

ÜBER EINE SPEZIELLE EBENE QUADRATISCHE TRANSFORMATION

L. MITNYÁN

Lehrstuhl für Instrumentaltechnik der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 31. März 1957)

I

Die Verwandtschaft zweier ebener Systeme ist quadratisch, wenn die Beziehung zwischen ihren Punkten so gestaltet ist, daß jedem Punkt des einen Systems im allgemeinen ein Punkt im anderen entspricht, und zwar in der Weise, daß wenn ein Punkt in einem System eine Punktreihe erster Ordnung durchläuft, beschreibt der entsprechende Punkt in dem anderen System eine Punktreihe zweiter Ordnung.¹

1. Zwecks Erzeugung einer quadratischen Punktverwandtschaft wollen wir in den beiden ebenen Systemen Σ und Σ' zwei projektive Strahlenbüschel wählen :

$$|U| \bar{\wedge} |U_1|.$$

Weiterhin bestehe zwischen den ebenen Systemen Σ und Σ' eine reziproke Beziehung.²

Damit hat man jedem Punkt X des ebenen Systems Σ einen Punkt X' aus dem ebenen System Σ' zugeordnet, der auf folgende Weise erhalten wird :

Man verbinde Punkt X mit dem Träger des gegebenen Strahlenbüschels $|U|$, dem Strahl $x = |UX|$. Im Sinne der projektiven Verwandtschaft entspricht dem Strahl x im Strahlenbüschel $|U_1|$ der Strahl x' (Abb. 1). Auf diesem befindet sich Punkt X' , der dem frei gewählten Punkte X in der gegebenen Zuordnung entspricht. Zur weiteren Bestimmung des Punktes X' gibt es aber zwischen den ebenen Systemen Σ und Σ' eine reziproke Verwandtschaft. Infolgedessen wird Punkt X in der Ebene Σ' eine Polare x_1' haben, auf welcher der gesuchte Punkt X' ebenfalls vorhanden ist. Es ist also der Schnittpunkt $X' = (x', x_1')$ der Strahlen x' und x_1' , der dem in der Ebene Σ frei aufgenommenen Punkte X zugewiesen wird.

Wird umgekehrt vorgegangen, und der dem Punkt X' der Ebene Σ' in der gegebenen Verwandtschaft entsprechende Punkt gesucht, so ergibt analog der Schnittpunkt der Strahlen x und x_1 den entsprechenden Punkt $(x, x_1) = X$.

Es ergibt sich hiermit eine umkehrbar eindeutige Zuordnung.

Zu beweisen ist nun, daß diese Zuordnung tatsächlich eine quadratische ist, d. h. daß eine Gerade von allgemeiner Lage in dem einen ebenen System

einem Kegelschnitt im anderen entspricht. Ferner müssen, als deren wichtigste Bestimmungsdaten, die Hauptpunkte der Verwandtschaft gefunden werden, die zu den singulären Elementen der quadratischen Verwandtschaft gehören.

Man nehme zu diesem Zweck eine beliebige Gerade l der Ebene Σ und lasse sie den Punkt X entlanglaufen. Wie wird sich nun der entsprechende Punkt X' währenddessen fortbewegen? Während Punkt X die Gerade l entlangläuft, werden die die entsprechende Gerade erzeugenden Strahlen x' und x'_1 auf Grund der gegebenen Beziehung projektive Strahlenbüschel beschreiben. Die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen dieser Büschel ergeben die Punkte X' .

Da im Sinne der Voraussetzung

$$|U| \bar{\wedge} |U_1|$$

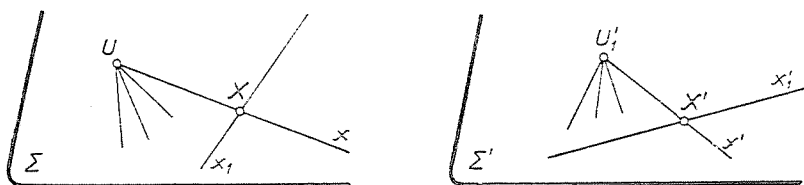


Abb. 1

ist; ferner infolge der reziproken Verwandtschaft das zu ihr projektive Büschel $| \mathcal{G}' |$ der Punktreihe (l) entspricht, aber weil

$$|U_1| \bar{\wedge} |U| \wedge (l) \bar{\wedge} | \mathcal{G}' |$$

ist, so ist

$$|U_1| \bar{\wedge} | \mathcal{G}' |.$$

Somit beschreibt Punkt X' einen Kegelschnitt l'^2 , der in dieser Beziehung das der Geraden l analoge Element genannt wird. Es besteht also wirklich eine quadratische Verwandtschaft.

Nun wähle man in der Ebene Σ noch eine beliebige Gerade m . Ähnlich wie im vorhergehenden Falle entspricht dieser in der Ebene Σ' ein Kegelschnitt m'^2 . Einer der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte l'^2 und m'^2 entspricht dem gemeinsamen Punkte $P = (l, m)$ der Geraden l und m . Die drei weiteren Schnittpunkte U'_1 , V'_1 und W'_1 sind besondere Punkte der Verwandtschaft, indem jedem von ihnen in der gegebenen Verwandtschaft zwei verschiedene Punkte auf den Geraden l und m entsprechen (Abb. 2). Da diese Verwandtschaft umkehrbar eindeutig ist, sind diese drei Punkte besondere Punkte der Verwandtschaft. Sie verdienen deshalb eine eingehende Prüfung.

U'_1 ist Träger des die Verwandtschaft liefernden Büschels im ebenen System Σ' , darum gehen die den Geraden l und m entsprechenden Kegelschnitte l'^2 und m'^2 als Gebilde von projektiven Strahlenbüscheln durch ihn hindurch. Es werde jetzt der Punkt gesucht, der im ebenen System Σ dem Punkt U'_1 entspricht. Da U'_1 ein Punkt des Kegelschnitts l'^2 ist, liegt der ihm entsprechende Punkt infolge der eineindeutigen Zuordnung auf der Geraden l ; U_1 ist aber auch ein Punkt des Kegelschnitts m'^2 , folglich ist sein entsprechender Punkt auch auf der Geraden m zu finden. Doch kann $P = (l, m)$ dem Punkte U'_1 nicht entsprechen; diesem Punkte U'_1 müssen deshalb auf den Geraden l und m zwei verschiedene Punkte entsprechen. Somit ist U'_1 ein

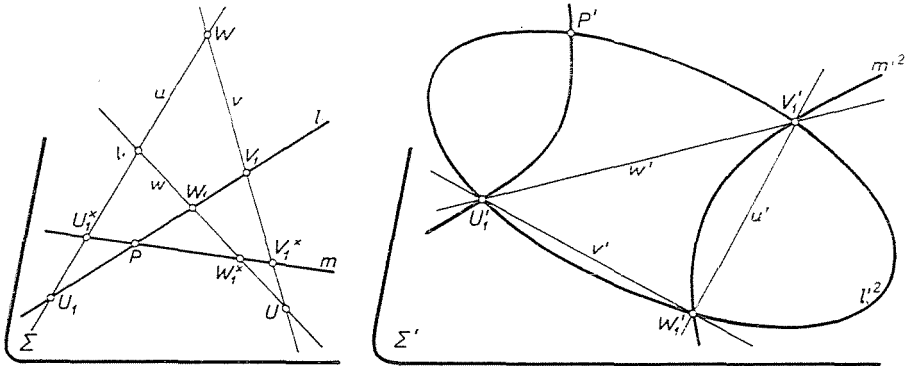


Abb. 2

besonderer Punkt dieser Verwandtschaft, weil ihm nicht ein Punkt, sondern eine ganze Punktreihe entspricht. Die dem Punkte U'_1 entsprechenden Strahlen fallen nämlich in dieser Zuordnung zusammen.

Untersuchen wir weiter die gemeinsamen Punkte von l'^2 und m'^2 . Gesucht werden ihre entsprechenden Punkte in der gegebenen Verwandtschaft.

