EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER AEQUIDISTANTE LAGRANGESCHE INTERPOLATION

Von

T. FREY
Lehrstuhl für Mathematik der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 2. Juli 1957)

Einleitung

Es ist wohl bekannt, daß man sehr starke Bedingungen über die strukturellen Eigenschaften der interpolierten Funktion fordern muß, um die Konvergenz der Folge der aequidistanten Lagrangeschen Interpolation (in den Folgenden mit a. L. I. gekürzt) zu sichern. Das berühmte Bernsteinsche Gegenbeispiel [1] zeigt, daß im Allgemeinen auch kein Lokalisationssatz (im Riemannschen Sinne) bei aequidistanter Grundpunktfolge (in den Folgenden: a. G. p. f.) gelten kann.

Die aequidistante Interpolationsfolge ist aber ein in der numerischen Praxis sehr oft gebrauchtes Näherungsverfahren und eben deswegen ist es wichtig, daß wir untersuchen: welche Eigenschaften der Bernsteinschen Funktion die Divergenzenscheinungen beim obenerwähnten Beispiel zustande kommen lassen. Die Antwort werden wir durch einen positiven Satz ergeben. Wir werden nämlich beweisen, daß ein Lokalisationssatz (im verallgemeinerten Sinne) doch auch bei a. L. I. gültig ist, welcher sich aber nicht auf Punkte, sondern auf Intervalle bezieht, und zwar auf solche Intervalle — und das ist das Wesen der obenerwähnten Antwort —, die das Zentrum des Grundintervalles als Halbierungspunkt besitzen.

In dieser Arbeit betrachten wir die a. G. p. f. des Intervalles $[-1, 1]$:

$$x_k^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} k\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{0.1}$$

da der allgemeine Fall durch eine lineare Transformation in den obigen speziellen Fall leicht überführbar ist. Die Grundfunktionen werden wir mit $l_k^{(n)}(x)$ bezeichnen:

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)}) \cdot (x - x_k^{(n)})}\,; \quad \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k^{(n)})\,. \tag{0.2}$$

Neben der Lebesgueschen Funktion $\Lambda_n(x)$ des Verfahrens ist es zweckmäßig auch die äußere und innere Lebesguesche Funktion $\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x\,;\ \delta)$ $\Lambda_n^{(i)}(x\,;\ \delta)$ (s. [2]) — in einer Form adaptiert zum Verfahren — einzuführen:

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k^{(n)}(x)|\,; \tag{0.3}$$

$$\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x\,;\ \delta) = \sum_{k:\,|x_k^{(n)}| \geq |x|+\delta} |l_k^{(n)}(x)|\,;\ \Lambda_n^{(i)}(x\,;\ \delta) = \sum_{k:\,|x_k^{(n)}| < |x|+\delta} |l_k^{(n)}(x)|\,;\ \delta \geq 0\,. \tag{0.4}$$

1. §. Einige Hilfssätze über die Lebesgueschen Funktionen.

Die unten folgenden Hilfssätze geben das Wesentliche.

Hilfssatz 1.1. Es gilt bei a. G. p. f. folgende Abschätzung:

$$\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x\,;\ \delta) = 0\,(n \cdot q^n)\,;\ q = q\,(\delta\,;\ |x|) < 1\,. \tag{1.1}$$

Beweis: Es sei der (obere) Index n fixiert und bezeichnen wir den (unteren) Index des ersten, bzw. letzten Grundpunktes, welcher noch in den Intervall $(-|x|-\delta\,;\ |x|+\delta)$ fällt, mit

$$l^* + 1 = l^*(n) + 1 \qquad \text{bzw.} \qquad l^{**} - 1 = l^{**}(n) - 1\,; \tag{1.2}$$

es sei weiter — ohne Beschränkung der Allgemeinheit, da alles symmetrisch um das Zentrum liegt —

$$x \leq 0\,;\ x_s^{(n)} < x \leq x_{s-1}^{(n)}\,:\ s = s\,(n)\,. \tag{1.3}$$

So

$$\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x\,;\ \delta) = |\omega_n(x)| \cdot \sum_{k:\,\substack{k \leq l^* \\ k \geq l^{**}}} \frac{1}{|\omega_n'(x_k^{(n)})| \cdot |x - x_k^{(n)}|}\,. \tag{1.4}$$

Für die Funktion $|\omega_n(x)| = \prod_{k=1}^{n} |x - x_k^{(x)}|$ kann man z. B. durch Aufspaltung der Faktoren in zwei Mengen eine Abschätzung geben. Der ersten Menge gehören die Grundpunkte an, für welche $|x_k^{(n)}| \leq |x_{s+1}^{(n)}|$. Zu diesen Punkten angehörige Faktoren werden vergrößert, falls x durch $x_s^{(n)}$ ersetzt wird, da nach (1.3) $x \leq 0$ ist. Bei der Rest-Menge werden wir die Faktoren (es gibt aus solchen eine gerade Zahl) paaren, und zwar den zum Grundpunktindex $l^* - p$ gehörigen mit dem zum Index $l^{**} + p$ gehörigen. Die Faktorenpaare werden durch die Verkleinerung des $|x|$ vergrößert, da die Summe der Faktoren jedes Paares unverändert bleibt, ihre Differenz aber kleiner wird, weswegen ihr Produkt größer wird. Bei dieser Menge wird also x mit

