DIE KONSTRUKTION VON SCHAUFELSTERNEN MIT RÜCKWÄRTS GEKRÜMMTER BESCHAUFELUNG

Von

J. Gruber

Lehrstuhl für Strömungslehre an der Technischen Universität, Budapest

Eingegangen am 22. Dezember 1956

Die theoretische Behandlung der Strömung im Schaufelstern ist von höchster Wichtigkeit bei der Konstruktion von strömungstechnischen Maschinen.

Den Konstruktionsingenieur interessiert hauptsächlich die Frage, wie die Beschaufelung des Laufrades gestaltet sein soll, damit sie die gestellten Bedingungen befriedigt. Das ist eine ziemlich verwickelte Aufgabe, wenn man von der alten Auffassung abgeht und auf die eingehende Kenntnis der Strömung Wert legt.

Es ist bekannt, daß die Strömung in den Laufrädern der Ventilatoren, der Turbinen usw. räumlichen Charakter besitzt.

Wir können — mit gewissen Vernachlässigungen — annehmen, daß in der mit Rotationsflächen begrenzten Beschaufelung das Fördermittel schichtenweise zwischen Rotationsflächen strömt.

Es besteht die Möglichkeit diese Rotationsflächen auf ebene Flächen konform abzubilden — durch entsprechende Abbildungsfunktion — z. B. so, daß die Meridianen der Rotationsfläche in Strahlen übergehen, die über einen bestimmten Punkt der Ebene laufen, während die Parallelkreise in um den bestimmten Punkt laufende Kreise mit entsprechendem Halbmesser über gehen.

Dementsprechend gehen die Schnitte der Rotationsflächen mit den Schaufeln in einen Schaufelstern der Ebene über. Die ursprüngliche Raumströmung ist von Schichte zu Schichte als Strömung in einem Schaufelstern zu behandeln.

Mit inkompressibelem Medium und bei unveränderlicher Dicke der Schichten ist das Strömungsbild um den Schaufelstern als quellenfreie und ebene Strömung zu betrachten.

Insofern die Schichtendicke veränderlich ist, sind laut Betz [1] die Ergebnisse der ebenen Strömung leicht zu korrigieren.

Auf diese Weise ist die Untersuchung der Strömung um den Schaufelstern der Ausgangspunkt und deshalb befassen wir uns nachstehend mit dieser Frage.

Die theoretische Behandlung der Strömung um einen Schaufelstern ist insofern möglich, indem man den Schaufelstern konform auf einen Kreis abbildet [2, 3]. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, daß infolge der Abbildungsfunktion eine beträchtliche Längenverzerrung entsteht, die rechnungstechnische Schwierigkeiten bereitet.

Ferner besteht die Möglichkeit, die Schaufelsternströmung mit dem sogenannten Singularitäts-Verfahren zu behandeln [1, 4]. Dieses Verfahren ist zu Konstruktionszwecken geeigneter, doch ist der Aufwand an Rechnungsarbeit sehr bedeutend.

Zur Erleichterung der Arbeit des Konstrukteurs schien es zweckmäßig, ein solches Näherungsverfahren zu schaffen, wodurch sich das Rechnen auf einige Stunden beschränkt.

