

BERECHNUNG GEWISSER VIERENDEEL-TRÄGER IN SEITENWÄNDEN VON EISENBAHNWAGEN UND OMNIBUSSEN

Von

P. MICHELBERGER

Lehrstuhl für Flugzeugbau der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 21. Februar 1959)

1. Einleitung

Zur Berechnung von Vierendeel-Trägern wurden mehrere Methoden entwickelt, doch lassen sich die einzelnen Verfahren im allgemeinen nur auf gewisse Typen gut anwenden [1]. Außer den genauen (z. B. Ostefeld-Verfahren) kommt hauptsächlich den Näherungsmethoden eine große Rolle zu (Cross- bzw. Cross—Morris-Verfahren). Des Castigliano-Satzes sowie des Kräfte-Verfahrens bedient man sich wegen ihrer Umständlichkeit zur Berechnung von Vierendeel-Trägern nicht, obwohl es im allgemeinen diese beiden Methoden sind, die der Maschinenbauingenieur kennt. Auch bei der Berechnung der Wände von Eisenbahnwagen, die im wesentlichen Vierendeel-Träger darstellen, benützt man die allgemein bekannten Methoden des Kräfteverfahrens. Zur Vereinfachung der Rechenarbeit muß man sich jedoch mit der grundlegenden Voraussetzung abfinden, daß der obere Flansch am Träger im Vergleich zum unteren sehr weich ist. So nimmt BIECK [2] eine Zugstangenkonstruktion an, eine Annahme, die ERDÓS [3] einigermaßen verbessert. FÁBRY [4] fügt in die Mitte des oberen Flansches ein Gelenk ein, was nach Auffassung des Verfassers nur bei sehr weichem oberem Flansch zulässig ist $\left(\frac{I_u}{I_0} = 50 \div 30\right)$.

Einer Konstruktion jedoch, in der der untere und obere Flansch sehr starr, die Säulen dagegen sehr weich sind, entsprechen diese Voraussetzungen nicht, und die verschiedenen Näherungsmethoden können wegen ihrer schlechten Konvergenz nicht angewendet werden. Ein derartiger Konstruktionstyp findet sich bei einigen Eisenbahnwagen und Omnibussen. Auch als Hängestangen dürfen die Säulen nicht betrachtet werden, da diese Voraussetzung bei der Bemessung der Fensterrahmen zu falschen Ergebnissen führen würde. Zur Lösung dieser Probleme arbeitete P. CSONKA ein modifiziertes Cross-Verfahren, ferner A. MINA und I. BOGNÁR eine vom Cross-Verfahren unabhängige Näherungsmethode aus [5, 6]. Beide Verfahren vernachlässigen die durch die Scherkräfte verursachten Deformationen, und auch die Deformatio-

nen durch Normalkräfte werden nur durch das Mina—Bognár-Verfahren und auch hier nur bei den Gurten berücksichtigt.

Im folgenden soll eine genaue Lösung der Frage mit der Kräfte methode versucht werden, wobei das Grundsystem so zu wählen sein wird, daß möglichst wenig Rechenarbeit nötig werde. Die genaue Lösung eines Vierendeel-Trägers mit n abgeschlossenen Feldern nach der Kräfte methode führt im allgemeinen zu einem Gleichungssystem mit $3n$ Unbekannten (das Ostenfeld-Verfahren, das von der Bewegungsmethode ausgeht, führt bloß zu $2n + 1$ Gleichungen). Für Vierendeel-Träger mit waagerechter Symmetrieachse lassen sich die $3n$ Gleichungen (d. h. Unbekannten) nach der nachstehenden Methode, die auf dem bekannten σ -Punkt-Verfahren beruht, in zwei voneinander unabhängige Gruppen teilen, bei denen in einer Gleichung 3 bzw. 4 — ausnahmsweise 5 — Unbekannte vorkommen (sofern auch die Normalkräfte berücksichtigt werden). Weiter kann festgestellt werden, daß dieses Verfahren für hinsichtlich der Starrheit nicht als symmetrisch anzusehende Konstruktionen, bei den für einige Waggon- und Omnibuswandkonstruktionen in Frage kommenden Abmessungen eine sehr gute Näherung, bzw. in Ausnahmefällen auch eine genaue Lösung gibt.

2. Lösung symmetrischer Systeme

Untersuchen wir nun einen Vierendeel-Träger, der aus beliebigen Elementen mit ungleicher Starrheit und aus beliebig vielen Feldern besteht (Bild 1). Die äußere Belastung kann ganz beliebig sein, die einzige Voraussetzung ist, daß die Konstruktion eine Längssymmetrieachse (x) hat. Die

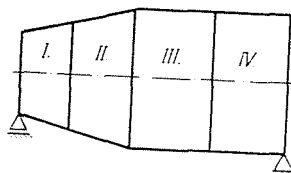


Bild 1

Symmetrie bezieht sich nicht nur auf die Form, sondern auch auf die Starrheit. Für die weitere Untersuchung greifen wir ein Feld aus dem Vierendeel-Träger heraus.

Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildet das sogenannte σ -Punkt-Verfahren [7], das von A. KHERNDL, Professor der Technischen Hochschule Budapest, schon im Jahre 1882 für einfach geschlossene Rahmen gearbeitet wurde. Indem er die Trennstelle zur Bildung des Grundsystems in

einen geeigneten Punkt — eben den σ -Punkt — verlegte, gelang es ihm, das für geschlossene Rahmen geltende Gleichungssystem mit drei Unbekannten in drei voneinander unabhängige Gleichungen mit je einer Unbekannten aufzulösen. Bezeichnen X_1 und X_2 die im Trennschnitt in Richtung x bzw. y auftretenden unbekannt inneren Kräfte, X_3 hingegen das unbekannte Moment, dann gestaltet sich das Gleichungssystem bei der gewöhnlichen und bei der σ -Punkt-Lösung (gemäß den Beziehungen 1) folgendermaßen:

Gewöhnliche Lösung	σ -Punktverfahren	
$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \delta_{10} = 0$	$X_1 \delta'_{11} + \delta'_{10} = 0$	(1)
$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \delta_{20} = 0$	$X_2 \delta'_{22} + \delta'_{20} = 0$	
$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \delta_{30} = 0$	$X_3 \delta'_{33} + \delta'_{30} = 0,$	

wo

$$\delta_{ik} = \oint \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{IE} ds.$$

Das Kreisintegral bedeutet, daß die Integrierung längs dem gesamten Rahmenumfang vorzunehmen ist. In einem kurzen Schema kann die obige Vereinfachung folgendermaßen graphisch dargestellt werden (Bild 2). Im Schema

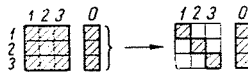


Bild 2

bedeuten die waagerechten Ziffern die Unbekannten, die senkrechten die Gleichungen. Die letzte, gesonderte Vertikalreihe gibt die Konstanten an. Die schraffierten Felder bedeuten die von Null verschiedenen, die leeren Felder hingegen die nullwertigen Koeffizienten.

Die Erklärung dafür, daß die im Gleichungssystem vorkommenden gemischten Beiwerte (δ'_{ik} , wo $k \neq i$) bei Anwendung des σ -Punkt-Verfahrens den Wert Null haben, folgt im allgemeinen daraus, daß die über den ganzen Rahmenumfang genommenen positiven und negativen Integralwerte aus dem Produkt der entsprechenden Momente miteinander gleich sind und dementsprechend nach Summierung Null ergeben.

Wenn der Rahmen über eine x -gerichtete Symmetrieachse verfügt, kann eine im Vergleich mit dieser Voraussetzung engere Definition gegeben werden. Das von der Einheit X_1 der x -gerichteten Kraftwirkung geweckte Moment ist an den y -gerichteten Rahmenseiten von der Achse x aufwärts und abwärts

gleichwertig, hat aber entgegengesetzte Vorzeichen, während das von der Einheit X_2 der y -gerichteten Kraftwirkung sowie das von der Momenteneinheit X_3 stammende Moment auf demselben Abschnitt konstant ist. Der auf die y -gerichteten Seiten des Rahmens bezogene Wert $\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{IE} ds$ ist auch gesondert für sich Null (vorausgesetzt, daß $i = 1$ und $k \neq i$). Diese Eigenschaft wird von uns zur Lösung vielfacher Rahmen, d. h. von Vierendeel-Trägern benutzt. Wir müssen erwähnen, daß eine sogenannte verbundene σ -Punkt-Methode für mehrfeldige Bogen schon von A. SCHWERTNER ausgearbeitet wurde [8], der statisch unbestimmte Ersatzbalken (Grundsysteme) benutzt, was aber dem Maschinenbauingenieur fremd und ziemlich unbekannt ist, so daß wir die Lösung auf einem anderen Wege suchen werden.

Im folgenden wollen wir allein Vierendeel-Träger mit parallelen Flanschen betrachten, ohne daß diese Voraussetzung unsere Feststellungen einschränken würde.

