzw. Antriebsrad) |
| 2 | = zweite Stufe (bzw. Abtriebsrad) |
| $e$ | = im Einzeleingriffspunkt |
| $w$ | = Wälzkreis |
| zul | = zulässig |

## 3. Optimales Gewicht des Zahnradpaares

Vor allem soll die Frage des optimalen Gewichtes bzw. des für dieses maßgebenden optimalen Volumens für ein Zahnradpaar untersucht werden. Als gegeben seien hierbei angenommen das zu übertragende Drehmoment, die erforderliche Übersetzung, die Qualität des Zahnradwerkstoffes (und damit die zulässige Beanspruchung) sowie schließlich die Herstellungstechnologie. Die vorgeschriebene Übersetzung bestimmt lediglich das Verhältnis der beiden Wälzkreisdurchmesser, mithin wird sich ein Zahnradpaar, das die vorgegebenen Anforderungen erfüllt, mit unterschiedlichen Wälzkreisdurchmessern und mit den diesen zugehörigen verschiedenen Achsabständen verwirklichen lassen. Dem größeren Achsabstand wird hierbei eine kleinere Zahnbreite und umgekehrt, dem kleineren Achsabstand ein breiteres Rad zugehören. Zur Untersuchung der Frage, ob ein Achsabstand gefunden werden kann, bei dem das für das Gewicht des Zahnradpaares maßgebende Volumen einen Minimalwert erreicht, sollen der Einfachheit halber volle Zahnradscheiben mit Geradverzahnung vorausgesetzt sein.

Bei der Berechnung auf Oberflächentragfähigkeit, die bei Industriegetrieben gewöhnlich maßgebend ist, läßt sich aus den *Hertz*schen Gleichungen für die Linienbelastung, die bei einem gegebenen Achsabstand mit der für den gewählten Werkstoff zulässigen Wälzpressung $k_{\mathrm{zul}}$ übertragen werden kann, die bekannte Beziehung

$$p = k_{\mathrm{zul}}\, a \sin \alpha \, \frac{2\, i}{(i+1)^2} \tag{1}$$

ableiten, während die aus dem gegebenen Drehmoment $M_1$ errechenbare Linienbelastung

$$p = \frac{M_1}{b \cos \alpha \, r_{w1}}$$

ist. Da

$$r_{w1} = \frac{a}{i+1},$$

wird

$$p = \frac{M_1 (i+1)}{a\, b \cos \alpha}. \tag{2}$$

Die Zusammenziehung von (1) und (2) ergibt

$$a^2 b = \frac{M_1}{k_{zul}} \frac{1}{\sin 2\alpha} \frac{(i+1)^3}{i}. \tag{3}$$

Für das Volumen des Zahnradpaares gilt

$$V = \frac{d_{w1}^2 \pi}{4} b + i^2 \frac{d_{w1}^2 \pi}{4} b = \frac{d_{w1}^2 \pi}{4} (i^2+1)\, b.$$

Mit $d_{w1} = \frac{2a}{i+1}$ schreibt sich das Volumen des Zahnradpaares zu

$$V = a^2 b \pi \frac{i^2+1}{(i+1)^2}. \tag{4}$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert für $a^2 b$ gemäß Formel (3) ein, dann erhält man

$$V = \frac{M_1}{k_{zul}} \frac{\pi}{\sin 2\alpha} \frac{(i+1)(i^2+1)}{i}. \tag{5}$$

Da Drehmoment, Übersetzungsverhältnis und Werkstoffqualität (und damit auch der Wert von $k_{zul}$) als gegeben angenommen werden, enthält Gleichung (5) ausschließlich konstante Größen mit Ausnahme des Betriebseingriffswinkels $\alpha$, der (zusammen mit dem Achsabstand) je nach der Geometrie der Verzahnung innerhalb gewisser Grenzen veränderlich ist. Betrachtet man einstweilen auch diesen als konstant (beispielsweise bei Annahme einer VO-Verzahnung, bei der $\alpha = \alpha_0 =$ konst.), dann gilt die Feststellung, daß das Gewicht des Zahnradpaares unabhängig vom Achsabstand konstant ist, was übrigens bereits aus (3) hervorgeht. Das Gewicht des Zahnradpaares wird lediglich durch die Übersetzung beeinflußt, ist also deren Wert festgelegt, dann kann von einem optimalem Gewicht nicht gesprochen werden.

Gleichung (3) zieht die im Wälzpunkt auftretende Hertzsche Pressung in Betracht. Bekanntlich entsteht im inneren Einzeleingriffspunkt eines Zahnradpaares eine größere Hertzsche Pressung als im Wälzpunkt. Will man auch diesen Umstand berücksichtigen, dann muß Gleichung (3) mit einem Faktor multipliziert werden, der das Verhältnis der Wälzpressung im inneren Einzeleingriffspunkt zum Wälzpunkt enthält. Dieser Faktor kann als Quotient der Produkte der Zahnprofil-Krümmungshalbmesser ausgedrückt werden, die sich im Wälzpunkt und im inneren Einzeleingriffspunkt ergeben :

$$\xi_k = \frac{k_{e1}}{k_w} = \frac{\varrho_{w1}\,\varrho_{w2}}{\varrho_{e1}\,\varrho_{e2}}.$$

Mit dem Faktor $\xi_k$ wird Gleichung (5) für das Volumen

$$V = \frac{M_1}{k_{\mathrm{zul}}}\,\frac{\pi\,\xi_k}{\sin 2\,a}\,\frac{(i+1)(i^2+1)}{i}, \tag{6}$$

worin $\xi_k/\sin 2a$ die veränderliche Größe ist, deren Wert von der Übersetzung, vom Betriebseingriffswinkel, von der Zähnezahl des Ritzels bzw. von der Zähnezahlsumme abhängt. Die $\xi_k/\sin 2a$-Werte für eine mit ausgeglichenem Schlupf entworfene Verzahnung sind in Abhängigkeit von der Ritzelzähnezahl für einige Betriebseingriffswinkel- und Übersetzungswerte in Bild 1 dargestellt, dessen Kennlinien auf Grund der Tabellen des Verzahnungssystems von I. BOTKA aufgetragen wurden ([1] und [2]). Das Schaubild läßt erkennen, daß

a) größere Betriebseingriffswinkel in der Mehrzahl der Fälle kleinere Volumina ergeben, ausgenommen die Fälle, in denen man bei großen Übersetzungen gleichzeitig große Betriebseingriffswinkel anwendet, da hierbei in einigen Fällen etwas ungünstigere Ergebnisse entstehen können. So verläuft die Kurve beispielsweise bei $a = 25°$ und $i = 5$ bereits über den Werten für $a = 23°$ und $i = 5$, während sie bei $z_1 = 18$ die Kennlinie für $a = 20°$ und $i = 5$ schneidet.