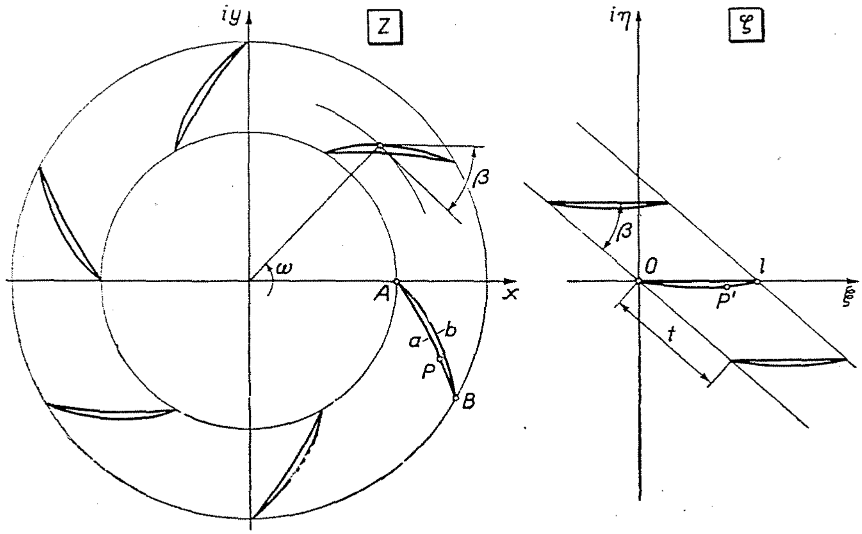

Abb. 1

Das im weiteren mitgeteilte Näherungsverfahren dient als Anhaltspunkt zur Konstruktion des Schaufelsterns eines Laufrades mit rückwärts gekrümmter Beschaufelung.

Wir betrachten das Medium für unzusammendrückbar und reibungslos, ferner die absolute Strömung wirbelfrei. Das Verfahren beruht auf der Methode der Singularitäten. Aus rechnungstechnischen Gründen wird der Schaufelstern auf ein gerades Schaufelgitter abgebildet, und die Singularitäten werden auf der Ebene des Schaufelgitters angewandt.

Zur Vereinfachung wird nur die Bestimmung der Schaufel-Skelettlinie angegeben, doch kann diese Methode auch zur Konstruktion profilierter Beschaufelung angewandt werden.

Nach den Bezeichnungen der Abb. 1 ist die Linie a die vorausgesetzte Schaufellinie bzw. deren Skelettlinie, Linie b über den Punkten A und B laufende logarithmische Spirale mit β Steigung.

Es ist bekannt, daß wenn n die Zahl der Schaufeln bedeutet, die Funktion

$$\zeta = \frac{nt}{2\pi}(\sin\beta + i\cos\beta)\, lnz$$

die logarithmische Spirale mit der Steigung β der z Ebene auf eine Gerade der ζ Ebene abbildet. Die Vorausgesetzten Skelettlinien sind auch nach der Abbildung gekrümmte Linien.

Das in der z Ebene befindliche quellen- und wirbelfreie absolute Strömungsbild bleibt auch in der ζ Ebene quellen- und wirbelfrei.

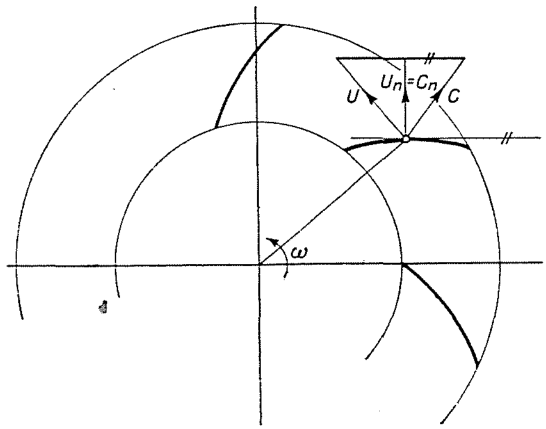

Abb. 2

Da die Flüssigkeit die Beschaufelung nicht durchdringen kann, ist die Normalkomponente der Absolutgeschwindigkeit an der Schaufeloberfläche gleich mit der Normalkomponente der Umfangsgeschwindigkeit. Mit anderen Worten:

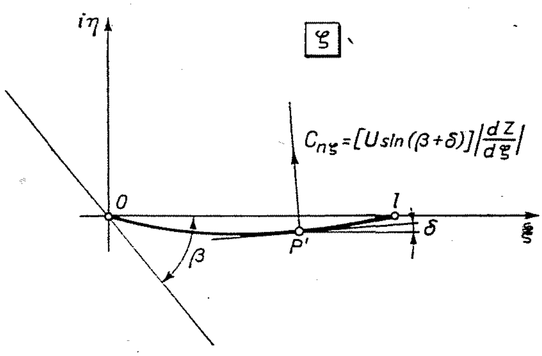

Abb. 3

die Richtung der relativen Geschwindigkeit ist tangential zur Schaufeloberfläche.