Da V'_1 ein gemeinsamer Punkt von l'^2 und m'^2 ist, muß sich der im ebenen System Σ zugeordnete Punkt auf der Geraden l und m befinden. Der gemeinsame Punkt der Geraden l und m , der Punkt $P = (l, m)$ kann aber infolge der Eindeutigkeit der Verwandtschaft — auch wegen der Projektivität der Punkt-reihen (einer Punktreihe erster Ordnung entspricht eine Punktreihe 2. Ordnung, die beide untereinander projektiv sind) — nicht dem Punkt V'_1 entsprechen. Dem Punkt V'_1 entspricht deshalb in der Punktreihe l ein Punkt V_1 und in der Punktreihe m ein Punkt V_1^x . Die in dieser Verwandtschaft den entsprechenden Punkt von V'_1 erzeugenden Strahlen sind also gemeinsam bzw. zusammenfallend. Das bedeutet, daß dem Punkt V'_1 nicht nur die beiden Punkte V_1 und V_1^x entsprechen, sondern auch alle Punkte des erwähnten gemeinsamen Strahles in der gegebenen Verwandtschaft. So ist auch V'_1 ein singulärer Punkt des ebenen Systems Σ' .

Ähnlicherweise kann auch dafür der Nachweis erbracht werden, daß in der gegebenen Verwandtschaft auch dem Punkt W_1 sämtliche Punkte einer Punktreihe erster Ordnung entsprechen.

Auf Grund dieser Feststellungen, die übrigens mit den bekannten Tatsachen übereinstimmen, kann gesagt werden, daß jedes von zwei so einander zugeordneten ebenen Systemen drei Punkte enthält, denen im anderen System die Geraden entsprechen. Diese Punkte bzw. Geraden heißen *Hauptpunkte* bzw. *Hauptgerade* des ebenen Systems. Die Hauptgeraden sind durch die Hauptpunkte schon definiert, da sie doch die Verbindungslinien der Hauptpunkte sind. Die Hauptpunkte des ebenen Systems Σ sind U, V und W ; die von Σ' sind U_1, V_1 und W_1 ; die entsprechenden Hauptgeraden sind: $|V_1 W_1|, |W_1 U_1|$ und $|U_1 V_1|$ bzw. $|VW|, |WU|$ und $|UV|$. Von diesen Hauptpunkten sind U und U_1, V und V_1 sowie W und W_1 homologe Hauptpunkte.

Nach alledem kann gesagt werden, daß jedem homologen Hauptpunktepaar des einen ebenen Systems die durch die entsprechenden homologen Hauptpunkte im anderen System durchgehende Gerade zugeordnet worden ist. Damit ist die angenommene ebene quadratische Verwandtschaft auf die Erzeugung der schon bekannten SEYDEWITZschen quadratischen Verwandtschaft in der Ebene zurückgeführt.³ Bei dieser Erzeugung der Verwandtschaft ist das *Hauptdreieck* — das System der Hauptpunkte und der Hauptgeraden — immer reell. In diesem Falle aber kann man die unsererseits zur *Erzeugung* der ebenen quadratischen Verwandtschaft gesetzten Angaben immer durch drei Paar projektive Strahlenbüschel und ein selbstentsprechendes Punktepaar von X und X' ersetzen. Die Projektivität ist in diesem Falle

$$U(V, W, X) \bar{\wedge} U_1(V_1 W_1 X').$$

II

1. In den vereinigten ebenen Systemen Σ und Σ' seien die Gerade s und drei Punkte U, U' und V gegeben. Zwischen den beiden ebenen Systemen ist eine quadratische Verwandtschaft zu begründen.⁴

Zu diesem Zwecke greife man aus dem ebenen System Σ einen beliebigen Punkt X heraus. Diesem Punkte werde im ebenen System Σ' der Punkt entsprechend zugeordnet, in dem die Verbindungslinie der Punkte U' und $(s, |UX|)$ die Gerade $|VX|$ schneidet. Das solcherart gewonnene Punktepaar X, X' wird ein konjugiertes Punktepaar der gesuchten quadratischen Verwandtschaft sein (Abb. 3).

Die auf diese Weise bestimmte Verwandtschaft wollen wir nun daraufhin untersuchen, ob sie wirklich quadratisch ist und wenn sie es ist, wo sich ihre Hauptpunkte befinden.

Um diese Frage richtig zu prüfen, lasse man den im ebenen System Σ frei aufgenommenen Punkt X eine beliebige Gerade l entlanglaufen. Gesucht werde die entsprechende Figur dieser Punktreihe erster Ordnung im ebenen System Σ' .

Die entsprechenden Elemente der Punkte der geraden Punktreihe (X) liefern im ebenen System Σ' zwei projektive Büschel

$$|V| \bar{\wedge} |U'|,$$

da

$$|V| \bar{\wedge} (l) \wedge |U| \wedge (s) \wedge |U'|.$$

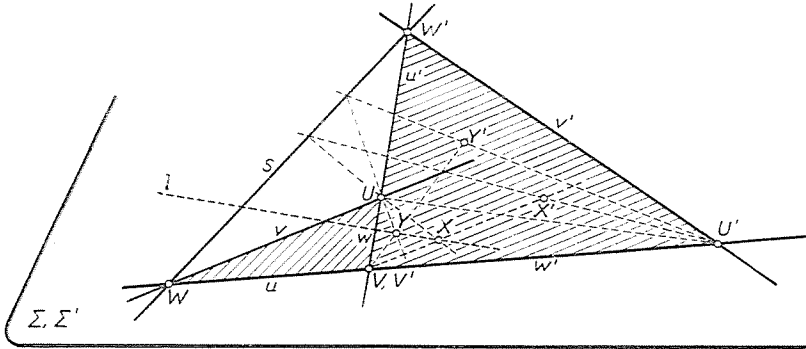


Abb. 3

Der beliebigen Gerade l — als Punktreihe erster Ordnung — im ebenen System Σ entspricht im ebenen System Σ' ihr $|V| \wedge |U'|$ Gebilde, nämlich der Kegelschnitt l^2 ; eine Punktreihe zweiter Ordnung. Demnach ist die gegebene Verwandtschaft zwischen den ebenen Systemen Σ und Σ' wirklich eine quadratische. Wir wollen jetzt die singulären Punkte dieser Verwandtschaft feststellen.

Auf Grund des Vorhergesagten sind je zwei Hauptpunkte schon bekannt. Die beiden Hauptpunkte des ebenen Systems Σ sind nämlich U und V ; die entsprechenden Hauptpunkte im System Σ' sind U' und $V \equiv V'$. Wo ist nun das dritte Hauptpunktpaar?

Wählen wir als beliebigen Punkt des ebenen Systems Σ den Punkt $W = (s, |U'V|)$. Festzustellen ist, was dem im ebenen System Σ' entspricht. Die Konstruktion wird jetzt nicht mehr einen Punkt, sondern alle Punkte einer geraden Punktreihe (w') ergeben. So erhalten wir den dritten Hauptpunkt W des ebenen Systems Σ . Auf ähnliche Art gewinnt man im ebenen System Σ' den dritten zugeordneten Hauptpunkt $W' = (s, |UV|)$.

Die Hauptdreiecke der beiden ebenen Systeme sind also

$$\text{im ebenen System } \Sigma : UVW \triangle$$

$$\text{im ebenen System } \Sigma' : U'V'W' \triangle$$

In dieser Verwandtschaft entspricht jeder Punkt der Geraden s sich selbst.

2. Zur analytischen Untersuchung der Verwandtschaft dieser beiden ebenen Systeme vereinigt man die gemeinsame Ebene der beiden ebenen Systeme mit der Ebene des Koordinatensystems. Die die quadratische Verwandtschaft in der Ebene bestimmenden Werte sind dann die folgenden :

$$\begin{aligned} U & (a,0) \\ V & (1,1) \\ U' & (a',0) \\ P & (x,y) \\ P' & (x',y') \\ Y_P & (0,y_0) \\ & x = 0, \end{aligned}$$

und $s \dots$

wo P und P' ein beliebiges Punktpaar in der gegebenen Verwandtschaft darstellen (Abb. 4). Es ist zu beweisen, daß diese Verwandtschaft tatsächlich eine quadratische ist, und wenn sie es ist, welche die singulären Elemente, d. h. die Hauptpunkte sind.

Berechnen wir nach der bekannten Methode den dem frei gewählten Punkt $P(x,y)$ in der quadratischen Verwandtschaft entsprechenden Punkt $P'(x',y')$.