$x_{s+1}^{(n)}$ ersetzt:

$$|\omega_n(x)| < \left\{\prod_{\nu=1}^{n-2s-1} \tfrac{2}{n}\nu\right\} \cdot \left\{\prod_{\mu=1}^{s+1} \tfrac{2}{n}\left[\mu\,(n-2s-2+\mu)\right]\right\} =$$

$$= \frac{2^{n+1}\cdot(n-2s-1)\cdot(s+1)!\,(n-s-1)!}{n^{n+1}}. \tag{1.5}$$

Die Summe in (1.4) wird so abgeschätzt: es gilt für alle in Frage kommenden k:

$$\frac{1}{|x-x_k^{(n)}|} \leq \frac{1}{\delta}. \tag{1.6}$$

$\dfrac{1}{|\omega_n'(x_k^{(n)})|}$ ist leicht angebbar, und so

$$\sum_{\substack{k\leq l^*\\ k\geq l^{**}}} \frac{1}{|\omega_n'(x_k)|} = \left\{\sum_{k=0}^{l^*} + \sum_{k=l^{**}}^{n}\right\} \frac{n^n}{2^n\cdot k!\,(n-k)!}. \tag{1.7}$$

Es ist aber

$$\frac{n^n}{2^n\cdot k!\,(n-k)!} = \frac{n^n}{2^n\cdot n!}\binom{n}{k}, \tag{1.8}$$

und

$$\sum_{k=0}^{l^*}\binom{n}{k} = \sum_{k=l^{**}}^{n}\binom{n}{k}, \tag{1.9}$$

da nach (1.2) $l^* = n - l^{**}$ ist; $\binom{n}{k}$ monoton ist in k, weiter $l^* \leqq \dfrac{n}{2}$ es gelten also folgende Ungleichungen:

$$\sum_{\substack{k\leq l^*\\ k\geq l^{**}}} \frac{1}{|\omega_n'(x_k)|} < 2\cdot l^*\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}\cdot\binom{n}{l^*} = \frac{l^*\cdot n^n}{2^{n-1}\,(l^*)!\,(n-l^*)!}. \tag{1.10}$$

$$\Lambda_n^{(\ddot a)}(x;\delta) < \frac{1}{\delta}\cdot\frac{2^{n+1}(n-2s+1)\,(s+1)!\,(n-s-1)!\,n^n}{n^{n+1}\,2^{n-1}\cdot(l^*-1)!\,(n-l^*)!} =$$

$$= \frac{4}{\delta}\,\frac{n-2s-1}{n}\cdot\frac{(s+1)!\,(n-s-1)!}{(l^*-1)!\,(n-l^*)!}. \tag{1.11}$$

Wir müssen jetzt bedenken, daß $s > l^*$ und so $n-s-1 < n-l^*$ ist, also

$$\Lambda_n^{(\ddot a)}(x;\delta) < \frac{4}{\delta}\cdot\frac{(n-2s-1)(s+1)}{n}\cdot$$

$$\cdot\frac{l^*(l^*+1)(l^*+2)\ldots[l^*+(s-l^*-1)]\cdot s}{(n-s)(n-s+1)(n-s+2)\ldots(n-l^*)}. \tag{1.12}$$

Wir führen die Bezeichnung $s - l^* + 1 = \alpha$ ein. Es gilt also

$$\Lambda_n^{(\ )}(x;\delta) < \frac{4}{\delta} s \cdot \left(\frac{s}{n-l^*}\right)^{\alpha}, \tag{1.13}$$

auch, da $\frac{(n-2s+1)(s+1)}{n} < s$ denn $s \leq \frac{n}{2}$ und die Folge

$$\frac{l^*}{n-s};\quad \frac{l^*+1}{n-s+1};\quad \ldots;\quad \frac{s}{n-l^*} \tag{1.14}$$

monoton zunehmend ist. Es gelten weiter auch die Abschätzungen:

$$\frac{s}{n-l^*} = \frac{\frac{2}{n}s}{2-\frac{2}{n}l^*} = \frac{-1+\frac{2}{n}s+1}{1+1-\frac{2}{n}l^*} < \frac{1-|x|}{1+|x|+\delta}; \tag{1.15}$$

$$\alpha = \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}(s-l^*+1) > \frac{n}{2}\delta;\ s = \frac{2}{n}\cdot s\cdot\frac{n}{2} < \frac{n}{2}(1-|x|), \tag{1.16}$$

und deshalb

$$\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x;\delta) < \frac{2}{\delta}\, n(1-|x|)\cdot\left[\left(\frac{1-|x|}{1+|x|+\delta}\right)^{\frac{\delta}{2}}\right]^n, \tag{1.17}$$

w. z. b. w.