Dasselbe ist auch für die Schaufelsternströmung (Abb. 2) gültig.

Somit ist die Normalkomponente der absoluten Strömung um einen Schaufelstern, mit bekannter Gestalt und Umdrehungszahl, an der Schaufeloberfläche bekannt.

Wir setzen voraus, daß die gekrümmte Linie der z Ebene die Gestalt der von uns zu bestimmenden Schaufel besitzt.

Eine Schaufel der ζ Ebene zeigt Abb. 3.

Dem Vorangehendem gemäß ist die Normalkomponente der Absolutgeschwindigkeit im Punkt P' — der dem Punkt P der z Ebene entspricht —,

$$c_{n\zeta} = [u \sin (\beta + \delta)] \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| ,$$

worin $u = r\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit des Punktes P und

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{2\pi r}{nt}$$

ist.

Die Absolutgeschwindigkeit in der ζ Ebene besteht aus folgenden Teilgeschwindigkeiten:

1. Die mit dem Durchfluß proportionale, zum Gitter senkrechte Geschwindigkeit: $\frac{Q}{nt}$, deren zur η Achse parallele Komponente im Falle einer Pumpe positiv gerichtet ist. Sie ist in der ganzen ζ Ebene beständig. (Q ist die Durchflußmenge pro Breiteneinheit des Gitters.)

2. Die vom gegebenenfalls vorhandenen Vordrall Γ_v herrührende, zum Gitter parallele, ebenfalls konstante Geschwindigkeit: $\frac{\Gamma_v}{nt}$. Ihre zur ξ Achse parallele Komponente ist negativ, wenn sich der Vordrall gegen den Uhrzeiger dreht.

3. Die von den auf den Schaufellinien verteilten Wirbeln induzierte Geschwindigkeit: $v_{i\xi} + i v_{i\eta}$.

4. Die aus der Schaufelzirkulation einer Schaufel berechenbare, zum Gitter parallel gerichtete Geschwindigkeit: $\frac{\Gamma_s}{2t}$. Sie kompensiert die von den auf den Schaufellinien verteilten Wirbeln induzierte Geschwindigkeit in dem vom Gitter links liegenden Bereich der Ebene (fern vom Gitter). Die zur ξ Achse parallele Komponente der kompensierenden Geschwindigkeit ist negativ, wenn sich die Schaufelzirkulation gegen den Uhrzeiger dreht.

Die vektorielle Summe der angegebenen Geschwindigkeiten ist auf die Normale der Schaufellinie zu projizieren.

Zu dem Entwurf eines Schaufelsternes wählt man das Verhältnis r_2/r_1, die Schaufelzahl n und eine geeignete Funktion für die Schaufelzirkulationsverteilung. Es ist zweckmäßig, die Verteilung als Funktion der ξ Achse zu bestimmen, da sich die Berechnung auf die ζ Ebene bezieht.

Ist die Zirkulationsverteilung als Funktion des Radius r aufgenommen, so ist dieselbe mit der Gleichung

$$\frac{\xi}{l} = \frac{\ln r}{\ln r_2}$$

leicht in die Funktion von ξ zu verwandeln.

Aus den Werten von r_2 und r_1, ferner Q und ω (unter Umständen Γ_ν) wird in üblicher Weise die relative Stromlinie der z Ebene bestimmt, unendlich dichtes Schaufelgitter vorausgesetzt.

Man bestimmt den Steigungswinkel β der über die Punkte A und B der relativen Stromlinie laufenden logarithmischen Spirale und setzt in die früher angegebene Abbildungsfunktion einen frei angenommenen Wert für t ein, so ist der Zusammenhang zwischen den Ebenen z und ζ eindeutig.