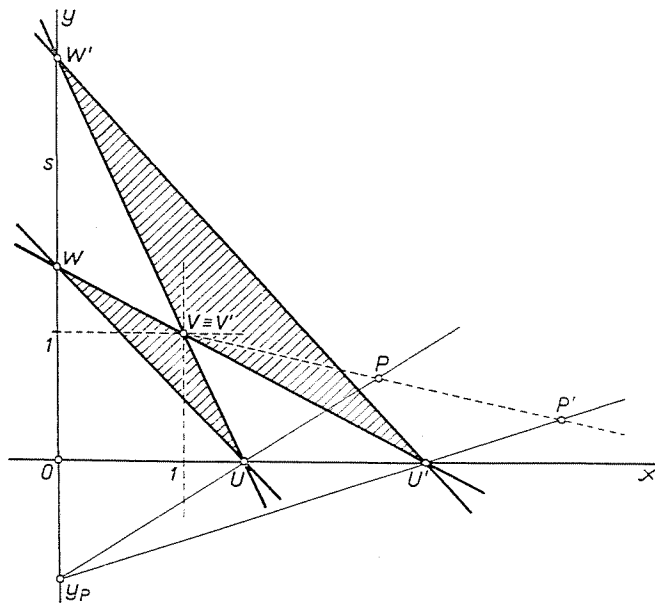


Abb. 4

Es ist $(| PU | s) = Y_P$
 $(| Y_P U' || VP |) = P'$

Die Gleichungen der Geraden $| PU |$, $| VP |$ und $| Y_P U' |$ sind

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad ay_0 - xy_0 - ay = 0$$

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ a' & 0 & 1 \\ 0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad a'y_0 - x'y_0 - a'y' = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1 - x')y + xy' + x' - x - y' = 0.$$

Löst man diese Gleichungen nach Eliminierung von y und y_0 auf, so erhält man

$$x = \frac{ax'^2 + (aa' - a)x'y' - aa'x'}{(a' - a)x'y' + ax' + (aa' - a'y' - aa')} \tag{1}$$

Wird der Wert von x in die erste der obigen Gleichungen eingesetzt und danach die Gleichung auf y gelöst, ergibt sich

$$y = \frac{a'x'y' + (aa' - a')y'^2 - aa'y'}{(a' - a)x'y' + ax' + (aa' - a'y' - aa')} \tag{2}$$

Werden diese Gleichungen umgekehrt auf x' und y' gelöst, so erhält man die Koordinaten des Punktes P'

$$x' = \frac{ax^2 + (aa' - a')xy - aa'x}{(a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa'} \tag{3}$$

$$y' = \frac{axy + (aa' - a)y^2 - aa'y}{(a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa'} \tag{4}$$

Gesucht werden jetzt die singulären Punkte des ebenen Systems Σ' , d. h. diejenigen Punkte $P'(x',y')$, bei welchen die Gleichungen (1) und (2) unbestimmt werden. Ein solcher Punkt wird der Punkt V bzw. U' sein, ferner noch ein neuerer Punkt auf der y -Achse.

Die singulären Punkte des ebenen Systems Σ' sind demnach

$$\begin{aligned} ax' [x' + (a' - 1)y' - a'] &= 0 \\ ay' [x' + (a - 1)y' - a] &= 0 \\ (a' - a)x'y' + ax' + (aa' - a')y' - aa' &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir nehmen nun den

Fall I. (Abszisse des Punktes V)

$$x' = 1.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} (a' - 1)y' - (a' - 1) &= 0 \\ y' = 1 \quad \text{oder} \quad y' &= 0. \end{aligned}$$

Im Sinne der dritten Gleichung ist

$$(a' - a)y' + a + (aa' - a')y' - aa' = a[(a' - 1)y - a' + 1] = 0,$$

daraus

$$x' = 1 \quad \text{und} \quad y' = 1. \tag{6}$$

Fall II. (hinsichtlich des Punktes U')

$$y' = 0.$$

Im Sinne der ersten und dritten Gleichung von (5) ist

$$\begin{aligned} x'(x' - a') &= 0 \\ ax' - aa' = a(x' - a') &= 0, \end{aligned}$$

daraus folgt

$$x' = a'.$$

Es ist also

$$x' = a' \quad \text{und} \quad y' = 0. \tag{7}$$

Fall III. (hinsichtlich der y -Achse)

$$x' = 0.$$

$$\begin{aligned} y'[(a - 1)y' - a] &= 0 \\ (a - 1)y' - a &= 0, \end{aligned}$$

daraus folgt

$$y' = \frac{a}{a-1}.$$

Es ist also

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad y' = \frac{a}{a-1}. \quad (8)$$

Dieser singuläre Punkt ist auf der Abbildung durch W' bezeichnet und liegt mit den Punkten U und V auf einer Geraden. Es gilt nämlich

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{a-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{a-1} - \frac{a}{a-1} - a = 0.$$

Auf Grund des Vorangehenden kann gesagt werden, daß in der mit den Formeln (1) und (2) ausgedrückten quadratischen Verwandtschaft den auf der x -Achse gelegenen Punkten diese selbstentsprechend sind, da laut (2) bei $y' = 0$, $y = 0$ sich ergibt; (1) gestaltet sich hingegen wie folgt:

$$x' = \frac{x^2 - ax}{x - a} = x.$$

Da die Verwandtschaft zwischen den zwei gegebenen Systemen in der Ebene quadratisch ist, entspricht einer beliebigen Geraden

$$Ax + By + C = 0 \quad (9)$$

des ebenen Systems Σ in der Ebene des Systems Σ' ein Kegelschnitt. Setzt man die Werte für x' und y' aus den Gleichungen (1) und (2) in die Gleichung dieser Geraden ein und multipliziert man mit dem Nenner, gelangt man zum Kegelschnitt

$$A[ax'^2 + (aa' - a)x'y' - aa'x'] + B[a'x'y' + (aa' - a)y'^2 - aa'y'] + C[(a' - a)x'y' + ax' + (aa' - a)y' - aa'] = 0.$$

Geordnet

$$Aax'^2 + [A(aa' - a) + Ba' + C(a' - a)]x'y' + B(aa' - a)y'^2 + (-Aaa' + Ca)x' + [-Baa' + C(aa' - a)]y' - Caa' = 0. \quad (10)$$

Dieser Kegelschnitt geht durch die drei singulären Punkte. Diese drei Hauptpunkte entsprechen den Punkten der Geraden unter (9), in denen jene Gerade die Hauptgeraden schneidet.

3. Diese quadratische Verwandtschaft läßt sich auch aus zwei Polarverwandtschaften ableiten

$$\begin{aligned} L_1x' + L_2y' + L_3 &= 0 \\ M_1x' + M_2y' + M_3 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

dabei ist

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1x + \beta_1y + \gamma_1 & L_2 &= a_2x + \beta_2y + \gamma_2 & L_3 &= a_3x + \beta_3y + \gamma_3 \\ M_1 &= A_1x + B_1y + C_1 & M_2 &= A_2x + B_2y + C_2 & M_3 &= A_3x + B_3y + C_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Gleichungen (11) ordnen jedem Punkt $P(x,y)$ des ebenen Systems Σ je eine Gerade zu. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Punkt $P'(x',y')$, der auf Grund der quadratischen Verwandtschaft zu dem Punkt $P(x,y)$ gehört. Der Nachweis hiefür wird folgendermaßen erbracht :

Aus (11) folgt

$$x' : y' : 1 = (L_2M_3 - L_3M_2) : (L_3M_1 - L_1M_3) : (L_1M_2 - L_2M_1).$$

Das stimmt mit unserer quadratischen Verwandtschaft überein, wenn

$$\begin{aligned} L_2M_3 - L_3M_2 &= a'x^2 + (aa' - a')xy - aa'x \\ L_3M_1 - L_1M_3 &= axy + (aa' - a)y^2 - aa'y \\ L_1M_2 - L_2M_1 &= (a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa'. \end{aligned} \quad (13)$$

Nach Berechnung der Determinanten auf der linken Seite (12) und Gleichsetzung der entsprechenden Koeffizienten in unseren Gleichungen erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_2A_3 - a_3A_2 = a' \\ a_2B_3 - \beta_3A_2 = aa' - a' \\ a_3C_2 - \gamma_2A_3 = aa' \\ \beta_3C_2 - \gamma_2B_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta_3B_1 - \beta_1B_3 = aa' - a \\ a_3B_1 - \beta_1A_3 = a \\ a_3C_1 - \gamma_1A_3 = 0 \\ \beta_3C_1 - \gamma_1B_3 = -aa' \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma_2C_1 - \gamma_1C_2 = aa' \\ \beta_1A_2 - a_2B_1 = a - a' \\ \gamma_1A_2 - a_2C_1 = a' \\ \beta_1C_2 - \gamma_2B_1 = aa' - a. \end{array} \quad (14)$$

(I)

(II)

(III)

Daraus kann man die in (11) vorkommenden Koeffizienten $a_1, \beta_1, \dots, \gamma_3$ und A_1, B_1, \dots, C_3 ausrechnen.