Bestimmen wir nun den Ort des σ -Punktes in sämtlichen Rahmenfeldern des Vierendeel-Trägers. (Jedes Feld wird als selbständiger, geschlossener Rahmen betrachtet.) Die einzelnen Rahmenfelder berühren sich an den y -gerichteten Rahmenseiten (Säulen), oder genauer, die Säule zwischen je zwei benachbarten Feldern ist gemeinsam. Wenn wir, wie oben beschrieben, die Einheiten der Unbekannten im σ -Punkt wirken lassen, so werden die Integrale der Produkte aus dem durch die Einheit der x -gerichteten Kraftwirkung an den Säulen verursachten Moment einerseits und den Momenten der beiden anderen, im Feld wirkenden Unbekannten andererseits, auch je für sich Null ergeben. Werden die Momente aus der y -gerichteten und vom benachbarten Rahmen auf die gemeinsame Säule entfallenden Kraftereinheit bzw. aus dem Einheitsmoment mit dem Momentenwert aus der bei dem untersuchten Rahmen wirksamen, x -gerichteten Kraftereinheit multipliziert und entlang der Säule integriert, so erhält man nach denselben Überlegungen gleichfalls Null, was im wesentlichen soviel bedeutet, daß sich unser Gleichungssystem mit $3n$ Unbekannten in zwei unabhängige Gruppen auflöst; in der einen Gruppe kommen in n Gleichungen nur die x -gerichteten unbekanntenen Kräfte, in der anderen in $2n$ Gleichungen nur die y -gerichteten Kräfte und die unbekanntenen Momente vor. Trennt man die Rahmenfelder der Vierendeel-Träger üblicherweise (z. B. feldweise im oberen Gurt), so kommen in jeder Gleichung im allgemeinen 9 Unbekannte vor. Mit dem σ -Punkt-Verfahren hat man in einer Gleichung 3, bzw. in der zweiten Gruppe je 5 Unbekannte. Die Gestaltung der Gleichungssysteme veranschaulichen die hier folgenden Schemen (Bild 3). Die Deutung der Schemen entspricht derjenigen für den einfach geschlossenen Rahmen.

Zur Bezeichnung der x -gerichteten unbekanntenen Kräfte gebrauchen wir die Indizes $1, 4, 7, \dots, 3a + 1$, zur Bezeichnung der y -gerichteten Kräfte die

Indizes 2, 5, 8, ... $3\alpha + 2$, und zur Bezeichnung des Moments die Indizes 3, 6, 9, ... $3\alpha + 3$. Im Feld n wird der Wert α zu $n-1$.

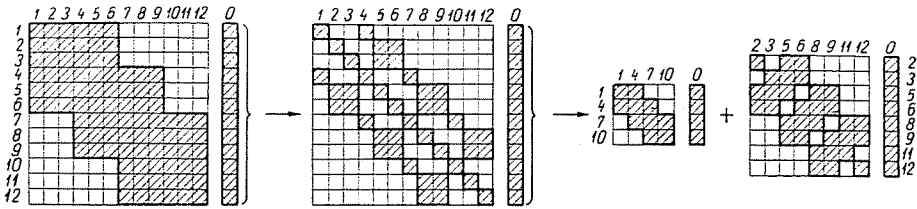


Bild 3

Unterzieht man die Koeffizienten der Unbekannten einer Prüfung, dann kann festgestellt werden, daß einige unter ihnen paarweise einander proportional sind

$$\begin{aligned}
 \delta_{3\alpha+3, 3\alpha+5} &= a\delta_{3\alpha+2, 3\alpha+5} \\
 \delta_{3\alpha+3, 3\alpha+6} &= a\delta_{3\alpha+2, 3\alpha+6} \\
 \delta_{3\alpha+2, 3\alpha+6} &= b\delta_{3\alpha+2, 3\alpha+5} \\
 \delta_{3\alpha+3, 3\alpha+6} &= b\delta_{3\alpha+3, 3\alpha+5}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Mit Hilfe dieser Zusammenhänge kann der zweite Teil des Gleichungssystems weiter vereinfacht werden (Bild 4); wenn man je zwei Gleichun-

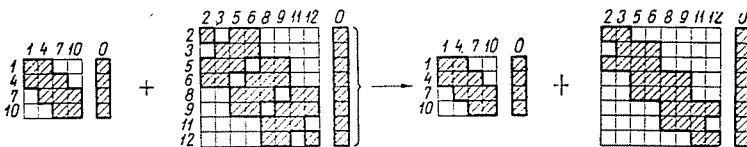


Bild 4

gen mit dem entsprechenden Faktor multipliziert und addiert, kann die Zahl der Unbekannten in einer Gleichung auf höchstens vier vermindert werden. (In diesem Gleichungssystem ist im allgemeinen $\delta_{ki} \neq \delta_{ik}$).

Ähnlich gelangt man zu zwei unabhängigen, aber wesentlich komplizierteren Gleichungsgruppen auch dann, wenn man die Belastung in symmetrische und antisymmetrische Teile zerlegt, und die Schnitte auf der Symmetrieachse annimmt. Aus der symmetrischen Belastung entstehen nämlich nur symmetrische Unbekannte, aus der antisymmetrischen hingegen nur antisymmetrische.

