DIE TEMPERATURVERTEILUNG IN STRAHLUNGSHEIZFLÄCHEN

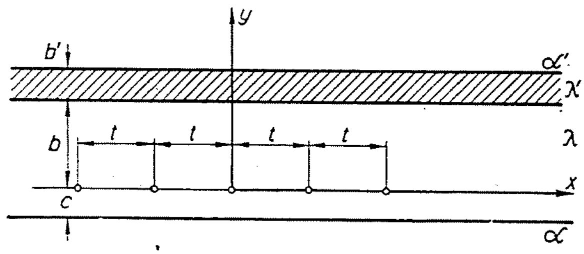
Von

J. GRUBER

Lehrstuhl für Strömungslehre an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 7. Oktober 1957)

Die Bestimmung der Temperaturverteilung an den Heizflächen is, beim Entwerfen von Strahlungsheizungen nicht nur vom theoretischent sondern auch vom praktischen Gesichtspunkt sehr wichtig. Diese Aufgabe wurde von W. NUßELT [1] und G. LÜCK [2] für den Fall einer einzelnen, in eine Betonschicht gebetteten Heizrohrreihe gelöst. Beide behandeln die



Rohrreihe als ein ebenes Problem, doch beanspruchen ihre Lösungen langwierige Rechenarbeit und konnten sich deshalb in der Praxis nicht durchsetzen.

Im weiteren wird ein Verfahren mitgeteilt, das die Aufgabe ebenfalls als ein ebenes Problem behandelt, doch wesentlich weniger und kürzere Rechenarbeit erfordert als die Methode von NUßELT bzw. von LÜCK.*

Die in Beton gebettete Heizrorhrreihe ersetzen wir durch eine Reihe von unendlich dünn vorgestellten Fäden, die in eine Stoffschicht mit homogener Wärmeleitfähigkeit untergebracht sind. Jeder Faden erzeugt Q Kcal/hm Wärme je Längeneinheit (Abb. 1).

Wir können ebenfalls wie LÜCK annehmen, daß in der Isolationsschicht mit der Dicke b' und der Wärmeleitfähigkeit λ' die Wärme nur in Richtung

* Der Verfasser dankt an dieser Stelle Herrn ÁRPÁD MACSKÁSSY, Leiter des Lehrstuhls für Bauinstallation an der Technischen Universität, Budapest, für die verständnisvollen und freundschaftlichen Ratschläge, mit denen er ihm den Überblick über das betreffende Fachschrifttum erleichterte.

y strömt. So braucht bei $y = b$ anstatt der Isolationsschicht ein Wärmeübergang mit der Übergangszahl

$$\varkappa = \frac{1}{\frac{b'}{\lambda'} + \frac{1}{a}}$$

berücksichtigt werden.

Die waagerechte Ausdehnung (in Richtung x) der Heizfläche sei unendlich groß.

Wir werden — im Gegensatz zum Verfahren von NUßELT bzw. LÜCK — nicht mit einer isolierten Wärmequelle, sondern mit dem Potential einer unendlich langen Wärmequellenreihe rechnen.

Das Potential der auf Achse x befindlichen Wärmequellenreihe mit der Teilung t ist:

$$\vartheta_0 = -\frac{Q}{4\pi\lambda} \ln\left(\sin^2 \frac{\pi}{t} x + sh^2 \frac{\pi}{t} y\right).$$

Das erfüllt die Bedingung, daß an den Stellen

$$x = \frac{t}{2} \pm nt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \frac{\partial \vartheta_0}{\partial x} = 0$$

ist.

Um die Randbedingungen an den Stellen $y = -c$ und $y = +b$ zu befriedigen, müssen wir die Potentiale

$$\vartheta_1 = \frac{Q}{2\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos \frac{2\pi}{t} n x \cdot e^{-\frac{2\pi}{t} n (y+c)}$$

und

$$\vartheta_2 = \frac{Q}{2\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos \frac{2\pi}{t} n x \cdot e^{\frac{2\pi}{t} n (y-b)}$$

annehmen. ϑ_1 ist das Potential der in $y = -c$, ϑ_2 jenes der in $y = +b$ befindliche Wärmequellenreihe. Beide bestehen nur aus cos enthaltenden Gliedern. Auch diese Potentiale befriedigen die Bedingung, daß bei

$$x = \frac{t}{2} \pm nt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = 0$$

sind.

Da voraussichtlich nicht die gleiche Wärmemenge gegen die beiden Oberflächen der Decke strömt, ist den Vorangehenden noch ein zur y-Achse paralleles Wärmeströmungspotential hinzuzufügen.