b) Mit zunehmender Zähnezahlsumme läßt sich zwar das Gewicht vermindern, doch setzt die Biegefestigkeit der Zähne einer Erhöhung der Zähnezahlsumme Grenzen.

c) Bei niedriger Zähnezahlsumme (z. B. bei $z_1 = 13\ldots15$) und bei Übersetzungen von $i > 2$ beeinflußt weder der Eingriffswinkel noch die Übersetzung das Gewicht in wesentlichem Umfang.

d) Bei kleineren Übersetzungen ($i < 3$) führt die Vergrößerung des Betriebseingriffswinkels bzw. die Erhöhung der Zähnezahlsumme zu bedeutenderen Gewichtsverminderungen als bei größeren Übersetzungen.

e) Bei den praktisch in Frage kommenden Ritzelzähnezahlen zeigen die Kurven keinen Minimalwert, ausgenommen die Fälle von $a = 20°$ und $i \geq 4$. Ist $i = 4$, liegt das Minimum bei einer Zähnezahl von $z_1 \approx 30$, bei $i = 5$ hingegen bei einer Zähnezahl von $z_1 \approx 25$, doch resultieren auch aus diesen Minimalwerten größere Gewichte, als sie auch mit einem nur wenig größeren Betriebseingriffswinkel erzielt werden könnten.

All dies beweist, daß man bei Anwendung der als zeitgemäßest anzusprechenden, auf Schlupf ausgeglichenen V-Verzahnung, bei der der Betriebs-

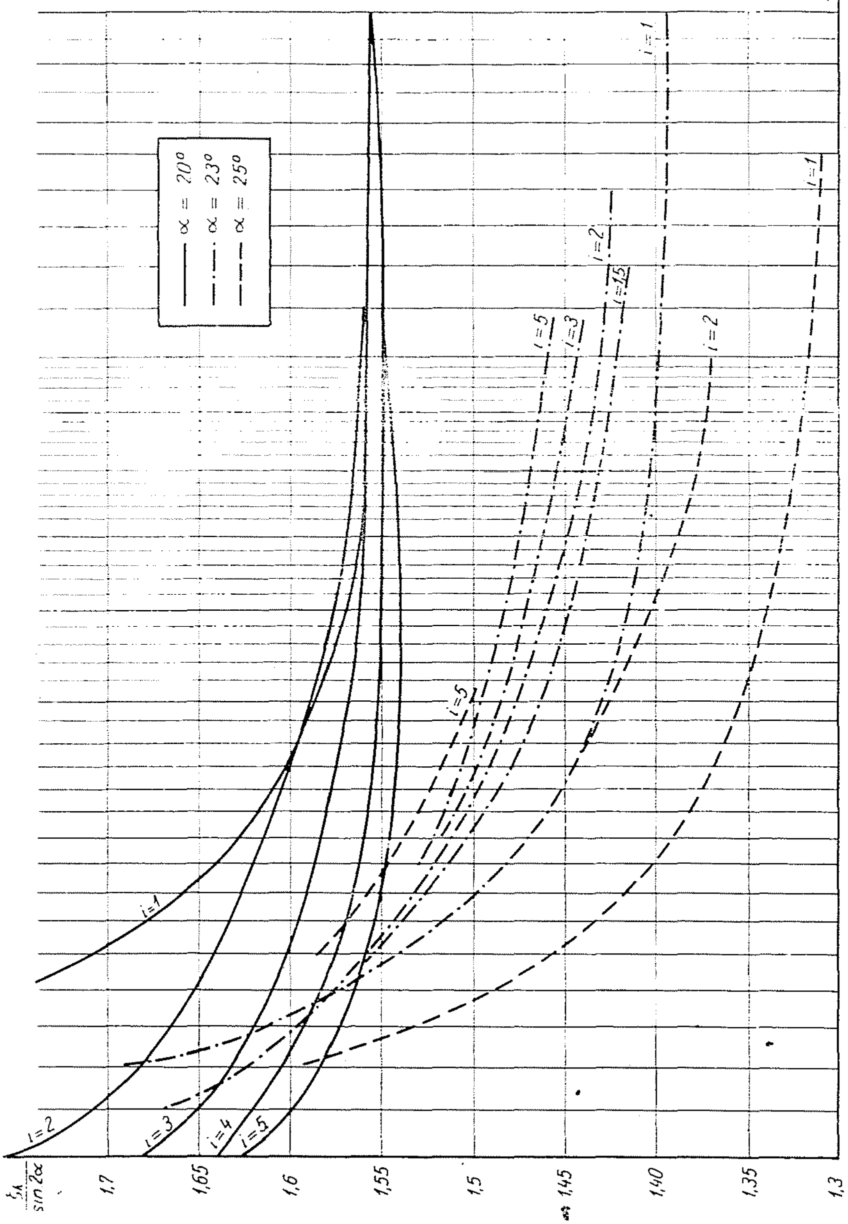
α = 20°
α = 23°
α = 25°
i=1
i=2
i=3
i=4
i=5
i=1,5
$z_1$
$\frac{y_K}{\sin 2\alpha}$
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 90 100
1,7 1,65 1,6 1,55 1,5 1,45 1,40 1,35 1,3

**Bild 1**

eingriffswinkel größer ist als 20°, selbst dann nicht mit mehr als 2...3%iger Gewichtsverminderung rechnen könnte, wenn man die Möglichkeit hätte, den Betriebseingriffswinkel oder die Zähnezahlsumme weiter zu erhöhen. (Dies