Es ergibt :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0 & A_2 &= \frac{a a' - a'}{t} & A_3 &= - \frac{a a'}{t} \\
 B_1 &= \frac{a - a a'}{t} & B_2 &= 0 & B_3 &= 0 \\
 C_1 &= \frac{a a'}{t} & C_2 &= 0 & C_3 &= 0 \\
 a_1 &= 0 & a_2 &= \frac{a - 1 - t}{a} & a_3 &= - 1 \\
 \beta_1 &= \frac{t - a' + 1}{a'} & \beta_2 &= 0 & \beta_3 &= - t \\
 \gamma_1 &= 1 & \gamma_2 &= t & \gamma_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

wo t ein frei wählbarer Parameter ist. Nach alledem läßt sich unsere quadratische Verwandtschaft mittels zweier reziproker Beziehungen auf unendlich viele Arten herstellen. Mit anderen Worten : durch Zuordnung des Schnittpunktes der beiden Geraden, die dem Punkt P' entsprechen.

Die Polarbeziehungen unter (11) sind

$$\begin{aligned}
 [(a' - t - 1)ay - aa']x' + [(t - a + 1)a'x - aa't]y' + (x + ty)aa' &= 0 \\
 [(a - aa')y + aa']x' + [(aa' - a')x]y' - aa'x &= 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Die erste dieser Gleichungen enthält t , die zweite hingegen ist eine vom Parameter t unabhängige Gleichung, in welcher die dem Punkte $P'(x',y')$ zugeordnete Gerade eben die Gerade $|VP'|$ ist, die im Sinne der Konstruktion auch den Punkt P enthalten muß. Die erste Gleichung drückt die in der reziproken Verwandtschaft zum Punkte $P'(x',y')$ Gerade aus.

4. *Entsprechende Gerade und Strahlenbüschel.*⁵ Wir haben gesehen, daß in dieser Verwandtschaft einer beliebigen Geraden im anderen System ein Kegelschnitt entspricht, der um das Hauptdreieck des eigenen Systems geschrieben ist. Untersucht man die Kegelschnitte, die sämtlichen Geraden des einen Systems entsprechen, findet man, daß sie im anderen System ein Netz von Kegelschnitten abgeben. Dieses Netz besitzt drei einfache Hauptpunkte, die ja eben die Hauptpunkte des Systems sind. Diese Hauptpunkte genügen zur Bestimmung des Systems der c_2 zweifach unendlich viel Kurven. Denn jeder Punkt, z. B. Punkt A weist in dem Netz auf einen Kegelschnittbüschel, der dem Strahlenbüschel im Punkt A' (Gegenbild des Punktes im System Σ') entspricht. Zwei Punkte, z. B. A und B lassen aus dem Netz einen Kegelschnitt herausgreifen, der der

Geraden $|A'B'|$ im System Σ' zugeordnet ist. Diese Gerade ist dann die gemeinsame Gerade der Strahlenbüschel $|A|$ und $|B|$. Der entsprechende Kegelschnitt ist somit gemeinsames Glied der Kegelschnittbüschel, die durch die Punkte A bzw. B aus dem Netz herausgegriffen werden. Mit anderen Worten: die zwei Kegelschnittbüschel des Netzes haben einen Kegelschnitt gemein, der der Verbindungsgerade $|A'B'|$ entspricht, die die Punkte miteinander verbindet, welche den Bestimmungspunkten A und B der beiden Kegelschnittbüschel zugeordnet sind. Diese beiden Netze von Kegelschnitten nennen wir *homaloide Kegelschnittnetze*, weil jeder ihrer Büschel nur einen veränderlichen Fundamentalpunkt besitzt.

Ähnlicherweise entsprechen den Geraden der Ebene Σ in der Ebene Σ' Kegelschnitte, die ebenfalls ein Netz von homaloiden Kegelschnitten bilden.

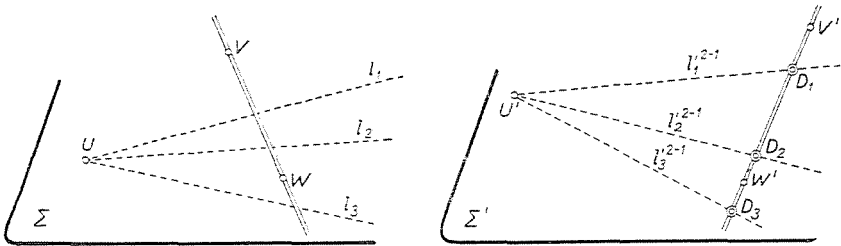


Abb. 5

5. *Eigenschaften von Hauptpunkten.*⁵ Von der Eindeutigkeit der festgestellten Punktverwandtschaft lassen wir im Falle der Hauptpunkte eine Ausnahme gelten. Jedem Hauptpunkt entspricht nämlich in der anderen Ebene nicht nur ein Punkt, sondern sämtliche Punkte einer Geraden. Das ist die Hauptgerade. In der Tat, wenn ein Punkt einen Kegelschnitt durchläuft, dann durchläuft der zugeordnete Punkt in der anderen Ebene die dem Kegelschnitt entsprechende Gerade. Da dieser Kegelschnitt durch einen Hauptpunkt nur einmal hindurchgeht, kann ihm auf der Geraden auch ein Punkt entsprechen. Doch ist der Hauptpunkt auf jedem Kegelschnitt des Netzes ein einfacher Punkt, deshalb enthält jede Gerade der anderen Ebene einen dem Hauptpunkte entsprechenden Punkt, was nun bedeutet, daß jene Punkte in diesem Fall eine Kurve erster Ordnung, d. h. eine Gerade ergeben, die eben die zugeordnete Hauptgerade des Hauptpunktes ist.

Soll nun eine Gerade l_n der Ebene Σ durch den einen Hauptpunkt (U) durchgehen, so wird der Kegelschnitt (l_n^2), der dieser Geraden in der Ebene Σ' zugeordnet ist — und einen der Kegelschnitte im homaloiden Kurvennetz bildet — in Teile zerfallen. Der eine Teil wird die Hauptgerade u' sein, die dem Hauptpunkt U entspricht, der andere Teil hingegen eine Kurve l_n^{2-1} Ordnung, d. h. eine Gerade, die jetzt der eigentliche entsprechende Kegelschnitt von l_n

ist, da sie aus entsprechenden Punkten des sich auf der Geraden l_n entlangbewegenden Punktes besteht (Abb. 5). Dieser Punkt überschreitet während seines Weges auf der Geraden l_n auch den Hauptpunkt U . Wir müssen also infolge der Stetigkeit auch auf der Geraden l_n^{2-1} einen dementsprechenden Punkt bekommen; andererseits liegt dieser Punkt aber auch auf der Hauptgeraden u' . Er ist also ein Doppelpunkt des vollständigen Kegelschnittes; der Kurve $c^2 = |u'l_n^{2-1}|$. Man lasse die Gerade l_n um den Hauptpunkt U eine Drehung machen, dann wird dieser Doppelpunkt die Gerade u' entlanglaufen, was davon zeugt, daß einem um einen Hauptpunkt befindlichen Strahlenbüschel ebenfalls ein Büschel — ein Büschel um einen Hauptpunkt — entspricht.

6. *Entsprechende Kurven.* Einer Kurve c^n n -ter Ordnung in einem ebenen System Σ , die durch keinen Hauptpunkt der Ebene geht, entspricht im System Σ' , wie bekannt, eine Kurve c^{2n} $2n$ -ter Ordnung, der die Hauptpunkte des ebenen Systems Σ' n -fache Punkte abgeben.

Nehmen wir in der Ebene Σ' eine beliebige Gerade x' , die den Hauptpunkt U' trifft und zählen wir ab, wieviele von den $2n$ Schnittpunkten der Geraden x' mit c^{2n} außerhalb des Punktes U' liegen.

Jedem Punkt in allgemeiner Lage, der auf der Ebene liegt, entspricht in der quadratischen Verwandtschaft in der anderen Ebene ebenfalls ein Punkt in allgemeiner Lage. Das im $|U|$ entsprechende Element der in $|U'|$ aufgenommenen Geraden x' ist die Gerade x . Sie schneidet die Kurve c^n in n Punkten von allgemeiner Lage.