Ein Problem bedeutet die Vorzeichenregel. Man kann z. B. die folgende Regel befolgen: In jedem Feld kann jenes Moment als positiv angesehen wer-

den, das das Rahmenfeld zu schließen strebt, negativ dagegen jenes Moment, das das Feld öffnet. Das Moment wird stets über der gezogenen Seite aufgetragen. Zur Feststellung einzelner Koeffizienten wird das Produkt aus den an einer Seite liegenden Momenten als positiv betrachtet (was besonders bei den Säulen wichtig ist).

3. Näherungsverfahren bei asymmetrisch starren Konstruktionen

Verfügt der Träger in bezug auf Starrheit über keine x -gerichtete Symmetrieachse, so kann das Verfahren nur als Näherung betrachtet werden. Diese ist selbstverständlich um so besser, je weniger die Konstruktion von der Symmetrie abweicht. Für diesen Fall soll die Voraussetzung gelten, daß jedes Feld über eine eigene y -gerichtete Symmetrieachse verfügt. Wie bekannt, stellt der σ -Punkt den Schwerpunkt des hypothetischen Rahmenbogens dar, der aus den Bedingungen

$$\oint y \frac{ds}{EI} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \oint x \frac{ds}{EI} = 0$$

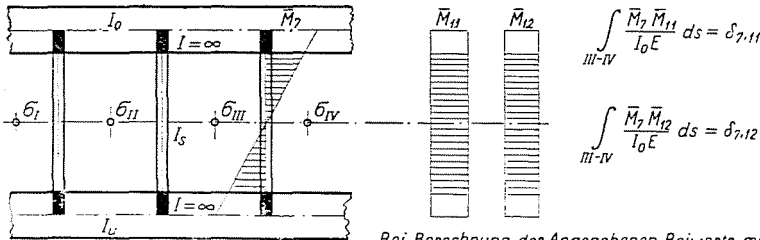
bestimmt wird. Wenn das statische Moment der Bogenelemente auf eine beliebige Achse gerechnet wird, so erhält man die Stelle des Schwerpunktes aus den Beziehungen

$$y_s = \frac{\oint y \frac{ds}{EI}}{\oint \frac{ds}{EI}} \quad \text{bzw.} \quad x_s = \frac{\oint x \frac{ds}{EI}}{\oint \frac{ds}{EI}}$$

Die ausschlaggebenden Abschnitte dieser Formeln liegen dort, wo das Produkt EI klein und die Starrheit dementsprechend gering ist.

Letzten Endes kann festgestellt werden, daß die Lage des σ -Punktes in erster Reihe (aber nicht in allen Fällen) von den weicheren Elementen abhängt. Sind also die Säulen wesentlich weicher als der Gurt der Vierendeel-Träger, dann fällt der σ -Punkt auch weiterhin mit guter Annäherung in die halbe Höhe der Säulen (d. h. in die geometrische Symmetrieachse). Ist die Abweichung gering, dann haben die Beiwerte der Form δ_{15} ; δ_{16} ; δ_{48} , usw. nicht genau den Wert Null, doch können sie den anderen Beiwerten gegenüber vernachlässigt werden. Es muß bemerkt werden, daß die Trägheit auf jenen Abschnitten, auf denen das von den x -gerichteten Kräften stammende Moment an den Säulen groß ist (d. h. an den Enden der Säulen), im allgemeinen wesentlich anwächst ($J = \infty$)[4, 5, 6]; der Wert von $\delta_{ik} = \frac{M_i M_k}{IE} ds$ ist also sehr klein

oder Null, sofern $i = 1, 4 \dots$ und $k = 2, 3, 5, 6 \dots$ (Bild 5). Bezeichnen wir die Länge der endlich starren Stababschnitte als freie Länge, so wird das σ -Punkt-Verfahren für Konstruktionen mit asymmetrischer Starrheit nur dann als genau gelten, wenn die Verbindungslinie der σ -Punkte die freie Länge der Säulen halbiert. Die Abweichung beträgt aber auch im Falle eines bedeutenden $\frac{I_u}{I_0}$ Wertes (etwa bei $\frac{I_u}{I_0} = 4$) bei den bei Omnibussen und Eisenbahnwagen üblichen Abmessungen nur einige mm, höchstens 1 bis 2 cm.



Bei Berechnung der Angegebenen Beiwerte müssen nur die schraffierten Momente beachtet werden

Bild 5

4. Geometrische Deutung der Beiwerte

Bekanntlich kann bei einfach geschlossenen Rahmen den von Null abweichenden Beiwerten eine anschauliche Bedeutung beigegeben werden, wenn die Rahmenseiten als aus imaginären Linienelementen $du = \frac{ds}{EI}$ bestehend angenommen werden.

$$\delta_{11} = \oint y^2 du = I_x \tag{3}$$

ist dann das Moment zweiter Ordnung der imaginären Linien auf die durch den σ -Punkt führende Achse x ,

$$\delta_{22} = \oint x^2 du = I_y \tag{3''}$$

hingegen das Moment zweiter Ordnung der imaginären Linien auf die durch den σ -Punkt führende y -Achse, während

$$\delta_{33} = \oint du = U \tag{3'''}$$

den imaginären Umfang des Rahmens bedeutet. (Wenn alle Elemente gleiche Trägheit aufweisen, so ist U dem geometrischen Umfang des Rahmens natürlich proportional).