Die über den Punkten A und B der z Ebene laufende logarithmische Spirale mit der Steigung β geht in die Strecke $0—l$ der ξ Achse über, wo

$$l = \frac{nt}{2\pi} \frac{\ln r_2}{\sin\beta}$$

ist.

Vorausgesetzt, daß das Bild der gesuchten (der angenommenen Zirkulationsverteilung entsprechenden) Schaufellinie in der ζ Ebene nur wenig von der ξ Achse abweicht, so kann die Schaufelzirkulation annäherungsweise auf die $0—l$ Strecke dieser Achse und auf die mit ihr im parallelen Gitter stehenden Strecken verteilt werden. Diese Annäherung vereinfacht in großem Maße die Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten.

Während der weiteren Berechnung ist es zweckmäßig, mit den ξ und η Komponenten der Geschwindigkeiten zu arbeiten. So ist es leicht verständlich, daß

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\delta = \frac{\frac{Q}{nt}\cos\beta + \frac{\Gamma_v}{nt}\sin\beta + v_{i\eta} + \frac{\Gamma_s}{2t}\sin\beta - u_\zeta\sin\beta}{\frac{Q}{nt}\sin\beta - \frac{\Gamma_v}{nt}\cos\beta + v_{i\xi} - \frac{\Gamma_s}{2t}\cos\beta + u_\zeta\cos\beta},$$

worin

$$u_\zeta = u\frac{2\pi r}{nt}$$

ist.

Man bestimmt die Werte von $\operatorname{tg}\delta$ in einigen (entsprechend verteilten) Punkten der $0—l$ Strecke der ξ Achse.

In dem Ausdruck für $\operatorname{tg}\delta$ verändern sich nur die Werte von $v_{i\eta}$, $v_{i\xi}$ und u_ζ. Zur Bestimmung von u_ζ rechnet man mit der u Geschwindigkeit des in der z Ebene liegenden Bildes von dem an der ξ Achse aufgenommenen Punkte.

Die Werte von $v_{i\xi}$ und $v_{i\eta}$ werden in folgender Weise bestimmt: man zerlegt das gerade Schaufelgitter in eine alleinstehende Schaufel, die auf der $0-l$ Strecke der ξ Achse liegt, und in ein unvollständiges Schaufelgitter das aus den übrigen Schaufeln besteht.

Die von der Zirkulationsverteilung der Strecke $0-l$, an der alleinstehenden Schaufel induzierten $v'_{i\eta}$ Werte bestimmt man in üblicher Weise. Diese addiert man mit den $v''_{i\eta}$ Werten, die die an den Schaufeln des unvollständigen Gitters untergebrachten Singularitäten an der $0-l$ Strecke induzieren.

Da zur ξ Achse parallele Geschwindigkeit nur das unvollständige Gitter nduziert ($v'_{i\xi} = 0$),

$$v_{i\xi} = v''_{i\xi} \quad \text{und} \quad v_{i\eta} = v'_{i\eta} + v''_{i\eta} \, .$$

Die Werte von $v''_{i\xi}$ und $v''_{i\eta}$ können mit Hilfe der Diagramme von Betz [5] bestimmt werden.

Die gesuchte Schaufellinie erhält man mit der graphischen Lösung von

$$(\eta)_{\xi_i} = \int_0^{\xi_i} (\operatorname{tg} \delta)_\xi \, d\, \xi \, .$$

Die erhaltene Linie weicht von der ξ Achse ab, bei $\xi = l$ ist der Wert von $\eta_l \neq 0$. Man wiederholt die Rechnung, indem der zuerst verwendete Winkel β mit einem Betrag von arc tg $\frac{\eta_l}{l}$ gesteigert wird. Nach der ersten Wiederholung fällt das Ende der Schaufel praktisch auf die ξ Achse.