Die Kurve $c^{2n'}$ wird somit auch auf der Geraden x' n Punkte in allgemeiner Lage besitzen. Da hat aber x' mit der Kurve noch n Schnittpunkte, die jetzt in den Punkt U' fallen. Dieser Punkt ist ein n -facher Punkt der Kurve $c^{2n'}$.

Es sei jetzt t' die Tangente der Kurve $c^{2n'}$, in ihrem Hauptpunkte U' . $(n + 1)$ von den $2n$ Schnittpunkten t' -s mit der Kurve $c^{2n'}$ treffen U' . In Σ durchläuft die entsprechende Gerade den Hauptpunkt U und kann die Kurve c^n nur in $(n - 1)$ allgemeinen Punkten schneiden. Im Sinne unserer Bedingung geht aber c^n durch U nicht hindurch. So folgt daraus, daß ein Schnittpunkt der Kurve c^n mit der durch U gehenden Geraden t existieren muß, der nicht von allgemeiner Lage ist. Die Gerade t geht also durch den Punkt, der der Schnittpunkt der Kurve c^n mit der dem Hauptpunkt U' entsprechenden und dem Hauptpunkt U gegenüberliegenden Hauptgeraden $|VW|$ ist.

Demnach entspricht einer Kurve n -ter Ordnung, die durch keinen Hauptpunkt der Ebene durchgeht, in der anderen Ebene eine Kurve $2n$ -ter Ordnung, hinsichtlich der die Hauptpunkte n -fache Punkte sind. Die Tangente in diesem n -fachen Punkte entspricht — auf Grund der projektiven Verwandtschaft der Büschel — jenem Strahl, der aus dem homologen Hauptpunkt ausgehend den Schnittpunkt der gegenüberliegenden Hauptgerade und der Kurve trifft.

Wenn die Kurve n -ter Ordnung die Hauptpunkte durchläuft, und zwar den Hauptpunkt U r_1 -mal, den Hauptpunkt V r_2 -mal und den Hauptpunkt W

r_3 -mal, dann wird die entsprechende Kurve $2n$ -ter Ordnung auseinanderfallen müssen, wobei die Hauptgerade $|V'W'|$ r_1 -mal, die Hauptgerade $|W'U'|$ r_2 -mal und die Hauptgerade $|U'V'|$ r_3 -mal zählt. Der verbleibende eigentliche Kurvenrest ist von der Ordnung

$$2n - (r_1 + r_2 + r_3) :$$

durchläuft die Hauptpunkte, und zwar

den Hauptpunkt U' $n - (r_2 + r_3)$ -mal,
 den Hauptpunkt V' $n - (r_3 + r_1)$ -mal und
 den Hauptpunkt W' $n - (r_1 + r_2)$ -mal.

7. *Entsprechende unendlich ferne Punkte.* Suchen wir die unendlich fernen Punkte der behandelten quadratischen Verwandtschaften. Die unendlich fernen Punkte eines ebenen Systems Σ ordnen sich alle auf einer Geraden q_∞ an, die zugeordneten Punkte in Σ' befinden sich auf einem bestimmten Kegelschnitt q'^2 . (Dieser Kegelschnitt ist ein Element des durch drei Hauptpunkte definierten Netzes.) In ähnlicher Weise werden sich die entsprechenden Elemente der unendlich fernen Punkte des ebenen Systems Σ' — die alle auf einer Geraden r'_∞ ruhen — in Σ auf einem Kegelschnitt r^2 zusammenfinden, der ein umschriebener Kegelschnitt des Hauptdreiecks von Σ ist. Den unendlich fernen Punkten von r^2 in Σ , den Schnittpunkten von r^2 und q_∞ entsprechen in Σ' die unendlich fernen Punkte des Kegelschnitts q'^2 , d. h. die Schnittpunkte von q'^2 und r'_∞ .

8. *Spezielle Punkte der Verwandtschaft.* Die zwei gegebenen Felder mögen in beiden Fällen ein vereinigttes ebenes System sein. Ein beliebiger Punkt ist nun beiden Systemem hinzuzählbar; bezeichnen wir ihn durch $P \equiv Q'$. Die entsprechenden Elemente sind P' und Q . Damit stehen wir vor folgenden Aufgaben:

a) Gesucht werden die Punkte der Verwandtschaft, die mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen, d. h. die Punkte $P \equiv P'$ (Koinzidenzpunkte = zusammenfallende Punkte).⁶

b) Gesucht werden jene Punkte der Verwandtschaft, deren Punkte in beiderlei Sinn entsprechend zusammenfallen, d. h. wo dem Punkt $P \equiv Q'$ sowohl im einen als auch im anderen Sinne der Punkt $P' \equiv Q$ zugewiesen ist. (Involutorische, d. h. vertauschbare Punkte).⁷

a) *Koinzidenzpunkte.* In der quadratischen Verwandtschaft der vereinigtten ebenen Systeme werden auf dem einen reellen homologen Hauptpunktepaar, z. B. auf U und U' projektive Strahlenbüschel aufgenommen. Das Erzeugnis dieser Büschel ist ein Kegelschnitt k_1 , der die Punkte U und U' durchläuft. Verbindet man nun einen selbstentsprechenden Punkt ($P \equiv P'$) der Ebene mit den Trägern U und U' des Büschels, erhält man ein entsprechendes Paar der gewählten projektiven Strahlenbüschel. Daraus läßt sich feststellen, daß

sich die eventuellen Koinzidenzpunkte nur auf dem Kegelschnitt k_1 befinden können. Nimmt man auch in einem anderen reellen homologen Hauptpunktepaar, z. B. in W und W' projektive Büschel auf, so findet man als deren Erzeugnis einen Kegelschnitt k_2 , der gleichfalls die selbstentsprechenden Punkte enthält. Die vier Schnittpunkte der zwei Kegelschnitte k_1 und k_2 ergeben die vier Koinzidenzpunkte der quadratischen Verwandtschaft.

Im Falle der quadratischen Verwandtschaft unter II/1. gilt nicht nur $|U|\overline{\wedge}|U'|$, sondern auch $|U|\wedge|U'|$. Das Erzeugnis, nämlich der Kegelschnitt k_1 zerfällt dann in zwei Gerade :

$$x = |UU'| \quad \text{und} \quad s = y = |WW'|.$$

Diese besondere quadratische Verwandtschaft hat also nicht vier, sondern doppelt unendlich viel Koinzidenzpunkte, d. h. die Punkte der Geraden $s = y = |WW'|$ und $x = |UU'|$.

Man gelangt zum gleichen Ergebnis, wenn man in den Gleichungen die den selbstentsprechenden Werten zugehörenden Punkte, d. h. die Punkte die aus

$$x' = x \quad \text{und} \quad y' = y$$

folgen, berechnet. Es ergibt

$$\text{die Gerade } s = y = |WW'| \dots x = 0 \quad \text{und}$$

$$\text{die Gerade } x = |UU'| \dots y = 0,$$

welche die doppelt unendlich vielen Koinzidenzpunkte der ebenen quadratischen Verwandtschaft II/1. ergeben.

b) *Das involutorische Punktepaar.* U und U' sind ein homologes Hauptpunktepaar der reellen Hauptdreiecke in der vereinigten ebenen quadratischen Verwandtschaft (I/1.). Nehmen wir wieder die darauf befindlichen projektiven Strahlenbüschel

$$|U|\overline{\wedge}|U'|.$$

Einer Geraden g von $|U|$ entspricht in $|U'|$ die Gerade g' . Rechnen wir nun die Gerade g dem Σ' zu und bezeichnen wir sie mit h' , so entspricht ihr in Σ ein Kegelschnitt h^2 . Die Gerade g möge nun den Büschel $|U|$, g' den Strahlenbüschel $|U'|$; der Kegelschnitt h^2 wird dann ein Büschel von Kegelschnitten beschreiben, dessen Fundamentalpunkte

$$U, V, W \text{ und } X$$

sind, wobei Punkt X dem Punkte U entspricht, wenn man den als Punkt X'

dem Σ' hinzuzählt. Das Strahlenbüschel $|g'|$ und das Kegelschnittbüschel (h^2) sind projektiv, ihr Erzeugnis wird demzufolge eine Kurve dritter Ordnung sein, die durch die Punkte U, V, W, X und U' durchgeht (Abb. 6).