Wir brauchen eine Abschätzung von $\Lambda_n^{(\ddot{a})}$ auch im Falle $\delta = 0$.

Hilfssatz 1.2. Es gilt bei a. G. p. f. die Abschätzung:

$$\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x;\delta=0) \leq 4e\min\left\{\frac{1+|x|}{1-|x|}\ln\frac{1+|x|}{2|x|};\ \ln\frac{n}{2}\right\}+1. \tag{1.18}$$

Beweis: Wir behalten die Bezeichnungen und die Voraussetzung $x \leq 0$ des vorigen Hilfssatzes; wir können daneben voraussetzen, daß

$$x_s^{(n)} < x < x_{s+1}^{(n)} \tag{1.19}$$

ist, da beim Fall $x = x_{s+1}^{(n)}$ die Gleichung (1.18) bzw. $\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x, 0) = 1$ selbstverständlich ist. Die Abschätzungen folgen denselben Weg, wie früher, doch — da wir für $|\omega_n(x)|$ eine schärfere brauchen — werden wir erstens das Intervall $[x_s;\ x_{s+1}]$ auf n gleiche Teile schneiden:

$$x_s + w\frac{2}{n^2} < x \leq x_s + (w+1)\frac{2}{n^2};\ 0 < w = w(n) < n, \tag{1.20}$$

und die Faktoren $|x - x_s|$; $|x - x_{s+1}|$ — und darum auch $|x - x_{n-s}|$— extra schätzen; zweitens müssen wir auch $|l_s^{(n)}(x)|$ extra abschätzen. Bei diesem letzten benützen wir die Ungleichung

$$\frac{d}{dx} l_s^{(n)}(x) \leq 0, \qquad \text{falls} \qquad x_s \leq x \leq x_{s+1} \leq 0 \tag{1.21}$$

welche — zusammen mit der trivialen Identität: $l_s^{(n)}(x_s) = 1$ — die Schätzung

$$|l_s^{(n)}(x)| < 1; \qquad x_s \leq x \leq x_{s+1} \tag{1.22}$$

mitzieht. (1.21) folgt leicht aus den Ungleichungen

$$l_s'(x_s) \leq 0; \qquad l_s'(x_{s-1}) < 0 \tag{1.23}$$

da $\frac{d}{dx} l_s^{(n)}(x)$ im Intervall $[x_{s-1}; x_{s+1}]$ nur eine Wurzel haben kann, was wir schnell bei diesem Polynom $(n-1)$-ten Grades nachzählen können. Die zweite Ungleichung in (1.23) ist trivial, die erste aber läßt sich folgenderweise einsehen:

$$|\omega_n(x_s - \eta)| > |\omega_n(x_s + \eta)|, \text{ falls } x_s < 0 \text{ und } 0 < \eta < \frac{4}{n}, \tag{1,24}$$

was man nach geeigneter Gruppierung der Faktoren — ebenso wie in (1.5) — verifizieren kann. Dann aber

$$\frac{\omega_n(x_s - \eta)}{\omega_n'(x_s)\cdot(-\eta)} = l_s^{(n)}(x_s - \eta) > l_s^{(n)}(x_s + \eta) = \frac{\omega_n(x_s + \eta)}{\omega_n'(x_s)\cdot(\eta)} > 0, \tag{1.25}$$

$$\text{also} \quad \frac{d}{dx} l_s^{(n)}(x)\Big|_{x=x_s} = \lim_{\eta \to 0} \frac{l_s^{(n)}(x_s + \eta) - l_s^{(n)}(x_s - \eta)}{2\eta} \leq 0, \text{ w. z. b. w.} \tag{1.26}$$

$|\omega_n(x)|$ selbst läßt sich wie folgt abschätzen:

$$|\omega_n(x)| \leq$$

$$\prod_{\nu=1}^{n-2s-2} \left[\frac{2}{n}\nu + (n-w)\frac{2}{n^2}\right] \cdot \prod_{\mu=1}^{s} \left\{\left[\frac{2}{n}\mu + (w+1)\frac{2}{n^2}\right] \cdot \left[\frac{2}{n}(n-2s-1+\mu) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (n-w-1)\frac{2}{n^2}\right]\right\} \cdot \left\{\left[\frac{2}{n}(n-2s-1) + (n-w-1)\frac{2}{n^2}\right]\left[\frac{2}{n^2}(w+1)\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{n^2}(n-w) \leq \frac{2^{n+1}}{n^{n+1}} \prod_{\nu=0}^{n-2s-2}\left[\nu+\frac{n-w}{n}\right] \cdot \prod_{\mu=0}^{s}\left[\mu+\frac{w+1}{n}\right] \cdot \quad (1.27)$$