Eine ähnlich anschauliche Bedeutung kann den einzelnen Beiwerten bei den Vierendeel-Trägern beigegeben werden. Bezeichnen die Indizes I, II, III die einzelnen Felder, und setzt man zur Bezeichnung der zwischen je zwei Nachbarfeldern stehenden Säulen die Indizes beider Felder, dann werden

$$\delta_{11} = \oint_1 y^2 du = I_{x_1} \quad (4)$$

$$\delta_{22} = \oint_1 x^2 du = I_{y_1} \quad (5)$$

$$\delta_{33} = \oint_1 du = U_1 \quad (6)$$

Ähnlich lassen sich die in der Diagonale des Gleichungssystems liegenden Beiwerte auch für die übrigen Felder deuten.

Die gemischten Beiwerte sind:

$$\delta_{14} = - \int_{I-II} y^2 du = -I_{x_{I-II}} \quad (7)$$

$$\delta_{25} = \frac{l_1 l_{11}}{4} \int_{I-II} du = \frac{l_1 l_{11}}{4} U_{I-II} \quad (8)$$

$$\delta_{26} = - \frac{l_1}{2} \int_{I-II} du = - \frac{l_1}{2} U_{I-II} \quad (9)$$

$$\delta_{35} = \frac{l_{11}}{2} \int_{I-II} du = \frac{l_{11}}{2} U_{I-II} \quad (10)$$

$$\delta_{36} = - \int_{I-II} du = -U_{I-II} \quad (11)$$

wobei also U_{I-II} die imaginäre Länge des Stabes, l_1 und l_{11} hingegen die Breite je zweier benachbarter Felder bedeuten.

Hierzu sei bemerkt, daß die Formeln für den Fall gelten, daß die einzelnen Felder eine senkrechte Symmetrieachse besitzen. Die Formeln geben zugleich auch die geometrische Bedeutung der eingangs erwähnten Zusammenhänge [2]. Wie ersichtlich, sind die Faktoren a und b die Kehrwerte der halben Breite der einzelnen Felder. Die aus der äußeren Belastung stammenden Beiwerte stimmen mit der Deutung für die einfach geschlossenen Rahmen

überein. Betrachtet man nun das Produkt $du_0 = \frac{M_0 ds}{EI}$ als Element der imagi-

nären Rahmenlänge, dann werden

$$\delta_{01} = -\oint_I y \, du_0 = -S_{0x_1} \quad (12)$$

$$\delta_{02} = \oint_I x \, du_0 = S_{0y_1} \quad (13)$$

$$\delta_{03} = \oint_I du_0 = U_{01} \quad (14)$$

und weiter

$$\delta_{04} = \oint_{II} y \, du_0 = -S_{0x_{II}} \quad (15)$$

$$\delta_{05} = \oint_{II} x \, du_0 = S_{0y_{II}} \quad (16)$$

$$\delta_{06} = \oint_{II} du_0 = U_{0II} \quad (17)$$

5. Berücksichtigung des Einflusses der Scher- und der Normalkräfte

Die Aufgabe erfordert nicht viel mehr Arbeit, wenn man auch die Scherkräfte in Betracht zu ziehen wünscht. In diesem Fall können natürlich die einzelnen Beiwerte nicht geometrisch gedeutet werden. Die Berücksichtigung der Scherkräfte berührt allein die Beiwerte δ_{11} , δ_{22} bzw. δ_{14} , was also über die Vereinfachung unseres Gleichungssystems gesagt wurde, trifft auch hier zur Gänze zu. Berücksichtigt man die Scherkräfte, dann werden die in der Hauptdiagonale befindlichen Beiwerte noch stärker dominieren, da sich der absolute Wert von δ_{14} vermindern, von δ_{11} , δ_{22} , δ_{44} usw. dagegen erhöhen wird, das Gleichungssystem wird also für ein Iterations- oder Relaxationsverfahren noch mehr geeignet.