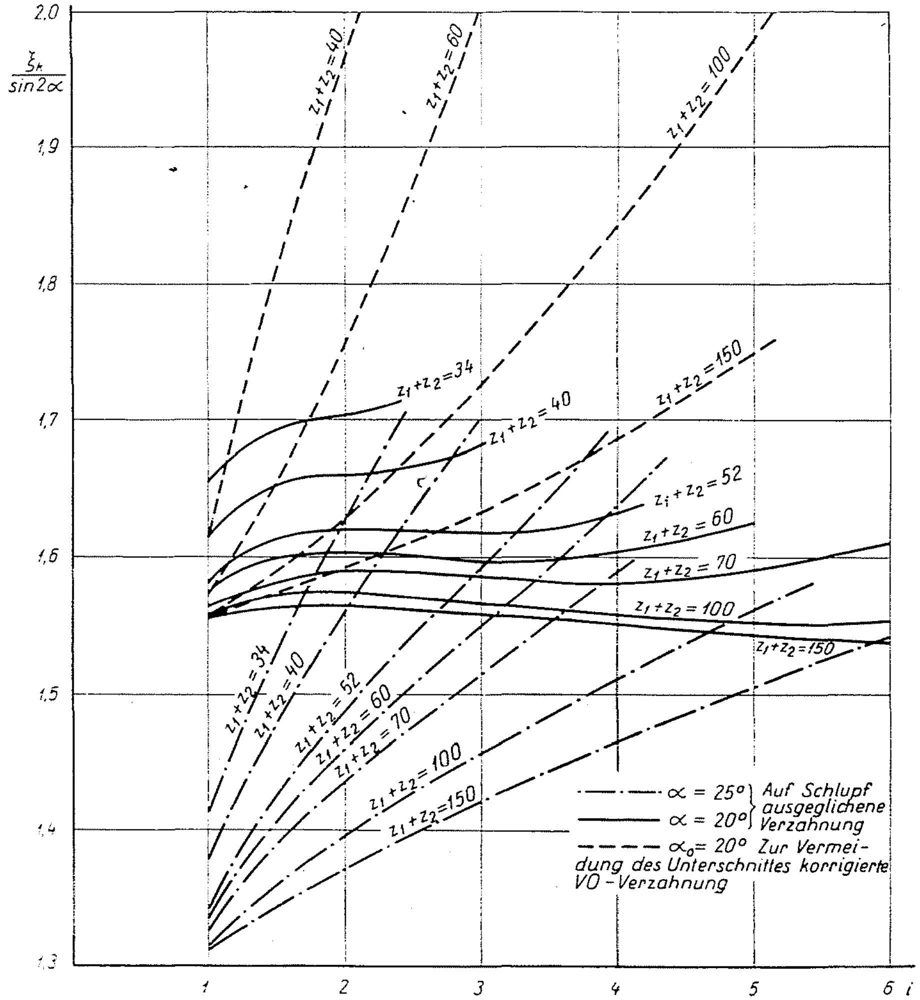


*Bild 2*

ist besonders bei Industriegetrieben der Fall, bei denen $i > 3$.) Man kann also feststellen, daß auch das Gewicht eines auf Schlupf ausgeglichenen Zahnradpaares zur Übertragung eines gegebenen Drehmomentes bei gegebener Übersetzung und Beanspruchung unabhängig vom Achsabstand annähernd konstant ist, und daß dies ganz allgemein auch für Zahnräder mit gleichem Verzahnungssystem zutrifft.

Ausdrücklich muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß das Gewicht der Zahnräder ausschließlich bei gleichem Verzahnungssystem ungefähr konstant bleibt. Mit den Unterschieden in der Verzahnung ändern sich die Verhältnisse sehr wesentlich, und im Gewicht der Zahnradpaare können sich bedeutende Unterschiede zeigen, wie dies aus Bild 2 hervorgeht.

Bild 2 enthält eine graphische Darstellung der sich bei verschiedenen Zähnezahlsummen ergebenden Werte von $\xi_k/\sin 2\,\alpha$ in Abhängigkeit von der Übersetzung, u. zw. in drei Varianten:

1. für Verzahnung mit ausgeglichenem Schlupf bei $\alpha = \alpha_0 = 20°$ (voll ausgezogene Linie),

2. für Verzahnungen mit ausgeglichenem Schlupf bei einem Betriebseingriffswinkel $\alpha = 25°$ (strichpunktierte Linie),

3. für VO-Verzahnung die zur Vermeidung des Unterschnittes korrigiert ist, bei der also $x_1 = \dfrac{14 - z_1}{17}$ und $\alpha_0 = 20°$ (gestrichelte Linie).

Das Schaubild beweist die Richtigkeit der soeben gemachten Feststellungen, doch läßt es überdies auch erkennen,

a) daß sich durch die auf Schlupf ausgeglichene Verzahnung im Vergleich zur VO-Verzahnung gemäß 3. eine wesentliche Gewichtsverminderung erzielen läßt;

b) daß die Gewichtsverminderung bei zunehmender Übersetzung auch ohne Vergrößerung des Betriebseingriffswinkels oder der Zähnezahlsumme zunimmt;

c) daß sich schließlich durch Vergrößerung des Betriebseingriffswinkels oder der Zähnezahlsumme innerhalb der Grenzen der von letzterer abhängigen Übersetzung weitere Gewichtseinsparungen erzielen lassen (bis zum Schnittpunkt der Kurven für $\alpha = \alpha_0$ und $\alpha = 25°$).