$$\cdot \prod_{\lambda=1}^{s+1}\left[(n-2s-2+\lambda)+\frac{n-w}{n}\right] \leq \frac{2^{n+1}}{n^{n+1}} \frac{w+1}{n} \prod_{\nu=1}^{s}\left[\left(\nu-\frac{w}{n}\right)\left(\nu+\frac{w+1}{n}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=s+1}^{n-s}\left(\mu-\frac{w}{n}\right) < \frac{2^{n+1}}{n^{n+1}} \prod_{\nu=1}^{s} \nu\left(\nu+\frac{1}{n}\right) \prod_{\mu=s+1}^{n-s} \mu < e\,\frac{2^{n+1}}{n^{n+1}}\, s\,!\,(n-s)\,!\,,$$

da $\prod_{\nu=1}^{s}\left[\left(\nu-\frac{w}{n}\right)\left(\nu+\frac{w+1}{n}\right)\right]$ und $\prod_{\mu=s+1}^{n-s}\left(\mu-\frac{w}{n}\right)$ mit allen ihren Faktoren wachsen, falls n verkleinert, und daneben

$$\prod_{\nu=1}^{s}\left(\nu+\frac{1}{n}\right) < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{s} \prod_{\nu=1}^{s} \frac{\nu+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \prod_{\nu=1}^{s} \nu < e \cdot s\,!\,. \quad (1.28)$$

Bei der Abschätzung von

$$\left\{\sum_{k=0}^{s-1}+\sum_{k=n-s}^{n}\right\} \frac{1}{|\omega_n'(x_k)|\;|x-x_k|} \quad (1.29)$$

gebrauchen wir die — auch schon vorher benützte — Tatsache, daß dier zweite Summand sicher kleiner als der erste ist. Man berücksichtigt auch die Ungleichungen

$$\frac{1}{x-x_{s-1}} < \frac{n}{2}\,;\; \frac{1}{x-x_{s-2}} < \frac{1}{2}\,\frac{n}{2}\,; \ldots ;\; \frac{1}{x-x_{s-q}} < \frac{1}{q}\cdot\frac{n}{2}\,; \ldots \quad (1.30)$$

sonst aber ebenso verrichtend, wie früher, folgt die Ungleichung:

$$\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{|\omega_n'(x_k)|\;|x-x_k|} < \frac{n}{2}\cdot \ln(s+1)\, \frac{n^n}{2^{n-1}(s-1)!\,(n-s+1)!}\,. \quad (1.31)$$

Wir brauchen aber eine schärfere Abschätzung und dazu muß man beachten, daß

$$\binom{n}{s-2} = \binom{n}{s-1}\cdot\frac{s-1}{n-s+2} < \binom{n}{s-1}\frac{1-|x|}{1+|x|}\,; \quad (1.32)$$

$$\binom{n}{s-3} = \binom{n}{s-1}\frac{(s-1)(s-2)}{(n-s+2)(n-s+3)} < \binom{n}{s-1}\left(\frac{1-|x|}{1+|x|}\right)^{2}; \ldots \quad (1.33)$$

u. s. f.

$$\binom{n}{s-q} < \binom{n}{s-1}\left(\frac{1-|x|}{1+|x|}\right)^{q-1}; \ldots \tag{1.34}$$

also, falls $|x| \neq 0$ ist:

$$\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{|\omega'(x_k)|\,|x-x_k|} < \frac{n}{2} \frac{n^n}{2^{n-1}(s-1)!\,(n-s+1)!} \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k}\left(\frac{1-|x|}{1+|x|}\right)^{k-1} <$$

$$< \frac{n^{n+1}\cdot\left(\dfrac{1+|x|}{1-|x|}\right)}{2^n(s-1)!\,(n-s+1)!} \ln \frac{1+|x|}{2|x|} \tag{1.35}$$

und danach

$$\Lambda_n^{(\bar{a})}(x \neq 0\,;\, \delta = 0) \leq 1 + 4e\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right) \ln \frac{1+|x|}{2|x|}\,. \tag{1.36}$$

Im Falle $x = 0$ ist die Abschätzung (1.31) in Größenordnung nicht verschärfbar.