Die Berechnung wird weiter verfeinert, wenn man an Hand der zweiten Schaufellinie den Betrag von tg δ korrigiert. Diese Korrektion besteht darin, daß man zur dritten Bestimmung von tg δ nicht den zu ξ gehörenden u_ζ Wert, sondern den zu Punkt ξ' gehörenden in den Ausdruck für tg δ einsetzt. Abb. 4 zeigt wie ξ' und ξ einander zugeordnet sind.

Diese Korrektion ist nötig, weil die Schaufellinie von der ξ Achse abweicht. Der Schaufelpunkt mit der Abszisse ξ bestimmt für u_ζ einen anderen Wert als der auf der Achse liegende (ξ, 0) Punkt; hingegen sind die mit dem Schaufelpunkt bei ξ und mit dem Achsenpunkt (ξ' 0) bestimmten u_ζ Werte einander gleich.

Die mit dem korrigierten tg δ Wert bestimmte neue Schaufellinie endet wieder weiter von der ξ Achse entfernt. Deswegen sollte man den zweiten und dritten Rechnungsgang wiederholen, doch nach gewisser Übung kann man im zweiten Gang β so korrigieren, daß im dritten Gang die Schaufellinie in der ξ Achse endet.

Die Berechnung kann nach Bedarf noch weiter verfeinert werden, indem man die Singularitäten nicht auf die Sehne der Schaufellinie, sondern auf die Schaufellinie selbst setzt. Es lohnt sich, nur die Werte von $v''_{i\xi}$ und $v''_{i\eta}$ von neuem zu bestimmen, die Werte von $v'_{i\eta}$ ändern sich praktisch nicht. Diese langwierige Korrektion ist ausschließlich bei verhältnismäßig dichter Beschaufelung lohnend.

Nach der Bestimmung der Schaufellinie kann man auch ihr Bild in der z Ebene zeichnen. Ebensowenig bereitet es Schwierigkeiten, die Geschwindigkeitsverteilung an der Schaufel von der z Ebene zu bestimmen. Aus der Geschwindigkeitsverteilung kann man auf die Betriebsverhältnisse der Beschaufelung schließen (z. B. Abreißen der Strömung).

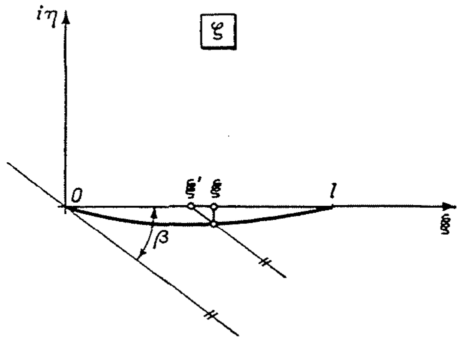

Abb. 4

Es ist zweckmäßig, die im beschriebenen Näherungsverfahren erfaßten Rechnungen in tabellarischer Form durchzuführen. So sind die ersten drei Rechnungsgänge — gewisse Praxis vorausgesetzt — in einigen Stunden durchführbar.

Zusammenfassung

Die Konstruktion eines aus rückwärtsgekrümmten Schaufeln bestehenden Schaufelsternes ist möglich, falls die Zirkulationsverteilung an den Schaufeln angegeben ist.

Es wird vom Singularitätsverfahren ausgehend eine sukzessive Annäherungsmethode angewandt. Der Rechenaufwand beträgt einige Stunden.

Schrifttum

1. Betz, A.—Flügge-Lotz, I.: Berechnung der Schaufeln von Kreiselrädern. Ingenieur Archiv **IX.** S. 486 (1938).
2. Schulz, W.: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Z. A. M. M. **VIII.** S. 10 (1928).
3. Buseman, A.: Das Förderhöhenverhältnis radialer Kreiselpumpen mit logarithmisch-spiraligen Schaufeln. Z. A. M. M. **VIII.** S. 372 (1928).
4. Isay, W. H.: Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter. Ingenieur Archiv **XXII.** S. 203 (1954).
5. Betz, A.: Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen. Ingenieur Archiv **II.** S. 359 (1932).

Prof. Dr. József Gruber, Budapest IV, Budafoki út 4—6