Zahlenmäßig sind diese Tatsachen in der hier folgenden Tabelle erfaßt, die die $\xi_k/\sin 2\,\alpha$-Werte für verschiedene Zähnezahlsummen und überdies die Gewichtsverminderung in Prozenten enthält. Die $\xi_k/\sin 2\,\alpha$-Werte für die zur Vermeidung des Unterschnittes korrigierte VO-Verzahnung sind mit $C_0$, diejenigen für die auf Schlupf ausgeglichene Verzahnung hingegen mit $C_{\alpha 20}$, $C_{\alpha 25}$ usw. bezeichnet. Aus der Tabelle lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

Bei einer Zähnezahlsumme von $z_1 + z_2 = 40$ zeigt sich im Vergleich zu der zwecks Vermeidung des Unterschnittes korrigierten VO-Verzahnung bei einer V-Verzahnung mit $\alpha = 25°$ und mit ausgeglichenem Schlupf eine Gewichtsverminderung von 14,6...21,0%. Bei einem Betriebseingriffswinkel von $\alpha = 27°$ ergibt sich bis $i = 2$ eine weitere Gewichtsverminderung. Im Vergleich zu einer auf Schlupf ausgeglichenen VO-Verzahnung $(\alpha = \alpha_0)$ ergibt sich aus derselben Verzahnung bei einem Betriebseingriffswinkel von $\alpha = 25°$ bis zu $i \approx 2{,}5$ eine zwar abnehmende, bei kleinen Übersetzungen jedoch noch immer bedeutende Gewichtsverminderung, die sich durch Anwendung von $\alpha = 27°$ weiter steigern läßt.

Ist die Zähnezahlsumme $z_1 + z_2 = 60$, dann beträgt die Gewichtsverminderung im Vergleich zur VO-Verzahnung gemäß 3. bei V-Verzahnung mit

| $z_1 + z_2$ | 40 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 1,5 | 2,08 | 2,64 | 3 |
| Co | 1,615 | 1,806 | 1,993 | 2,046 | 2,089 |
| Ca 20 | 1,615 | 1,655 | 1,661 | 1,669 | 1,680 |
| Ca 25 | 1,379 | 1,483 | 1,572 | 1,650 | 1,702 |
| Ca 27 | 1,315 | 1,440 | 1,561 | 1,676 | 1,754 |
| $100 \frac{\text{Co} - \text{Ca 25}}{\text{Co}} \%$ | 14,6 | 17,9 | 21,0 | 19,3 | 18,5 |
| $100 \frac{\text{Co} - \text{Ca 27}}{\text{Co}} \%$ | 18,5 | 20,3 | 22,4 | 18,1 | 16,0 |
| $100 \frac{\text{Ca 20} - \text{Ca 25}}{\text{Ca 20}} \%$ | 14,6 | 10,4 | 5,3 | 1,1 | —1,3 |
| $100 \frac{\text{Ca 20} - \text{Ca 27}}{\text{Ca 20}} \%$ | 18,5 | 13,0 | 6,0 | $\sim 0$ | —4,4 |

| $z_1 + z_2$ | 60 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 5 |
| Co | 1,571 | 1,657 | 1,755 | 2,016 | 2,176 |
| Ca 20 | 1,571 | 1,601 | 1,604 | 1,598 | 1,626 |
| Ca 25 | 1,334 | 1,406 | 1,458 | 1,548 | 1,737 |
| $100 \frac{\text{Co} - \text{Ca 25}}{\text{Co}} \%$ | 15,1 | 15,2 | 17,0 | 23,2 | 20,2 |
| $100 \frac{\text{Ca 20} - \text{Ca 25}}{\text{Ca 20}} \%$ | 15,1 | 12,2 | 9,1 | 3,1 | —6,8 |

| $z_1 + z_2$ | 100 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 2,03 | 3 | 4 | 4,88 |
| Co | 1,559 | 1,632 | 1,719 | 1,836 | 1,965 |
| Ca 20 | 1,559 | 1,574 | 1,566 | 1,566 | 1,551 |
| Ca 25 | 1,316 | 1,398 | 1,456 | 1,512 | 1,560 |
| $100 \frac{\text{Co} - \text{Ca 25}}{\text{Co}} \%$ | 15,6 | 14,3 | 15,3 | 17,6 | 20,6 |
| $100 \frac{\text{Ca 20} - \text{Ca 25}}{\text{Ca 20}} \%$ | 15,6 | 11,2 | 7,0 | 2,8 | $\sim 0$ |

| $z_1 + z_2$ | 150 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | 2 | 3,05 | 4 | 5 |
| Co | 1,556 | 1,591 | 1,635 | 1,686 | 1,750 |
| Ca 20 | 1,556 | 1,565 | 1,559 | 1,551 | 1,543 |
| Ca 25 | 1,311 | 1,371 | 1,419 | 1,459 | 1,503 |
| $100 \frac{\text{Co—Ca 25}}{\text{Ca}}$ % | 15,7 | 13,8 | 13,2 | 13,5 | 14,1 |
| $100 \frac{\text{Ca 20—Ca 25}}{\text{Ca 20}}$ % | 15,7 | 12,4 | 9,0 | 6,0 | 2,6 |

$\alpha = 25°$ und bei ausgeglichenem Schlupf bis $i = 2$ etwa 15...17%, bei $i = 2{,}5...5$ hingegen 20...23%. Bei der auf Schlupf ausgeglichenen V-Verzahnung ergibt $\alpha = 25°$ bis $i = 3$ im Vergleich zu $\alpha = \alpha_0 = 20°$ gleichfalls eine Gewichtseinsparung. Derartige Verzahnungen mit $\alpha = 25° \sim 26°$ bieten Vorteile bei gehärteten Zahnrädern von Fahrzeuggetrieben, da beispielsweise die Übersetzung von Räderpaaren in Wechselgetrieben selten größer ist als 2,5.

Bei einer Zähnezahlsumme $z_1 + z_2 = 100$ liegen die Verhältnisse ähnlich wie im vorigen Absatz besprochen. Im Vergleich zur VO-Verzahnung nach 3. zeigt sich bis $i = 4{,}88$ eine Gewichtsverminderung von 14...20%.

Bei der Zähnezahlsumme $z_1 = z_2 = 150$ ergibt die auf Schlupf ausgeglichene V-Verzahnung mit $\alpha = 25°$ im Verhältnis zur VO-Verzahnung nach 3. eine Gewichtsverminderung von 13...15,7%, im Vergleich zu der auf Schlupf ausgeglichenen VO-Verzahnung hingegen eine solche von 2,6...15,7%. Wie ersichtlich, zeigen die im Vergleich mit der VO-Verzahnung nach 3. erzielbaren Gewichtsverminderungen mit wachsender Zähnezahlsumme eine leicht fallende Tendenz. Industriegetriebe werden in der Regel mit ungehärteten Zahnrädern ausgestattet, wobei die Zähnezahlsumme $z_1 + z_2 = 100...200$ beträgt. Da die Übersetzung einer Stufe am häufigsten zwischen 3 und 7 liegt, läßt sich mit einer auf Schlupf ausgeglichenen V-Verzahnung mit $\alpha > \alpha_0$ eine Gewichtsverminderung von bloß einigen Prozenten erzielen, wie dies in den obigen Ausführungen bereits festgestellt wurde.