Wenn man die Schätzung der ersten bzw. zweiten Summanden von (1.29) zerlegt, kann der Hilfssatz folgende Form bekommen:

Hilfssatz 1.3. Es gelten die folgenden Abschätzungen:

a) Im Falle

$$x < 0: \quad \sum_{k;\, x_k^{(n)} \leq x} |l_k^{(n)}(x)| \leq C_1(x) \ln \frac{1+|x|}{2|x|}\,; \quad \sum_{k;\, x_k^{(n)} \geq |x|} |l_k^{(n)}(x)| = O_{|x|}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.37}$$

b) Im Falle

$$x > 0: \quad \sum_{k;\, x_k^{(n)} \leq -|x|} |l_k^{(n)}(x)| = O_{|x|}\left(\frac{1}{n}\right); \quad \sum_{k;\, x_k^{(n)} \geq x} |l_k^{(n)}(x)| = O_{|x|}(1)\,. \tag{1.38}$$

Wir beachten, daß — und es ist leicht einzusehen mit Hilfe des sogenannten Integralkriteriums — die Abschätzungen des Hilfssatzes 1.2 bzw. 1.3 in Größenordnung nicht verschärfbar sind, diejenige des Hilfssatzes 1.1 kann man doch mit einem Faktor $\frac{1}{n}$, falls $x = 0$, bzw. $\frac{1}{n^2}$, falls $x \neq 0$ verbessern, wenn man die bessere Abschätzung von $|\omega_n|$ bzw. $\Sigma \frac{1}{|\omega_n'|}$ in (1.11) berücksichtigt:

Hilfssatz 1.4. Es gilt

$$\Lambda_n^{(\ddot{a})}(0\,;\delta) = O(q^n)\,;\ q = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{\delta}{2}};\ \Lambda_n^{(\ddot{a})}(x\,;\delta) = O_{|x|}\left(\frac{1}{n}\,q_1^n\right);\ q_1 =$$
$$= \left(\frac{1-|x|}{1+|x|+\delta}\right)^{\frac{\delta}{2}}. \tag{1.39}$$

2. §. Die Lokalisationssätze bei a. L. I.

Dem Lokalisationssatz werden wir zwei verschiedene Formen geben: eine schwächere, die aber gut brauchbar und leicht überblickbar ist, und eine schärfere. Es sei also $f(x)$ eine in $[-1, 1]$ definierte und beschränkte Funktion und $g(x) \in C\,[-1, 1]$ eine andere, zu welcher geordnete a. L. I.-Folge in $[\alpha, \beta]\ c$ $[-1, 1]$ gleichmäßig nach $g(x)$ konvergiert, genauer:

$$|g(x) - L_n^{(\ddot{a})}(x\,;g)| \leq \varepsilon_n(x) \Rightarrow 0\,;\ \alpha \leq x \leq \beta, \tag{2.1}$$

und daneben

$$f(x) \equiv g(x), \qquad \text{falls} \qquad -a \leq x \leq a, \tag{2.2}$$

wo wir die zur $g(x)$ geordnete a. L. I.-Folge mit $L_n^{(\ddot{a})}(x\,;g)$ bezeichnet haben:

$$L_n^{(\ddot{a})}(x\,;g) = \sum_{k=0}^{n} g\,(x_k^{(n)})\ {}_k^{(n)}(x)\,;\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

(2.4/a) Es bezeichne weiter F bzw. G die Supremum von $|f(x)|$ bzw. $|g(x)|$ in $[-1, 1]$.

Satz 2.1. Wir benützen die obigen Bezeichnungen (unten (2.1)—(2.4/a) und — falls $[\alpha, \beta]\ c\ (-a, a)$ ist — auch die folgende:

$$\delta = \min\left\{(\alpha + a)\,;\ (a - \beta)\right\};\ q = q\,(\delta\,;|x|) = \left(\frac{1-|x|}{1+|x|+\delta}\right)^{\delta/2}. \tag{2.4}$$

Wir beweisen die folgenden positiven Tatsachen über die zur $f(x)$ geordnete a. L. I.-Folge:

a) falls $[\alpha, \beta]\ c\ (-a, a)$ ist, dann gilt in $\alpha \leq x \leq \beta$:

$$|f(x) - L_n^{(\ddot{a})}(x\,;f)| \leq \varepsilon_n(x) + (G + F)\cdot 0\left[\frac{1}{n}\cdot q^n\right]; \tag{2.5}$$

b) falls $\alpha \leq -a$, bzw. $\beta \geq a$ und die Differenz $[f(x) - g(x)]$ in $x = -a$ bzw. $x = a$ stetig ist, dann gilt noch

$$|f(-a) - L_n^{(\ddot{a})}(-a\,;f)| = 0(1) \text{ bzw. } |f(a) - L_n^{(\ddot{a})}(a\,;f)| = 0(1)\,; \tag{2.6}$$

c) fallsendlich — ohne Rücksicht auf $g(x)$ — $f(x)$ im Punkte $x = 0$ (2.7/a) eine Dini-Lipschitzsche Bedingung erfüllt, dann gilt

$$|f(0) - L_n^{(\ddot{a})}(0\,;f)| = 0(1). \tag{2.7}$$

Beweis: Die Langrangesche Interpolationsoperation ist linear, also

$$|f(x) - L_n^{(\ddot{a})}(x\,;f)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - L_n^{(\ddot{a})}(x\,;g)| + \tag{2.8}$$
$$+ |L_n^{(\ddot{a})}(x\,;f-g)|.$$