Man kann ähnlicherweise auch $|U'|$ als Ausgang nehmen. Die entsprechenden Gebilde der Strahlen $|U'|$ in beiden Ebenen führen dann ebenfalls zu einer Kurve dritter Ordnung, die durch die Punkte U', V', W', Y' und U geht, wobei Y' dem Punkt $U' \equiv Y'$ entspricht.

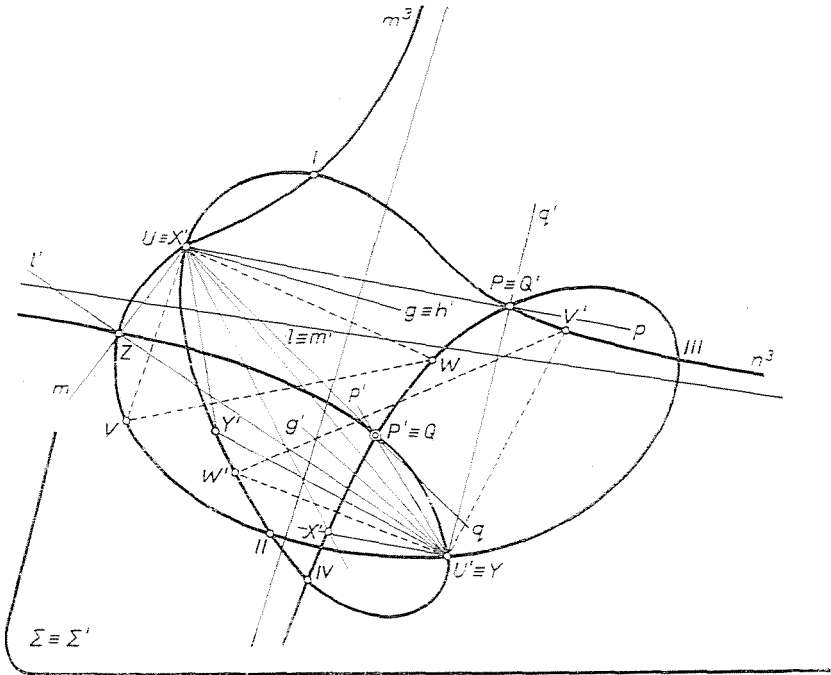


Abb. 6

Untersuchen wir jetzt die Schnittpunkte dieser zwei Kurven dritter Ordnung. Zu ihnen gehören jedenfalls U und U' ; aus der Erzeugung der beiden Kurven folgt ferner unmittelbar, daß die Kurven die vier Koinzidenzpunkte der Verwandtschaft hindurchlaufen. Schließlich nehmen wir den Verbindungsstrahl $|U U'|$, als die Gerade $l' \equiv m$. Ihr entspricht l' und m , deren Schnittpunkt $(l'm) = Z$ auch von den beiden Kurven dritter Ordnung durchlaufen wird. Sieben von den neun Schnittpunkten der zwei Kurven sind bekannt, so bleiben noch zwei übrig. Bezeichnen wir den einen von ihnen durch $P \equiv Q'$. Die zugeordneten Punkte P' bzw. Q sind dadurch gekennzeichnet, daß sie auf einem Strahl von $|U|$ bzw. $|U'|$ liegen. Der gesuchte Punkt kann sich aber auf dem Verbindungsstrahl $|U U'|$ nicht befinden, weil das der Punkt Z

war — deshalb muß es notwendigermaßen $P' \equiv Q$ sein. Die letzten zwei Schnittpunkte der Kurve dritter Ordnung sind also ein involutorisches (zugleich auch das einzige involutorische) Punktpaar dieser quadratischen Verwandtschaft.

Wir wollen jetzt noch auf analytischem Wege die involutorischen Punktepaare der im Vorhergehenden eingehend behandelten speziellen quadratischen Verwandtschaft in der Ebene (II/1.) bestimmen.

Die Ausdrücke (3) und (4) seien kurz

$$x' = Q_1(x,y) \quad \text{und} \quad y' = Q_2(x,y). \tag{17}$$

In dem Falle, wenn der obige Punkt wieder als Punkt (x,y) gerechnet und die gleiche Abbildung wie unter (3) und (4) dabei angewandt wird, gilt

$$x = Q_1[Q_1(x,y), Q_2(x,y)] \quad \text{und} \quad y = Q_2[Q_1(x,y), Q_2(x,y)]. \tag{18}$$

Es sei

$$x = \frac{P}{Q}.$$

Nach durchgeführter Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} P[(a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa']^2 &= a'^3x^4 + (3aa'^3 - aa'^2 - 2a'^3)x^3y + \\ &+ (3a^2a'^3 - 2a^2a'^2 - 4aa'^3 + 2aa'^2 + a'^3)x^2y^2 + \\ &+ (a^3a'^3 - a^3a'^2 - 2a^2a'^3 + 2a^2a'^2 + aa'^3 - aa'^2)xy^3 - 3aa'^3x^3 + \\ &+ (-6a^2a'^3 + 2a^2a'^2 + 4aa'^2)x^2y + \\ &+ (-3a^3a'^3 + 2a^3a'^2 + 4a^2a'^3 - 2a^2a'^2 - aa'^3)xy^2 + 3a^2a'^3x^2 + \\ &+ (3a^3a'^3 - 2a^2a'^3 - a^2a'^2)xy - a^3a'^3x. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q[(a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa']^2 &= (a^2a' - a'^3)x^3y + \\ &+ (2a^2a'^2 + aa'^2 + a^3a' + a'^3 - a^3 - 3aa'^3 - a^2a')x^2y^2 + \\ &+ (2a^3a'^2 - 2a^2a'^3 - 3a^2a' + aa'^3 - aa'^2 + a^3 + 2a^2a'^2)xy^3 + \\ &+ a'^3x^3 + (6aa'^3 - 2a^2a'^2 - aa'^2 - a'^3 - a^3a' - a^2a')x^2y + \\ &+ (7a^2a'^3 - 2aa'^3 + aa'^2 + 2a^3a' - 4a^3a'^2 + a^2a' - 6a^2a'^2 + a^3)xy^2 + \\ &+ (a^3a'^3 - 3a^3a'^2 + 3a^3a' - a^3)y^3 + (-3aa'^3)x^2 + \\ &+ (2a^3a'^2 - 7a^2a'^3 + 4a^2a'^2 + a^3a')xy + (6a^3a'^2 - 3a^3a'^3 - 3a^3a')y^2 + \\ &+ 3a^2a'^3x + (3a^3a'^3 - 3a^3a'^2)y - a^3a'^3x \end{aligned}$$

als Resultat. Diesbezüglich ist

$$x = \frac{P [(a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa']^2}{Q [(a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa']^2}.$$

Der hieraus gewonnene Ausdruck 5. Ordnung

$$K = (xQ - P) [(a - a')xy + a'x + (aa' - a)y - aa']^2 = 0$$

ist durch xy teilbar :

$$\begin{aligned} \frac{K}{xy} &= a'x^3(a^2 - a'^2) + x^2y(a - a')(a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2) + \\ &+ xy^2(a - a')(2a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2 + a^2 + aa') - \\ &- x^2(a - a')(a^2a' + 3aa'^2 + aa' + a'^2) - \\ &- xy(a - a')(4a^2a'^2 - 2a^2a' + 2aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2) - \\ &- y^2(a - a')(2a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2 + a^2 + aa') + \\ &+ x(a - a')(2a^2a'^2 + a^2a' + 3aa'^2) + \\ &+ y(a - a')(4a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2) - (a - a')2a^2a'^2 = 0. \end{aligned}$$

Bezüglich der Involutionenpunkte gilt (alternativ)

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi(xy) &= (aa' + a'^2)x^3 + (a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2)x^2y + \\ &+ (2a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2 + a^2 + aa')xy^2 - \\ &- (a^2a' + 3aa'^2 + aa' + a'^2)x^2 - \\ &- (4a^2a'^2 - 2a^2a' + 2aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2)xy - \\ &- (2a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2 + a^2 + aa')y^2 + (2a^2a'^2 + a^2a' + 3aa'^2)x + \\ &+ (4a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2)y - 2a^2a'^2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Das gleiche Verfahren bei (18) angewandt, erhält man

$$y = \frac{R}{Q},$$

wo R ein dem P entsprechender Ausdruck sein wird. Für die Involutionenpunkte erhalten wir ähnlicherweise (alternativ)