Dieses sei

$$\vartheta_3 = k \frac{Q}{2t\lambda}(b - y),$$

worin $-1 \leqq k \leqq +1$ vorläufig noch unbekannt ist. Wenn $b > c$ und $\varkappa < \alpha$, ist $k < 0$.

Das Potential $\vartheta' = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$ erfüllt somit die Bedingung, daß bei

$$\varkappa = \frac{t}{2} \pm nt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \frac{\partial \vartheta'}{\partial \varkappa} = 0$$

ist.

Dieses Potential wird noch mit einer Konstante C ergänzt. Die Werte von C und k sind von den Randbedingungen zu bestimmen.

Somit ist das vollständige Potential:

$$\vartheta = \vartheta' + C = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + C.$$

Vorausgesetzt, daß an beiden Oberflächen der Decke die Temperatur der Umgebung einander gleich ist, muß das vollständige Potential an den Stellen $y = -c$ und $y = +b$ folgende Randbedingungen erfüllen:

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n}\right)_{y=-c} = \alpha\, \vartheta_{y=-c}$$

und

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n}\right)_{y=+b} = \varkappa\, \vartheta_{y=+b}$$

(Hierin ist n die in das Innere des Bereiches zeigende Normale, und ϑ bedeutet physikalisch die Übertemperatur gegenüber der Umgebung.)

Das heißt: in $y = -c$ ist

$$\frac{Q}{2t} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{t}c \cdot \operatorname{ch}\frac{\pi}{t}c}{\sin^2\frac{\pi}{t}x + \operatorname{sh}^2\frac{\pi}{t}c} - \frac{Q}{t}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{t}nx +$$

$$+ \frac{Q}{t}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{2\pi}{t}nx \cdot e^{-\frac{2\pi}{t}n(b+c)} - k\frac{Q}{2t} =$$

1*

$$= a\left[-\frac{Q}{4\pi\lambda}\ln\left(\sin^2\frac{\pi}{t}x+\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{t}c\right)+\frac{Q}{2\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\cos\frac{2\pi}{t}nx+\right.$$

$$\left.+\frac{Q}{2\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\cos\frac{2\pi}{t}nx\cdot e^{-\frac{2\pi}{t}n(b+c)}+k\frac{Q}{2t\lambda}(b+c)+C\right]. \qquad (A)$$

In $y = +b$ ist

$$\frac{Q}{2t}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{t}b\cdot\operatorname{ch}\frac{\pi}{t}b}{\sin^2\frac{\pi}{t}x+\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{t}b}+\frac{Q}{t}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi}{t}nx\cdot e^{-\frac{2\pi}{t}n(b+c)}-$$

$$-\frac{Q}{t}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\frac{2\pi}{t}nx+k\frac{Q}{2t}=$$

$$=\varkappa\left[-\frac{Q}{4\pi\lambda}\ln\left(\sin^2\frac{\pi}{t}x+\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{t}b\right)+\frac{Q}{2\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\cos\frac{2\pi}{t}nx\cdot e^{-\frac{2\pi}{t}n(b+c)}+\right.$$

$$\left.+\frac{Q}{2\pi\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{t}\cos\frac{2\pi}{t}nx+C\right]. \qquad (B)$$

Zur Bestimmung der noch unbekannten Konstanten k und C sind außer den letzten Beziehungen noch die folgenden zu erfüllen:

$$\lambda\int_0^t\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)_{y=-c}dx = a\int_0^t\vartheta'_{y=-c}dx$$

und

$$\lambda\int_0^t\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)_{y=b}dx = \varkappa\int_0^t\vartheta_{y=b}dx\,,$$

deren Entwicklung zu folgenden Gleichungen führt:*

$$\frac{Q}{2}(1-k) = a\left[-t\frac{Q}{2\pi\lambda}\left(\frac{\pi}{t}c-\ln 2\right)+k\frac{Q}{2\lambda}(b+c)+C\right]$$

* Bei der Berechnung von $\int_0^t\vartheta_0\,dx$ ist der Wert von $\int_0^\pi\ln(1+a\cdot\sin^2u)\,du$ zu bestimmen. Derselbe ist laut [3] bei $a\geqq-1$

$$2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}.$$

und

$$\frac{Q}{2}(1+k) = \varkappa\left[-t\,\frac{Q}{2\pi\lambda}\left(\frac{\pi}{t}\,b - \ln 2\right) + C\right].$$

Aus diesen sind

$$k = \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{\varkappa} - \dfrac{b-c}{\lambda}}{\dfrac{b+c}{\lambda} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\varkappa}},$$

und

$$C = \frac{Q}{2t}\left[\frac{1}{\varkappa}\left(1 + \frac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{\varkappa} - \dfrac{b-c}{\lambda}}{\dfrac{b+c}{\lambda} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{\varkappa}}\right) + \frac{t}{\pi\lambda}\left(\frac{\pi}{t}\,b - \ln 2\right)\right]$$

zu bestimmen.