Hier ist nur die Abschätzung des dritten Summand nicht trivial: nach (2.2) gilt aber:

$$|L_n^{(\ddot{a})}(x\,;f-g)| = \Big|\sum_{k:\,|x_k^{(n)}|<|a|} [f(x_k^{(n)}) - g(x_k^{(n)})]\, l_k^{(n)}(x)\Big|, \tag{2.9}$$

also im Falle *a)*

$$|L_n^{(\ddot{a})}(x\,;f-g)| \leq (F+G)\,\Lambda_n^{(\ddot{a})}(x\,;\delta), \tag{2.10}$$

da jetzt $x \in [-a+\delta\,;\, a-\delta]$, und nach (2.4/a)

$$|f(x_k^{(n)}) - g(x_k^{(n)})| \leq F + G\,;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n\,;\; n = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

ist. In den anderen zwei Fällen müssen wir nur die Grenzpunkte berücksichtigen, denn — falls x ein innerer Punkt des in Frage kommenden Intervalles ist — man das Intervall $[-|x|\,;\,|x|]$ wie Intervall $[\alpha, \beta]$ ansehen kann. Die Fälle $\alpha \leq -a$, bzw. $\beta \geq a$ sind ja in Hinsicht des Beweises equivalent, also berücksichtigen wir den Fall, wenn $\alpha \leq -a$ und $f - g$ im Punkte $x = -a$ stetig ist. Aus dieser letzten Bedingung folgt, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\mu = \mu(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \qquad \text{falls} \qquad -a-\mu \leq x \leq -a\,, (a > 0) \tag{2.12}$$

da nach (2.2): $f(-a) - g(-a) = 0$ ist. Wir benützen daneben Hilfssatz 1.3 und 1.4

$$\left[q_1 = q_1(\mu\,;a) = \left(\frac{1-a}{1+a+\mu}\right)^{\frac{\mu}{2}}\right]:$$

$$|f(-a) - L_n^{(\ddot{a})}(-a; f)| \leq \Big\{ \sum_{\substack{k \\ -a-\mu \leq x_k^{(n)} \leq -a}} + \Big(\sum_{\substack{k \\ x_k^{(n)} \leq -a-\mu}} + \sum_{\substack{k \\ x_k^{(n)} \geq a}} \Big) \Big\} |f(x_k^{(n)}) - g(x_k^{(n)})| \cdot$$

$$\cdot |l_k^{(n)}(-a)| \leq \varepsilon \left[1 + 4e \frac{1+a}{1-a} \ln \frac{1+a}{2a}\right] +$$

$$+ (F+G)\left[O\left(\frac{1}{n} q_1^n\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \leq 12\,\varepsilon\,, \quad \text{w. z. b. w.} \tag{2.13}$$

Beim Beweis von (2.7) können wir das Resultat des Hilfssatzes 1.2 nur teilweise benützen, teilweise müssen wir aber einige Abschätzungen aus ihm weiterbauen. Wir bemerken vorerst, dass wir nur eine gerade Anzahl der Grundpunkte zu bemerken müssen, da übrigens $x = 0$ ein Grundpunkt ist. Es sei also $n = 2m - 1$. Jetzt gilt:

$$|\omega_n(0)| = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{[(2m-1)!!]^2}{(2m-1)^{2m-1}}\,; \tag{2.14}$$

$$|x_{m-s}| = \frac{2s+1}{2m-1}\,; \quad |x_{m+s}| = \frac{1+2(s-1)}{2m-1}\,; \; s \geq 0 \text{ bzw. } 1\,, \tag{2.15}$$

und nach Bedingung (2.7/a)

$$|f(x_{m\pm s}) - f(0)| = 0\left[\ln^{-1} \frac{2m-1}{2s \pm 1}\right], \text{ falls } -\varepsilon \leq x_{m\pm s} \leq \varepsilon < \frac{1}{2} \tag{2.16}$$

ist. Sodann

$$|f(0) - L_n^{(\ddot{a})}(0; f)| = \Big|\sum_{k=0}^{n} [f(x_k^{(n)}) - f(0)] \cdot l_k^{(n)}(0)\Big| \leq$$

$$\leq \Big\{ \sum_{\substack{k \\ |x_k^{(n)}| \leq \varepsilon}} + \sum_{\substack{k \\ |x_k^{(n)}| > \varepsilon}} \Big\} |f(x_k^{(n)}) - f(0)| \cdot |\omega_n(0)| \cdot \frac{1}{|\omega_n'(x_k^{(n)})| \cdot |x_k^{(n)}|}\,. \tag{2.17}$$