Es kann also wiederholt konstatiert werden, daß das Gewicht von Zahnradpaaren nur bei demselben Verzahnungssystem und im Falle voller Ausnützung der durch die Verzahnung gebotenen Vorteile als annähernd konstant angenommen werden darf. Weiters läßt sich feststellen, daß bei der wirtschaftlichen Zahnradberechnung der richtigen Profilverschiebung eine bedeutende Rolle zukommt, daß es somit verfehlt wäre, die Vergrößerung des Betriebseingriffswinkels allein anzustreben, da die richtige Profilverschiebung mindestens ebenso maßgebend ist, wie dies die in den obigen Ausführungen besprochenen Gewichtseinsparungen in den Fällen von $\alpha = \alpha_0$ zur Genüge beweisen.

### 4. Einstufige Zahnradgetriebe

Wünscht man das Zahnradpaar in ein geschlossenes Gehäuse einzubauen, dann muß man auch die Gestaltung des Gehäusegewichtes daraufhin untersuchen, ob man durch geeignete Wahl des Verhältnisses zwischen Achsabstand und Zahnbreite eine optimale (das geringste Gewicht ergebende) Lösung finden kann. Das Gewicht des Gehäuses ist seiner Oberfläche proportional. Der Einfachheit halber soll das Gehäuse des Zahnradgetriebes als von ebenen Flächen

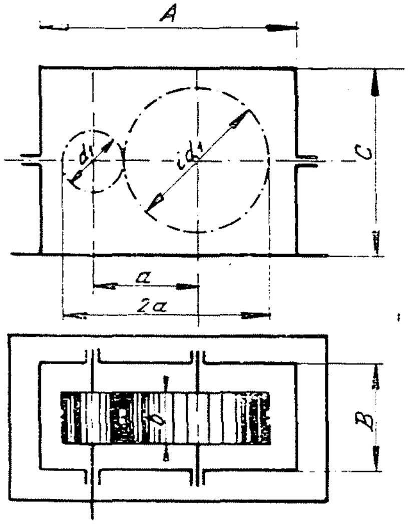


*Bild 3*

begrenzt angenommen werden (Bild 3). Die Hauptabmessungen des Gehäuses gemäß Abbildung lassen sich in Abhängigkeit von dem Achsabstand folgendermaßen bestimmen :

*Länge* des Gehäuses

$$A = 2a\,\varphi,$$

worin $\varphi =$ konstant.

*Breite* des Gehäuses auf Grund von Gleichung (3)

$$B = b\,\varphi^3 = \frac{K}{a^2}\,\frac{(i+1)^3}{i}\,\varphi^3,$$

worin $K = \dfrac{M_1}{k_{\text{zul}}}\,\dfrac{1}{\sin 2\,\alpha} =$ konstant, sofern auch der Wert von $\sin 2\,\alpha$ als konstant angenommen wird.

*Höhe* des Gehäuses

$$C = 2\,a \frac{i}{i+1}\,\varphi^3.$$

Durch unterschiedlich hohe Potenzierung der Konstante $\varphi$ wurde eine Annäherung der tatsächlichen Verhältnisse angestrebt. So erscheint sie in der Formel für die Gehäusehöhe deshalb in der dritten Potenz, weil bei dieser Abmessung der Ölraum mit berücksichtigt werden mußte. Bei der Berechnung der mit dem Gewicht verhältnisgleichen Gehäuseoberfläche wurden die Gehäuseauflagefläche und die Verbindungsflanschen der Gehäusehälften sowie die Versteifungsrippen dadurch berücksichtigt, daß die Fläche $2\,AB$ dreifach angenommen wurde. Es ergibt sich demnach für die Gehäuseoberfläche

$$F = 2\,(AC + 3\,AB + BC)$$

oder mit den obigen Beziehungen die Gleichung

$$F = 8\,a^2 \frac{1}{i+1}\,\varphi^4 + \frac{K}{a}\left[12\,\frac{(i+1)^3}{i}\,\varphi^4 + 4\,(i+1)^2\,\varphi^6\right],$$

deren Minimalwert bei

$$\frac{dF}{da} = 16\,a\,\varphi^4 \frac{i}{i+1} - \frac{K}{a^2}\left[12\,\varphi^4\,\frac{(i+1)^3}{i} + 4\,\varphi^6\,(i+1)^2\right] = 0$$

liegt, und aus der die Gleichung

$$a^3 = \frac{K\left[0{,}75\,\dfrac{(i+1)^3}{i} + 0{,}25\,\varphi^2\,(i+1)^2\right]}{\dfrac{i}{i+1}}$$

bestimmt werden kann.

Die mit dem Gehäusegewicht verhältnisgleiche Gehäuseoberfläche nimmt mithin ein Minimum an, sofern

$$\frac{a}{b} = \frac{ia^3}{K\,(i+1)^3} = 0{,}75\,\frac{i+1}{i} + 0{,}25\,\varphi^2 = 0{,}75\left(\frac{i+1}{i} + \frac{\varphi^2}{3}\right).$$

Bei $\varphi = 1{,}1$ ergeben sich hieraus folgende Zahlenwerte:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{b}$ | 1,8025 | 1,4275 | 1,3025 | 1,24 | 1,2025 | 1,1775 |
| $b$ | 0,555 $a$ | 0,7 $a$ | 0,767 $a$ | 0,805 $a$ | 0,83 $a$ | 0,85 $a$ |