Die Berücksichtigung der Normalkräfte verändert die Beiwerte δ_{11} , δ_{22} und δ_{25} , was zur Folge hat, daß die zweite Gruppe des Gleichungssystems nicht in Gleichungen mit je 4 Unbekannten umgestaltet werden kann, sondern in diesen im allgemeinen je 5 Unbekannte vorkommen können. Die Beiwerte in der Hauptdiagonale werden aber in diesem Fall einen noch größeren Einfluß haben, da sich der Absolutwert von δ_{25} vermindert, δ_{11} und δ_{22} dagegen natürlich wachsen. Weiter muß bemerkt werden, daß die Berücksichtigung der Scher- und der Normalkräfte bei den asymmetrisch starren Konstruktionen die Näherungswerte verbessert, die das vorgeschlagene Verfahren liefert.

Die Berücksichtigung der Scherkräfte kann die berechnete Beanspruchung der Säulen und Gurte bedeutend ändern. In extremen Fällen kann das berechnete Moment der Stäbe um 30% ansteigen (Beispiel 1).

6. Praktische Bemerkungen

Die einzelnen Beiwerte können bei Vierendeel-Trägern, die aus gleichen Feldern bestehen, leicht ermittelt werden, da die Beiwerte in diesem Fall nur für ein Feld bestimmt werden müssen, denn

$$\delta_{11} = \delta_{44} = \delta_{77} \dots \delta_{22} = \delta_{55} = \delta_{88} \dots \text{ usw.}$$

Bei sehr schlanken Stäben sind die Beiwerte in den Hauptdiagonalen nicht unbedingt größer als die übrigen. In diesem Fall wird man sich zur Lösung des Gleichungssystems zweckmäßig z. B. des Eliminationsverfahrens von Gauß oder der von Gulden ausgearbeiteten, kürzeren Variante bedienen, während bei symmetrischen Gleichungssystemen das diadische Verfahren von Egervári sehr vorteilhaft angewendet werden kann. Weicht die Lage des σ -Punktes stärker von der Geraden ab, die die Halbierenden der freien Säulenlängen verbindet, so kann man die Ergebnisse zweckmäßig durch Relaxieren verbessern, wobei die mit der beschriebenen Methode gewonnenen Werte als Ausgang benutzt werden (Beispiel 2). Übrigens gibt der höchste unter den ersten Fehlerwerten der Relaxationsrechnung Aufschluß über die Genauigkeit der Annäherung. Sind diese Anfangsfehler sehr gering, so ist es zwecklos, die Relaxationsrechnung zu Ende zu führen.

7. Beispiele

1. Beispiel. (Bild 6)

Das Moment wurde in allen Elementen der Konstruktion erst unter Berücksichtigung der Deformationen, die die Biegemomente allein verur-

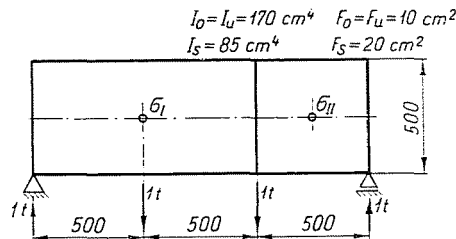


Bild 6

sachen, sodann der durch die Momente und Scherkräfte, und schließlich der durch die Momente, durch die Scher- und Normalkräfte verursachten Deformationen ermittelt. Die Querschnittswerte der Gurte sind mit jenen des Normal-Walzeisenprofils I 100 nahezu identisch, die Säulen haben Rechteck-

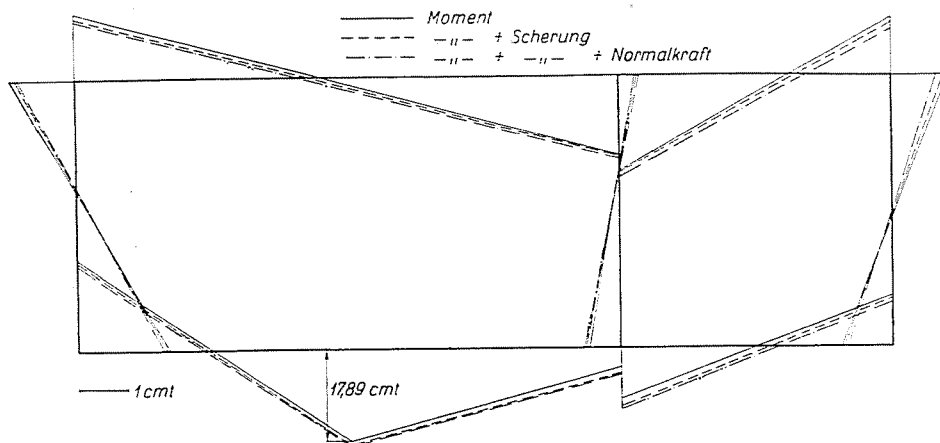


Bild 7

querschnitt. Im folgenden sind die Beiwertgrößen des Gleichungssystems sowie die Werte der Unbekannten tabellarisch angegeben (Tabellen I und II). In Bild 7 sind die nach den verschiedenen Methoden errechneten Momente graphisch