Bei der Abschätzung des zweiten Summanden letzter Ungleichung kann man (1.39) vom Hilfssatz 1.4 leicht benützen. Der erste Summand soll aber nach (1.34) und (2.14) so abgeschätzt werden:

$$\sum_{\substack{k \\ -\varepsilon \leq x_k^{(n)} \leq \varepsilon}} |f(x_k^{(n)}) - f(0)| \cdot |\omega_n(0)| \cdot \frac{1}{|\omega_n'(x_k^{(n)})| \cdot |x_k^{(n)}|} \leq$$

$$\leq 0(1) \cdot 2 \left\{ \sum_{s=0}^{[m/2]} \binom{2m-1}{m+s} \frac{(2m-1)^{2m-1}}{2^{2m-1}(2m-1)!} \cdot \frac{[(2m-1)!!]^2}{(2m-1)^{2m-1}}\,. \right.$$

$$\cdot \frac{1}{2m-1}\,\frac{2m-1}{2s+1}\ln^{-1}\frac{2m-1}{2s+1}+1\Big\} = 0(1) + 0(1)\,\frac{[(2m-1)!!]^2}{2^{2m-1}\cdot(2m-1)!}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_{s=0}^{[m/2]}\binom{2m-1}{m+s}\frac{1}{2s+1}\cdot\ln^{-1}\frac{2m-1}{2s+1}\,. \tag{2,18}$$

Bei der letzten Summe soll man einerseits von 0 bis $\left[m^{\frac{1+\nu}{2}}\right] - M_\nu$ (wo $0 < \nu < 1$ beliebig ist) andererseits von $\left[m^{\frac{1+\nu}{2}}\right]$ bis $\left[\frac{m}{2}\right] = M$ zu addieren. Im ersten Teil braucht man folgende Ungleichungen:

$$\ln^{-1}\frac{2m-1}{2s+1} \leq \ln^{-1}\frac{2m-1}{2\left[m^{\frac{1+\nu}{2}}\right]+1} \leq \frac{C_1(\nu)}{\ln m}; \tag{2.19}$$

$$\binom{2m-1}{m+s} \leq \binom{2m-1}{m} = \frac{(2m-1)!}{m!\,(m-1)!} \tag{2.20}$$

endlich

$$\sum_{s=0}^{M_\nu}\frac{1}{2s+1} \leq C_2(\nu)\cdot\ln m \tag{2.21}$$

wo $C_1(\nu)$; $C_2(\nu)$ u. s. f. von m unabhängige Größen bedeuten. Im zweiten Teil der Summe benützt man, daß

$$\ln^{-1}\frac{2m-1}{2s+1} \leq \ln 2\,;\quad \frac{1}{2s+1} \leq \frac{1}{M_\nu} < \frac{1}{\sqrt{m}} \tag{2.22}$$

und

$$\sum_{s=M_\nu}^{M}\binom{2m-1}{m+1} \leq \frac{(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}\sum_{s=M_\nu}^{M}\frac{1}{\left(1+\frac{s}{m}\right)^s} < \frac{(2m-1)!}{m!\,(m-1)!}\left(\frac{e}{2}\right)^{-m^\nu} \tag{2.23}$$

$$\Bigg[da: \binom{2m-1}{m+1} = \frac{(2m-1)!}{(m+1)!\,(m-2)!} = \binom{2m-1}{m}\cdot\frac{1}{\frac{m+1}{m-1}} < \binom{2m-1}{m}\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\,;$$

$$\binom{2m-1}{m+2} = \binom{2m-1}{m}\cdot\frac{(m-1)(m-2)}{(m+1)(m+2)} = \binom{2m-1}{m}\cdot\frac{1}{\frac{m+1}{m-2}\cdot\frac{m+2}{m-1}} = \binom{2m-1}{m}\cdot$$

$$\vdots \qquad \cdot\frac{1}{\left(1+\frac{3}{m-2}\right)\left(1+\frac{3}{m-1}\right)} < \binom{2m-1}{m}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{m}\right)^2}\,;\ \ldots$$

$$\binom{m-1}{m+q} = \binom{2m-1}{m} \cdot \frac{1}{\frac{m+1}{m-q} \cdot \frac{m+2}{m-(q-1)} \cdots \frac{m+q}{m-1}} < \binom{2m-1}{m} \frac{1}{\left(1+\frac{q}{m}\right)^2};$$

$$\left(1+\frac{q}{m}\right)^{-q} < \left(1+\frac{1}{m^{\frac{1-\nu}{2}}}\right)^{-m^{\frac{1+\nu}{2}}} = \left\{\left[\left(1+\frac{1}{m^{\frac{1+\nu}{2}}}\right)^{-m^{\frac{1-\nu}{2}}}\right]^{m^\nu}\right\}^{-1} < \left(\frac{e}{2}\right)^{-m^\nu},$$

falls $q \geq M_\nu]$.

Also es gilt:

$$|f(0) - L_n^{(\hat{a})}(0; f)| \leq 0(1) + 0(1) \frac{[(2m-1)!!]^2}{2^{2m-1}(2m-1)!} \cdot \frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!} \left\{\frac{C_1(\nu)}{\ln m} \cdot \right.$$

$$\left. C_2(\nu) \ln m + \frac{\ln 2}{\sqrt{m}} \left(\frac{e}{2}\right)^{-m^\nu}\right\} = 0(1), \tag{2.24}$$

und damit ist alles bewiesen, was behauptet war.