Die bisherigen Überlegungen enthielten der Einfachheit halber eine Reihe von Annäherungen, wogegen die Gestalt, besonders der obere Teil des Getriebegehäuses von der angenommenen idealisierten Form wesentlich abweicht, und dadurch auch der Faktor $\varphi$ andere Werte annehmen kann. Der Gedankengang war aber dennoch geeignet, nachzuweisen,

a) daß durch entsprechende Wahl des Achsabstandes bzw. des Verhältnisses zwischen diesem und der Gehäusebreite ein optimales Gewicht erzielt werden kann, daß ferner

b) zur Erzielung des optimalen Gewichtes breite Räder erforderlich sind, daß mithin die Verminderung des Achsabstandes das wirksamste Mittel zur Verringerung des Gehäusegewichtes darstellt. Bei größeren Übersetzungen müßten natürlich die Räder schon so breit sein, daß eine Verwirklichung unzweckmäßig wäre. Durch doppelte Schräg- oder durch Pfeilverzahnung lassen sich jedoch die Anforderungen des minimalen Gewichtes in vielen Fällen erfüllen. Häufig verhilft eine derartige Analyse zur Annäherung des Optimums selbst dann, wenn sich eine nicht mehr zu verwirklichende Radbreite ergibt. Beim Entwurf von Getriebereihen ist allerdings eine weit eingehendere Untersuchung auf Grund des ausgeführten Gedankenganges unerläßlich, die sich auch auf die Ermittlung der durch Torsion und Biegung verursachten Deformation des Ritzels erstrecken muß, denn die anwendbare Zahnbreite wird durch die aus Deformationen herrührenden Zahnrichtungsfehler begrenzt.

## 5. Zweistufige Zahnradgetriebe

Im folgenden soll nun für ein zweistufiges Zahnradgetriebe die Frage untersucht werden, ob eine Möglichkeit besteht, die Übersetzung der beiden Zahnradpaare $i_1$ und $i_2$ bei gegebener Übersetzung $i = i_1 \cdot i_2$ derart zu wählen, daß hierbei ein minimales Volumen der beiden untersuchten Zahnradpaare insgesamt, d. h. ein optimales Gesamtgewicht entsteht. Auch bei dieser Untersuchung seien gleiche Werkstoffe, gleiche Beanspruchung und Technologie vorausgesetzt. Ausgehend von Gleichung (6) enthält man bei Bezeichnung der Übersetzungen mit den Indizes der einzelnen Stufen für das Volumen des Räderpaares der ersten Stufe die Beziehung

$$V_1 = \frac{M_1}{k_{\text{zul}}} \frac{\pi \xi_k}{\sin 2a} \frac{(i_1+1)(i_1^2+1)}{i_1},$$

die sich mit $K_1 = \dfrac{\pi \xi_k}{k_{\text{zul}} \sin 2a}$ als Konstante in der Form von

$$V_1 = M_1 K_1 \frac{(i_2+1)(i_1^2+1)}{i_1} \tag{7}$$

schreiben läßt.

Für das Volumen des zweiten Räderpaares gilt die gleiche Beziehung, doch muß hierbei berücksichtigt werden, daß dieses bereits durch das Drehmoment $i_1 M_1$ belastet wird. Es wird mithin

$$V_2 = M_1 K_1 \frac{i_1 (i_2 + 1)(i_2^2 + 1)}{i_2} . \tag{8}$$

Das Volumen beider Räderpaare ergibt sich aus der Addition der Gleichungen (7) und (8) zu

$$V = V_1 + V_2 = M_1 K_1 \left| \frac{(i_1 + 1)(i_1^2 + 1)}{i_1} + \frac{i_1 (i_2 + 1)(i_2^2 + 1)}{i_2} \right| . \tag{9}$$

Mit sämtlichen Werten für $i_2$ wird $i_2 = i/i_1$ und damit nach Ordnung

$$V = M_1 K_1 \frac{\left(1 + \frac{1}{i}\right) i_1^3 + 2\, i_1^2 + (1 + i)\, i_1 + (1 + i^2)}{i_1} . \tag{10}$$

Zur Erzielung dieses kleinsten Volumens muß der Wert von $i_1$ die Gleichung

$$\frac{dV}{di_1} = M_1 K_1 \frac{2\left(1 + \frac{1}{i}\right) i_1^3 + 2\, i_1^2 - (1 + i^2)}{i_1^2} = 0$$

befriedigen.

Für praktische Berechnungen ist die Lösung dieser Gleichung dritten Grades auf $i_1$ etwas umständlich, weshalb Bild 4 einen besseren Behelf bietet, in welchem die Werte $V/M_1 K_1$ in Abhängigkeit von der Übersetzung $i_1$ des ersten Räderpaares für verschiedene Gesamtübersetzungen $i$ aufgetragen sind. Wie aus dem Schaubild ersichtlich, gehört zu jedem $i$ ein bestimmtes $i_1$, bei dem das Gesamtvolumen der beiden Zahnradpaare ein Minimum beträgt. Das Diagramm gibt mithin die Möglichkeit zur Wahl dieses $i_1$ und damit auch zur Wahl des zugehörigen $i_2$. Die Kurven verlaufen an den Minimumstellen flach genug, kleinere Abweichungen vom optimalen $i_1$-Wert, die bei der Wahl der Zähnezahl unvermeidlich sind, ergeben mithin noch keine ernsteren Unterschiede.

Die optimalen Abmessungen des Zahnradgehäuses lassen sich auch beim zweistufigen Zahnradgetriebe ähnlich, wie weiter oben beschrieben, ermitteln. Bei den Zahnrädern sind natürlich die nach den obigen Ausführungen günstigsten Übersetzungen in Betracht zu ziehen. Als Beispiel sollen hier die das geringste Gewicht ergebenden Abmessungen für das Gehäuse eines Zahnradgetriebes mit sogenannter rückkehrender Wellenanordnung bestimmt werden, wo also An- und Abtriebswelle fluchten. Die Hauptabmessungen eines Zahn-