Es wurde schon erwähnt, daß in der Praxis aus der Decke einer Strahlungsheizung mehr Wärme abwärts als aufwärts strömt, und so ist $k < 0$. Abwärts strömt der $\frac{1-k}{2}$-te Teil, aufwärts der $\frac{1+k}{2}$-te Teil der gesamten Wärme. Die abwärts strömende Wärme je Flächeneinheit

$$\frac{Q}{2t}(1-k)$$

dividiert mit a ergibt die Durchschnittstemperatur an der unteren Fläche der Decke:

$$\bar{\vartheta}_{y=-c} = \frac{Q}{2ta}(1-k).$$

Wenn wir die Beziehungen (A) und (B) mit einigen geeigneten x-Werten der Strecke $0 \leqq x \leqq \frac{t}{2}$ — mit der Anzahl p — aufschreiben, und die zuvor bestimmten Werte von k und C einsetzen, erhalten wir ein von Q unabhängiges lineares Gleichungssystem von $2p$ Gleichungen mit $2p$ Unbekannten. Dasselbe bestimmt die Werte von a_n und b_n $n = 1, 2, \ldots p$, mit denen wir die Temperaturverteilung in $y = -c$ aus dem in Gleichung (A) auf der rechten Seite stehenden Klammerausdruck berechnen können.

In praktischen Fällen kann man folgende Näherungen verwenden:

Die Kennwerte der Decke bestimmen k und C. Man setzt dieselben in die auf die Stelle $x = 0$ bezogene Gleichungen (A) und (B) $(p = 1)$. Die Werte von a_1 und b_1 können aus diesen bestimmt werden.

Um eine bessere Näherung zu erhalten, setzt man $p = 3$, aber man schreibt nur Gleichung (A) bezogen auf drei zweckmäßig angenommene Werte von x auf. Für den Wert von b_1 wird der in der ersten Näherung erhaltene Wert beibehalten, und man nimmt an, daß die Beiwerte $b_2 = b_3 = 0$ sind.

Somit kann man den endgültigen Wert von a_1, ferner die Werte von a_2 und a_3 aus den drei Gleichungen bestimmen.

Die drei x-Werte, mit denen die Gleichung (A) aufgeschrieben wird, sind — um das Rechnen zu vereinfachen — die folgenden:

$$x = \frac{t}{4}; \quad x = \frac{t}{12}; \text{ und } x = 0 .$$

In der Gleichung für $x = \frac{t}{4}$ ist nur a_2 vorhanden und so kann man dessen Wert leicht bestimmen. Da in der Gleichung für $x = \frac{t}{12}$ a_1 und a_2 vorkommen, berechnet man aus dieser a_1. Schließlich wird a_3 aus der Gleichung für $x = 0$ berechnet.

Den obigen gemäß kann die Übertemperatur an der Oberfläche der Heizdecke mit der Beziehung

$$\vartheta_{y=-c} = -\frac{Q}{4\pi\lambda} \ln \left(\sin^2 \frac{\pi}{t} x + \mathrm{sh}^2 \frac{\pi}{t} c\right) +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi\lambda}\left[a_1 + b_1 e^{-\frac{2\pi}{t}(b+c)}\right] \cos\frac{2\pi}{t} x + \frac{Q}{4\pi\lambda} a_2 \cos\frac{4\pi}{t} x +$$

$$+ \frac{Q}{6\pi\lambda} a_3 \cos\frac{6\pi}{t} x + k \frac{Q}{2t\lambda}(b+c) + C$$

bestimmt werden.

Zusammenfassung

Die in Betondecken von Strahlungsheizungen eingebettete Rohrreihe wird durch eine unendliche Reihe von Wärmequellen ersetzt. Mit der Anwendung der Potentialtheorie werden die Randbedingungen erfüllenden Beziehungen entwickelt, mit denen man die Temperaturverteilung an der unteren Fläche leicht bestimmen kann.

Literatur

1. NUßELT, W.: Die Temperaturverteilung in der Decke einer Strahlungsheizung. Gesundheits-Ingenieur 4, 68 (1955).
2. LÜCK, G.: Die Strahlungsheizung als Wärmequellenproblem. Allg. Wärmetechnik **10**, 2 (1951).
3. GRÖBNER, W.—HOFREITER, N.: Integraltafel Teil II, S. 70. Springer, Wien 1949.

Prof. Dr. J. GRUBER, Budapest XI. Bertalan Lajos u. 4—6.