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$\begin{aligned} \Psi(xy) = & (aa' + a'^2)x^2y + (a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2)xy^2 + \\ & + (2a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2 + a^2 + aa')y^3 - (aa' + a'^2)x^2 - \\ & - (2a^2a' + 6aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2)xy - \\ & - (6a^2a'^2 - 6a^2a' - 2aa'^2 + a^2 + aa')y^2 + (a^2a' + 3aa'^2)x + \\ & + (6a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2)y - 2a^2a'^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Von den erhaltenen Gleichungen ist $\Phi(x,y)$ durch $(x-1)$ teilbar, $\Psi(x,y)$ hingegen durch $(y-1)$. Nach Durchführung dieser zwei Rechnungen kommt man zu gleichen Quotienten, und zwar zu den Kegelschnitten

$$\frac{\Phi(x,y)}{x-1} = \frac{\Psi(x,y)}{y-1}. \quad (21)$$

Hinsichtlich der Involutionenpunkte gelten auf Grund von (19) und (20) die Geraden

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad (x = 1 \text{ ist dem } \Psi = 0 \text{ und} \\ y = 0 & \quad y = 1 \text{ ist dem } \Psi = 0 \text{ nicht entsprechend);} \end{aligned}$$

sowohl der Kegelschnitt

$$\begin{aligned} k = & (aa' + a'^2)x^2 + (a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2)xy + \\ & + (2a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2 + a^2 + aa')y^2 - (a^2a' + 3aa'^2)x - \\ & - (4a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2)y + 2a^2a'^2 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Determinante von diesem Kegelschnitt ist

$$A = \begin{vmatrix} (2aa' + 2a'^2) & (a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2) & (-a^2a' - 3aa'^2) \\ (a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2) & (4a^2a'^2 - 6a^2a' - 2aa'^2 + 2a^2 + 2aa') & (-4a^2a'^2 + 3a^2a' + aa'^2) \\ (-a^2a' - 3aa'^2) & (-4a^2a'^2 + 3a^2a' + aa'^2) & 4a^2a'^2 \end{vmatrix} = 0$$

Rechnet man in dieser Determinante, so entsteht die Form

$$A = a^2a'^2(a - a')^4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Aus A_{33} wird

$$A_{33} = \begin{vmatrix} (2aa' + 2a'^2) & (a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2) \\ (a^2a' + 3aa'^2 - a^2 + a'^2) & (4a^2a'^2 - 5a^2a' + aa'^2 + a^2 - a'^2) \end{vmatrix} = - (a - a')^2(aa' - a - a')^2. \quad (24)$$

Das bedeutet

$$A = 0 \quad \text{und} \quad A_{33} < 0.$$

Die Kurve k zerfällt also in zwei Gerade. Die Form dieser beiden Geraden sei

$$(Ax + By + 2aa')(Cx + Dy + aa') = 0. \quad (25)$$

Nach Durchführung der in (25) vorgeschriebenen Multiplikation und Gleichsetzung dieser Koeffizienten mit dem Koeffizienten der Gleichung (22)

$$\begin{aligned} AC &= aa' + a'^2 \\ AD + CB &= a^2a' + 3aa'^2 - a^2 - 2aa' - a'^2 \\ A + 2C &= -a - 3a' \\ BD &= 2a^2a'^2 - 3a^2a' - aa'^2 + a^2 + aa' \\ B + 2D &= -4aa' + 3a + a'. \end{aligned} \quad (26)$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} A &= -a - a' & C &= -a' \\ B &= -2aa' + a + a' & D &= -aa' + a. \end{aligned} \quad (27)$$

Der Kegelschnitt in (22) zerfällt so in zwei Gerade:

$$\begin{aligned} e_1 \dots & (a + a')x + (2aa' - a - a')y - 2aa' = 0 \\ e_2 \dots & a'x + (aa' - a)y - aa' = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Bezüglich der Involutionenpunkte unserer ebenen quadratischen Verwandtschaft ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{für } e_1: & \quad \text{bei } x = 0 & y &= 1 + \frac{a + a'}{2aa' - a - a'} \\ & \quad \text{,, } y = 0 & x &= \frac{2aa'}{a + a'} \\ & \quad \text{,, } x = 1 & y &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } e_2: \quad & \text{bei } x = 0 & y = \frac{a'}{a' - 1} \\ & \text{,, } y = 0 & x = a \\ & \text{,, } y = 1 & x = \frac{a}{a'} \end{aligned}$$

Von den zwei erhaltenen Geraden ist e_2 die Hauptgerade $|UW|$ der Verwandtschaft. Der Schnittpunkt $\left(0, \frac{a'}{a' - 1}\right) = W$ von e_2 mit der y -Achse ist nämlich ein Hauptpunkt der Verwandtschaft, weil sich dieser Punkt auf der Geraden $|U'V|$ befindet.

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{a'}{a' - 1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a' & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a'}{a' - 1} \begin{vmatrix} -1 & a' & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Geraden e_2 entspricht in dieser Verwandtschaft der Hauptpunkt V . Der geometrische Ort der Involutionspunkte ist folglich die Gerade e_1 , deren Schnittpunkt mit der x -Achse $x = \frac{2aa'}{a + a'}$ dem Punkt 0 bezüglich der Hauptpunkte U und U' harmonisch verwandt ist.

Wenn man auf der Geraden e_1 einen beliebigen Punkt (P) auswählt, so wird diesem in der Verwandtschaft — im Sinne einer Konstruktion nach beiden Richtungen — ein Punkt P' entsprechen, der mit den Hauptpunkten U und U' zusammen jenes Vollviereck bilden wird, dessen zwei Diagonalepunkte die auf der Geraden s (auf der y -Achse) gelegenen Punkte sind, der dritte (R) aber der auf der x -Achse liegende harmonische Punkt $x = \frac{2aa'}{a + a'}$ ist (Abb. 7).

Auch bei dieser Konstruktion sind also die Punkte P und P' einander involutorisch zugeordnet.

Die auf der Geraden e_1 sitzenden Punktpaare PP' bilden eine Punktinvolution. Eine ihrer Doppelpunkte ist der Punkt $R\left(\frac{2aa'}{a + a'}, 0\right)$ der andere der Schnittpunkt der Geraden e_1 mit der Achse s : der Punkt

$$S\left(0, 1 + \frac{a + a'}{2aa' - a - a'}\right) . *$$

* Im vorliegenden Falle zerfallen die beiden Kurven dritter Ordnung, die die Involutionspunkte abgeben, in je 3 Gerade. Sie sind $m^3 = (x = 1, e_1 \text{ und } e_2)$ sowie $n^3 = (y = 1, e_1 \text{ und } e_3)$. Die gemeinsamen Punkte dieser beiden Kurven von dritter Ordnung liefert die soeben gefundene Gerade e_1 , auf welcher sämtliche involutorische Punkte der Verwandtschaft aufzufinden sind.

9. Die Erzeugung einer Reziprozität aus einer quadratischen Verwandtschaft. Es ist bekannt, daß die reziproke Zuordnung zweier ebener Systeme eine quadratische Verwandtschaft bestimmt. Aus den gegebenen quadratischen Verwandtschaften (I/1. und II/1.) wollen wir nun die zwei reziproken ebenen Systeme herstellen, die dieselben quadratischen Verwandtschaften bestimmen.