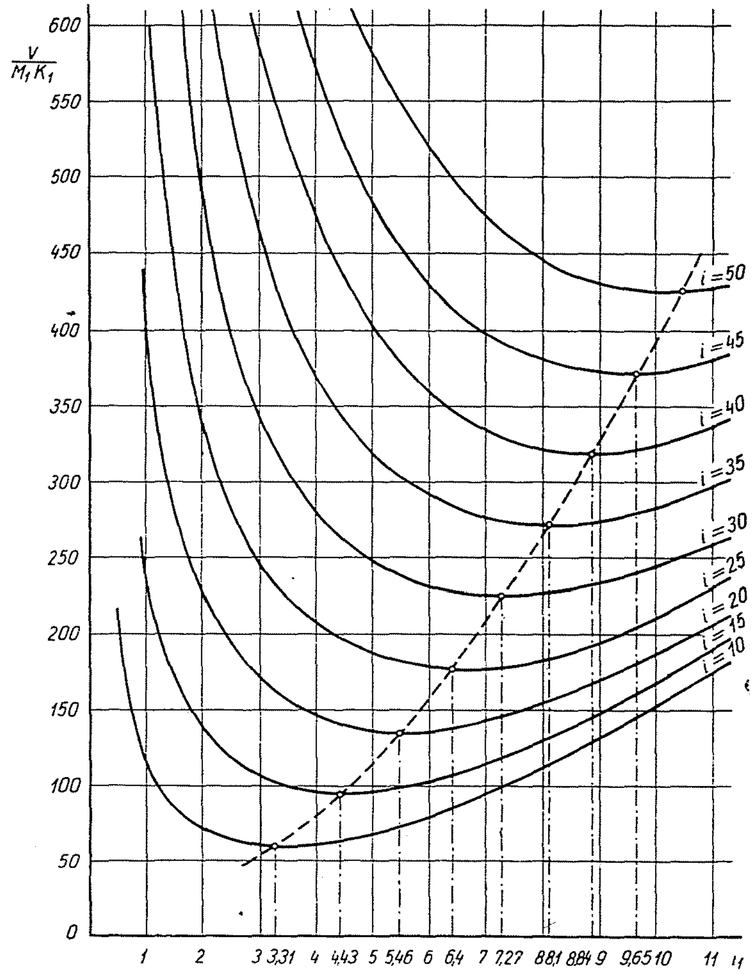


*Bild 4*

radgetriebes in der Anordnung gemäß Bild 5 lassen sich in Abhängigkeit vom Achsabstand folgendermaßen bestimmen.

*Gehäuselänge:*

$$A = \left(a + i_1 \frac{d_{w1}}{2} + i_2 \frac{d_{w2}}{2}\right) \varphi .$$

Da $d_{w1} = \dfrac{2\,a}{i_1 + 1}$ und $d_{w2} = \dfrac{2\,a}{i_2 + 1}$, ferner $i_2 = i/i_1$ ist, wird

$$A = a \left(1 + \frac{i_1}{i_1 + 1} + \frac{i}{i + i_1}\right) \varphi = a \varkappa \varphi .$$

*Gehäusebreite:*

$$B = (b_1 + b_2)\,\varphi^5 = \frac{K_1}{a^2}\left[\frac{(i_1+1)^3}{i_1} + \frac{i_1(i_2+1)^3}{i_2}\right]\varphi^5 = \frac{K_1}{a^2}\,\lambda\varphi^5 .$$

*Gehäusehöhe:*

$$C = i_1\, d_1\, \varphi^3 = 2\,a\,\frac{i_1}{i_1+1}\,\varphi^3 = a\,\mu\varphi^3,$$

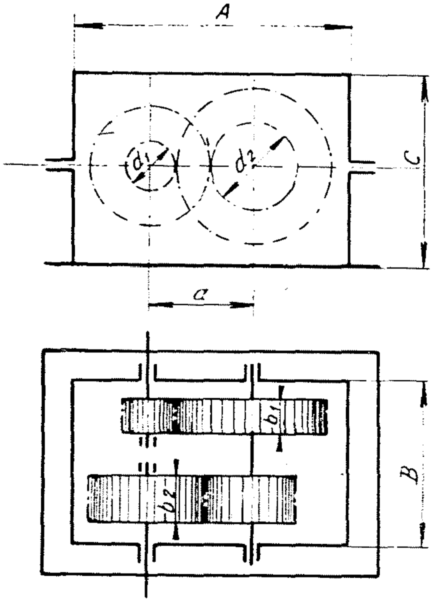


*Bild 5*

worin

$$\varkappa = \left(1 + \frac{i_1}{i_1+1} + \frac{i}{i+i_1}\right),$$

$$\lambda = \frac{(i_1+1)^3}{i_1} + \frac{i_1(i_2+1)^3}{i_2} \quad \text{und}$$

$$\mu = \frac{2\,i_1}{i_1+1} \;\text{ist.}$$



Setzt man bei der Berechnung der Gehäuseoberfläche die Auflagefläche, die Verbindungsflansche und die Rippen wieder zu $3AB$ an, dann erhält man für die Gehäuseoberfläche

$$F = 2\,(AC + 3AB + BC)$$

oder mit obigen Beziehungen

$$F = 2\,a^2 \varkappa\mu\varphi^4 + \frac{K_1}{a}(6\,\varkappa\lambda\varphi^6 + 2\,\lambda\mu\varphi^8).$$

Die kleinste Oberfläche ergibt sich, wenn

$$\frac{dF}{da} = 4\,a\,\varkappa\mu\varphi^4 - \frac{K_1}{a^2}(6\,\varkappa\lambda\varphi^6 + 2\,\lambda\mu\varphi^8) = 0,$$

woraus

$$a^3 = \frac{K_1(6\,\varkappa\lambda\varphi^2 + 2\,\lambda\mu\varphi^4)}{4\,\varkappa\mu}.$$

Das Verhältnis zwischen Achsabstand und Zahnbreite ist

$$\frac{a}{b_1 + b_2} = \frac{a^3}{K_1\lambda} = 1{,}5\,\frac{\varphi^2}{\mu} + 0{,}5\,\frac{\varphi^4}{\varkappa} = \frac{1{,}5\,\varphi^2(i_1+1)}{2\,i_1} + \frac{0{,}5\,\varphi^4}{1 + \frac{i_1}{i_1+1} + \frac{i}{i+i_1}}.$$

Ist beispielsweise $i = 20$, $i_1 = 5{,}5$ und $\varphi = 1{,}1$, dann ist $\frac{a}{b_1 + b_2} = 1{,}351$.