Tabelle I

Beiwert	Aus dem Moment	Aus der Scherung	Aus der Normalkraft
δ_{11}	+ 83333	+2210	+1700
δ_{14}	- 10400	+1105	-
δ_{22}	+333333	+8840	+ 425
δ_{23}	+ 62500	-	+ 212
δ_{26}	- 2500	-	-
δ_{33}	+ 200	-	-
δ_{35}	+ 1250	-	-
δ_{36}	- 50	-	-
δ_{44}	+ 52000	+2210	+ 850
δ_{55}	+ 73000	+4420	+ 425
δ_{66}	+ 150	-	-
δ_{10}	+ 46800	-	-
δ_{20}	+ 20800	+2210	-
δ_{30}	+ 1874	-	-
δ_{40}	+ 15620	-	-
δ_{50}	- 5200	-2210	-
δ_{60}	+ 625	-	-

Tabelle II
Die Unbekannten

Unbekannte	Moment	Moment und Scherung	Moment, Scherung und Normalkraft	Maßeinheit
X_1	— 0,615	— 0,589	— 0,575	t
X_2	— 0,283	— 0,277	— 0,279	t
X_3	—16,73	—16,56	—16,625	cmt
X_4	— 0,424	— 0,388	— 0,36	t
X_5	+ 0,6	+ 0,582	+ 0,586	t
X_6	—14,42	—14,2	—14,36	cmt

dargestellt. Es muß erwähnt werden, daß der mittlere Teil der Gurte und die mittlere Säule der Berechnung gemäß bei Berücksichtigung der Scher- und der Normalkräfte eine wesentlich stärkere Belastung erhält. Bei den Seitenwänden von Eisenbahnwagen ist die Gurthöhe im Verhältnis zu der Länge der einzelnen Gurtabschnitte wesentlich größer als im vorliegenden Beispiel, der Einfluß der Scherkräfte ist somit bei diesen noch bedeutender.

2. Beispiel

Die Momente einer geometrisch dem vorangegangenen Beispiel ähnlich angeordneten, hinsichtlich der Starrheit jedoch asymmetrischen Konstruktion (Bild 8) wurden nach der Näherungsmethode errechnet (also unter der Voraussetzung $\delta_{15} = 0$; $\delta_{16} = 0$; $\delta_{24} = 0$; $\delta_{31} = 0$); auf Grund der gewonnenen Resultate wurde durch Relaxieren auch das genaue Endergebnis ermittelt. (Tabellen III und IV.) Es läßt sich feststellen, daß

Tabelle III

Beiwerte		Beiwerte	
δ_{11}	+0,1975	δ_{10}	+0,0097
δ_{22}	+2,0417	δ_{20}	+0,0042
δ_{33}	+2,1250	δ_{30}	+0,0187
δ_{44}	+0,1975	δ_{40}	+0,0065
δ_{55}	+0,5104	δ_{50}	—0,0021
δ_{66}	+2,1250	δ_{60}	+0,0125
δ_{14}	—0,0838	δ_{15}	+0,0060
δ_{25}	+0,5000	δ_{16}	—0,0120
δ_{26}	—1,0000	δ_{24}	—0,0120
δ_{35}	+0,5000	δ_{26}	—0,0120
δ_{36}	—1,0000		