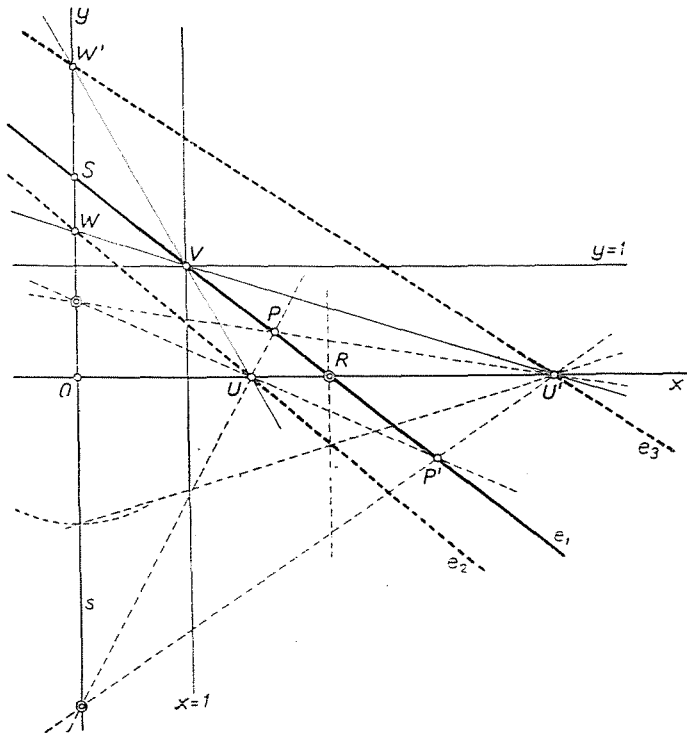


Abb. 7

Wir haben gesehen, daß man in den beiden gegebenen quadratischen Verwandtschaften die Hauptdreiecke bilden hat können. Die beiden reellen Hauptdreiecke seien nun

$$UVW_{\Delta} \quad \text{und} \quad U'V'W'_{\Delta},$$

ferner ein entsprechendes Punktpaar P und $P' = (p'_1, p'_2)$. Die reziproke Verwandtschaft Γ_1 wird dann in beiden Fällen durch die folgenden Paare von Elementen begründet :

$$\left| \begin{array}{c} U \\ V'W' \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} V \\ W'U' \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} W \\ U'V' \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} P \\ p'_1 \end{array} \right|$$

Ähnlicherweise bekommen wir die reziproke Verwandtschaft Γ_2 , in dieser ersetzen wir den Strahl p_1' durch den Strahl p_2' . In der mittels der reziproken Verwandtschaften Γ_1 und Γ_2 bestimmten quadratischen Verwandtschaft sind U und U' , V und V' sowie W und W' homologe Hauptpunkte, P, P' aber ein zugeordnetes Punktpaar. Folglich ist diese quadratische Verwandtschaft identisch mit der gegebenen. Die Projektivität zwischen den Strahlenbüscheln

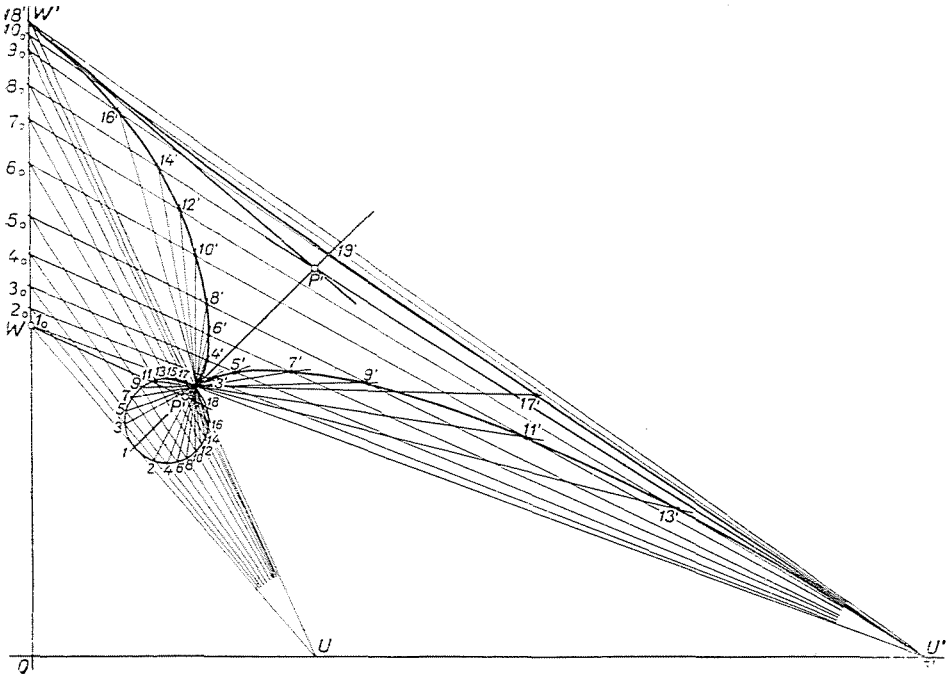


Abb. 8

$|U|$ und $|U'|$, $|V|$ und $|V'|$ und $|W|$ und $|W'|$ ist eindeutig definiert; so wird es uns möglich sein, in der quadratischen Verwandtschaft weitere entsprechende Punktpaare X und X' zu konstruieren.

10. *Eine Anwendung der quadratischen Verwandtschaft.* Wir stellten fest, daß die beiden ebenen Systeme durch die quadratische Verwandtschaft aufeinanderbezogen werden. Wenn nun für ein Gebilde des ebenen Systems Σ ein Gesetz erwiesen wird — wobei von keinerlei metrischen Begriffen Gebrauch gemacht wird —, so übergeht das Gebilde vermittels der quadratischen Verwandtschaft in ein Gebilde des ebenen Systems Σ' . Dabei begründet das bereits festgestellte Gesetz hinsichtlich dieses neuen Gebildes ein entsprechendes neues Gesetz. Durch diese stetige und eindeutige Verwandtschaft ist es möglich, aus einem planimetrischen Satz neue Sätze herzuleiten, die schon für Kurven

höherer Ordnung Gültigkeit haben. Planimetrische Aufgaben können aber auch so gelöst werden, daß man die Ebene quadratisch auf eine andere Ebene abbildet, in der die gestellte Aufgabe gelöst und dann die Lösung in die gegebene Ebene zurückgeführt wird. Ein Beispiel:

Es ist zu beweisen, daß die drei Spitzentangenten einer Kurve vierter Ordnung immer durch einem Punkt gehen.

Nach dem bekannten Satz der projektiven Geometrie: schneiden sich die so erhaltenen drei Geraden immer in einem Punkte, wenn in einem umschriebenen Dreieck eines Kegelschnittes die Berührungspunkte der Dreieckseiten mit den gegenüberliegenden Spitzen verbunden werden.

Legen wir die gegebene Kurve vierter Ordnung in das ebene System Σ' unserer ebenen quadratischen Verwandtschaft, so daß die drei Spitzenpunkte der Kurve vierter Ordnung die drei Hauptpunkte des ebenen Systems Σ' decken. Auf Grund der Verwandtschaft wird der Kurve vierter Ordnung in der Ebene Σ ein Kegelschnitt entsprechen, der die drei Hauptpunkte des ebenen Systems Σ durchläuft. Das Hauptdreieck dieses Systems ist aber das umschriebene Dreieck der Kurve c^2 , die der gegebenen Kurve c^4 entspricht. Die Verbindungslinien zwischen den Berührungspunkten der Dreieckseiten als Kegelschnitttangente und der gegenüberliegenden Hauptpunkte (Spitzen) werden als entsprechende Elemente die Spitzentangenten der Kurve c^4 besitzen, die sich aber wieder in einem Punkt schneiden (s. Abb. 8).

Zusammenfassung

Kurze Übersicht über die allgemeine ebene quadratische Verwandtschaft.

Synthetische und analytische Untersuchung einer speziellen ebenen quadratischen Verwandtschaft. Herstellung der Verwandtschaft aus zwei Polarverwandtschaften. Die entsprechenden Geraden und Büschel der Verwandtschaft. Eigenschaften der Hauptpunkte. Die entsprechenden Kurven und die entsprechenden unendlich fernen Punkte. Besondere Punkte der Beziehung: Koinzidenzpunkte und Involutionenpunkte. Erzeugung einer Reziprozität aus der quadratischen Verwandtschaft. Eine Anwendung der quadratischen Verwandtschaft.

Schrifttum

1. STURM, R.: Über die reziproke und mit ihr zusammenhängenden Verwandtschaften. Math. Ann. 19, S. 461—486.
2. STURM, R.: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. IV, 43—72. (1909)
3. SEYDEWITZ: Archiv f. Mathem. und Physik. 1. Reihe 7, 113.
4. STURM, R.: Die Lehre von den geom. Verw. IV, 62. (1909)
5. L. Eindeutige Cremonasche Verw. (R. Sturm: Die Lehre von den geom. Verw. IV.).
6. DOEHLEMANN, K.: Geometrische Transformationen. II, 38—39.
7. DOEHLEMANN, K.: Z. f. Math. u. Physik. 36, 356.
8. REYE, T.: Z. f. Math. 11, 280. Geometrie der Lage 3. Aufl. 2. Abt. 25. Vortrag.

L. MITNYÁN, Budapest, XI. Budafoki-út 4—6.