Bei größeren Übersetzungen besteht wegen der sich ergebenden übergroßen Zahnbreiten auch hier keine Möglichkeit die optimalen Abmessungen zu verwirklichen, doch gibt eine ähnliche eingehende Untersuchung eine gute Handhabe zu deren Annäherung.

Soll das weiter oben bereits erwähnte zweistufige Zahnradgetriebe mit rückkehrender Welle in stehender Anordnung gemäß Bild 6 ausgeführt werden, dann gilt im Sinne der vorangegangenen Ausführungen mit sinngemäßer Anwendung des Beiwertes $\varphi$ für die stehende Anordnung

$$\text{für } C = a\,\varkappa\varphi^3,$$

$$\text{für } B = \frac{K_1}{a^2}\lambda\varphi^5,$$

$$\text{für } A = a\,\mu\varphi.$$

Stellt man die Auflagefläche, die Verbindungsflansche und die Versteifungsrippen ähnlich wie oben mit $3AB$ in Rechnung, dann erhält man

$$\frac{a}{b_1 + b_2} = 1{,}5\,\frac{\varphi^2}{\varkappa} + 0{,}5\,\frac{\varphi^4}{\mu},$$

oder mit obigen Zahlenwerten einen Wert von $\frac{a}{b_1 + b_2} = 1{,}123$, d. h. eine ungünstigere Lösung als bei liegender Anordnung, weil sich ein breiteres Gehäuse ergibt. Die liegende Ausführung bietet auch insofern größere Vorteile, als bei dieser der obere Gehäuseteil mit geringerer Wandstärke gewissermaßen als nicht tragender Deckel ausgebildet werden kann, während hierzu bei vertikaler Anordnung keine Möglichkeit besteht. Nebst Bestimmung der günstigsten Oberfläche muß man mithin bei der Entscheidung auch die in Frage kommenden Wandstärken berücksichtigen.

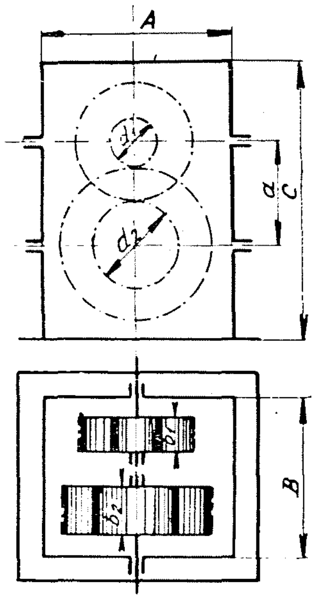


*Bild 6*

Der Einfachheit halber sind obige Ausführungen für geradzahnige Räderpaare abgeleitet worden, die gleichen Untersuchungen kann man aber ohne sonderliche Schwierigkeiten auch für schrägverzahnte Räder durchführen.

## Schlußfolgerungen

Aus obigen Gedankengängen können folgende Schlußfolgerungen gezogen werden :

1. Das Gewicht von Zahnradpaaren mit demselben Verzahnungssystem, mit gegebener Übersetzung und aus gegebenem Werkstoff, die zur Übertra-

gung eines bestimmten Drehmomentes dienen, ist unabhängig vom Achsabstand annähernd konstant.

2. Diese Feststellung ist auch für nicht volle große Räder (Abtriebsräder) gültig, da die Abmessungen des Radkörpers (Kranzstärke, Scheibenstärke usw.) mit dem Walzkreisdurchmesser stets verhältnisgleich sind.

3. Das Gewicht des Räderpaares läßt sich durch die Verzahnung beeinflussen. Eine auf Schlupf ausgeglichene Verzahnung ist wesentlich wirtschaftlicher als die zur Vermeidung des Unterschnittes korrigierte VO-Verzahnung. Bei auf Schlupf ausgeglichener Verzahnung läßt sich das optimale Gewicht besonders bei kleineren Übersetzungen durch Vergrößerung des Betriebseingriffswinkels und der Zähnezahlsumme erreichen.

4. Mehrstufige Getriebe können bei gegebener Gesamtübersetzung durch geeignete Wahl der Stufenübersetzungen mit optimalem Zahnradgewicht ausgeführt werden.

5. Bei geschlossenen Zahnradgetrieben bestimmen die Gehäuseabmessungen das günstigste Gewicht. Durch möglichste Verringerung des Achsabstandes und durch geeignete Wahl der Gehäusebreite läßt sich eine optimale Lösung finden.

## Zussamenfassung

Die Gewichte von Zahnradpaaren aus gleichen Werkstoffen und mit gleichen Verzahnungssystemen, die sich bei gleicher Übersetzung zur Übertragung gleicher Drehmomente eignen, sind unabhängig vom Achsabstand annähernd konstant. Dagegen weichen die Gewichte von Zahnradpaaren mit unterschiedlichen Verzahnungssystemen voneinander wesentlich ab. Die Verzahnungen mit ausgeglichenem Schlupf sind wesentlich wirtschaftlicher als die zur Vermeidung des Unterschnittes korrigierten VO-Verzahnungen, und durch Vergrößerung des Eingriffswinkels sowie durch Erhöhung der Zähnezahlsumme läßt sich dieser Vorteil besonders bei kleineren Übersetzungen noch steigern. Bei Zweistufen-Zahnradgetrieben besteht die Möglichkeit, durch entsprechende Wahl der Übersetzung der einzelnen Stufen ein optimales Zahnradgewicht zu erzielen. Desgleichen lassen sich bei Zahnradgetrieben durch geeignete Wahl des Achsabstandes und der Gehäusebreite optimale Lösungen finden.

## 7. Schrifttum

1. Botka, I.: Egységes magyar homlokkerék fogazási rendszer (»Einheitliches ungarisches Stirnrad-Verzahnungssystem«). Ingenieur-Fortbildungsinstitut, Budapest, 1953 (Manuskript).
2. Varga, J.: Ganz—Botka fogazási rendszer (»Das Ganz—Botka Verzahnungssystem«). MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. **IV**, 2 (1952).

Prof. J. Varga, Budapest XI., Stoczek u. 2. Ungarn.