Statt des Wertes I werden nur
Verhältniszahlen benutzt

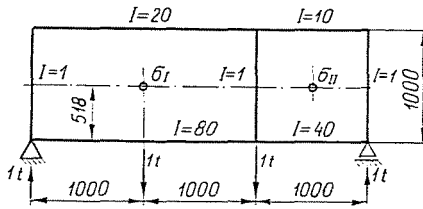


Bild 8

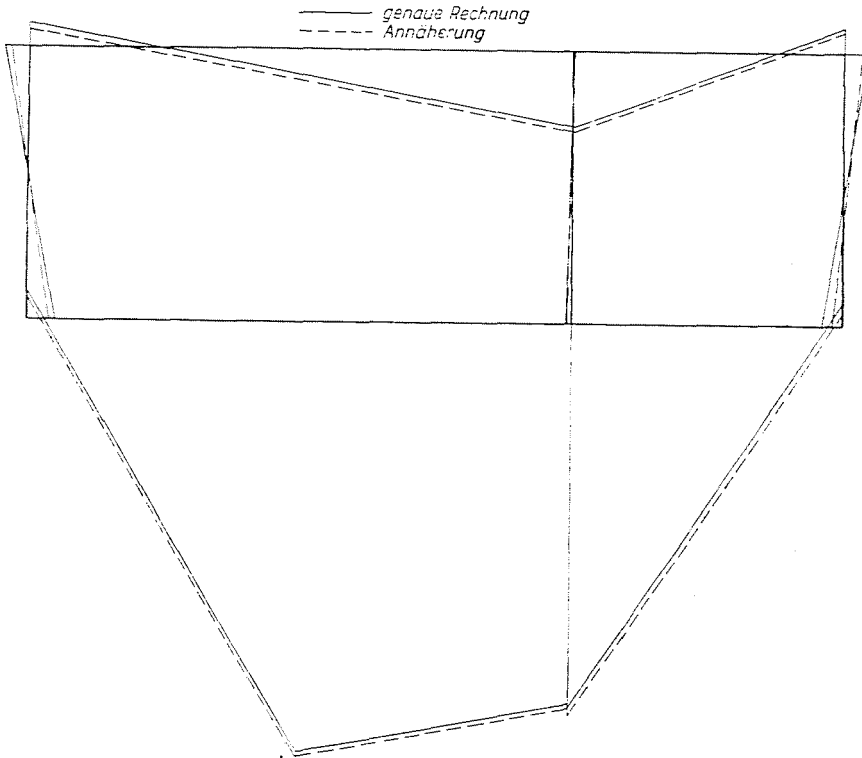


Bild 9

das Resultat der Näherungsrechnung von dem nur mit Berücksichtigung der Momente gewonnenen »genauen« Ergebnis im allgemeinen in derselben Richtung abweicht, als wenn man bei genauer Berechnung auch die Scher- und die Normalkraft berücksichtigt hätte. Auf dieser Grundlage kann vorgeschlagen werden, bei der Näherungsrechnung nur das Moment, bei der Ermittlung des genauen Ergebnisses mittels Relaxation hingegen die Scher- und die Normalkraft gleichfalls in Betracht zu ziehen. Bei den bei Eisenbahn-

Tabelle IV

Unbekannte	Annäherungs- wert	»Genauere« Wert	Maßeinheit
X_1	-0,0772	-0,0997	t
X_2	-0,0958	-0,0961	t
X_3	-0,099	-0,0994	mt
X_4	-0,06575	-0,0881	t
X_5	+0,1966	+0,1975	t
X_6	-0,0931	-0,0931	mt

wagen und Omnibussen üblichen Werten weicht das Näherungsergebnis von dem genauen nur unbedeutend ab. Übrigens hätte es in unserem Beispiel genügt, das Relaxieren nur bei der Berechnung der x -gerichteten Kräfte durchzuführen, da nur diese wesentlich vom »genauen« Wert abweichen.

Zusammenfassung

Die Seitenwände der Eisenbahnwagen und Autobusse werden als Vierendeel-Träger bemessen. Bei den meisten Bemessungsverfahren ist vorausgesetzt, daß der obere Gurt des Trägers im Vergleich zum unteren sehr schwach ist. Das Csonka- und Mina—Bognár-Verfahren eignet sich auch zur Bemessung von Konstruktionen mit starkem oberem Gurt, doch wird die Wirkung der Seher- und der Normalkräfte bei den Berechnungen außer acht gelassen. Bei dem beschriebenen Kräfteverfahren kann das Gleichungssystem mit vielen Unbekannten in zwei einfachere, unabhängige Gruppen aufgelöst werden, wobei die unbekanntes Gurtspannkkräfte an Hand eines aus Gleichungen mit je drei Unbekannten bestehenden Gleichungssystems, die beiden anderen Unbekanntengruppen hingegen aus einem Gleichungssystem ermittelt werden können, dessen Gleichungen je vier, ausnahmsweise je fünf Unbekannte enthalten.

Literatur

1. PALOTÁS, L.: Theorie und Berechnung von Rahmen, Budapest 1951, 228 (ungarisch).
2. BIECK, A.: Berechnung des Rahmenträgersystems in den Seitenwänden der neuen eisernen Wagen der Berliner Hochbahn, *Glaser's Annalen* 51, 175, 183 (1927).
3. ERDŐS, A.: Einige Formeln zur Festigkeitsberechnung von Wagenkästen, *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens* 30 (1943).
4. FÁBRY, CH. W.: Leichtbau-Probleme und ihre statische Erfassung im Waggonbau, *Glaser's Annalen* 76, 206 (1952).
5. MINA, A.: Berechnung geschweißter selbsttragender Kästen und geschweißter Drehgestelle für Elektro- und Dieselelektrolokomotiven. II. Teil. Grundsätze für die Berechnung der selbsttragenden Kästen von Eisenbahnfahrzeugen (Institut für Weiterbildung von Ingenieuren, Budapest 1953). (Ungarisch.)
6. MINA, A.: Tragwerke von Eisenbahnfahrzeugen (Institut für Weiterbildung von Ingenieuren, Budapest 1952). (Ungarisch.)
7. KORÁNYI, I.: Statik der Tragwerke II. Budapest 1956, 206 (ungarisch).
8. SCHWERTNER, A.: Statik der Stahlbetonkonstruktionen. Budapest 1950 (ungarisch).