Um jetzt diesem Satze eine andere Form zu geben, brauchen wir einen weiteren Hilfssatz. Es sei wieder $f(x)$ eine in $[-1, 1]$ definierte und beschränkte Funktion, $\{P_n(x)\}$ eine sie geeignet approximierende Polynomfolge, wo der Index den Grad bezeichnet, und $A_n(x)$ eine gerade monoton wachsende Funktion von $|x|$ bei fixierten n; eine monoton fallende Funktion von n bei fixierten x, so daß

$$|f(x) - P_n(x)| \leq A_n(x) \tag{2.25}$$

für jedes n und $-1 \leq x \leq 1$ gelte.

Hilfssatz 2.2. Die obigen Bezeichnungen benützend, konvergiert nach $f(z)$ die zur $f(x)$ gehörige a. L. I.-Folge im Punkte $x = \pm z$, falls

$$A_n(x) \leq \begin{cases} 0(1) \cdot \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1-x^2}{1-z^2} \cdot \left(\dfrac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{|z|} \cdot \left(\dfrac{1+|x|}{1-|x|}\right)^{|x|}\right]^{\frac{n}{2}} \\ 0(1) \cdot x^n \left[\dfrac{1-x^2}{1-z^2}\left(\dfrac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{|z|} \left(\dfrac{1+|x|}{1-|x|}\right)^{|x|}\right]^{\frac{n}{2}}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Beweis: Wir werden wieder — ohne Beschränkung der Allgemeinheit — annehmen, daß $z \leq 0$ ist. Es sei also

$$x_s < z \leq x_{s+1}; \quad 1 \leq s+1 \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{2.27}$$

Wir brauchen einige Abschätzungen über die Größen $|l_k^{(n)}(z)|$. Für $|l_s^{(n)}(z)|$

hatten wir schon eine Abschätzung unter (1.22); wir geben auch für $|l_{s+1}^{(n)}(z)|$ eine: um das zu erreichen, werden wir $|l_{s+1}^{(n)}(z)|$ mit $|l_{s+1}^{(n)}(2x_{s+1}-z)|$ vergleichen, wo die letzte Größe nach (1.22) kleiner als 1 ist. Da z und $\zeta = 2x_{s+1} - z$ zu x_{s+1} symmetrisch liegen, sollen wir nur $|\omega_n(z)|$ und $|\omega_n(\zeta)|$ miteinander vergleichen. Diese Produkte haben aber $2(s+1)$ gleiche Faktoren. Es gilt also:

$$\frac{|\omega_n(z)|}{|\omega_n(\zeta)|} \leq \frac{\prod\limits_{\nu=2s+2}^{n} |z - x_\nu|}{\prod\limits_{\nu=2s+2}^{n} |\zeta - x_\nu|} \leq \frac{\prod\limits_{\nu=2s+2}^{n} |x_s - x_\nu|}{\prod\limits_{\nu=2s+2}^{n} |x_{s+2} - x_\nu|} = \frac{\prod\limits_{\nu=s+2}^{n-s} \nu}{\prod\limits_{\nu=s}^{n-s-2} \nu} =$$

$$= \frac{(n-s)(n-s-1)}{s(s+1)} = \frac{\left|2 - \frac{2}{n}s\right|\left[2 - \frac{2}{n}(s-1)\right]}{\frac{2}{n}s \cdot \frac{2}{n}(s+1)} < 4\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2, \tag{2.28}$$

falls schon n (und damit auch s; $z \neq \pm 1$) genug groß ist, und danach:

$$|l_{s+1}^{(n)}(z)| < 4\left|\frac{1+|z|}{1-|z|}\right|^2; \quad n \geq N_0(|z|); \quad |z| < 1. \tag{2.29}$$

Wir geben jetzt die Abschätzung von $|l_k^{(n)}(z)|$, falls $k < s$ bzw. $k \geq s+2$ ist. Nach (1.27) bzw. nach (1.7) folgt, daß

$$|l_k^{(n)}(z)| < \frac{n^n}{2^n\, k!\,(n-k)!} \cdot e \frac{2^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot s!\,(n-s)! \frac{1}{\left|\frac{2}{n}s - \frac{2}{n}k\right|} < e \frac{s!\,(n-s)!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{|s-k|} \tag{2.30}$$

ist. Da hier k und s Funktionen von n sind, werden wir diese Formel mit Hilfe der Größen z und $x = -1 + \frac{2}{n}k$ ausdrücken. Dazu benützen wir die wohlbekannte asymptotische Formel:

$$\Gamma(m+1) = m! = (m+1)^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-(m+1)} \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{\Theta}{12(m+1)}}; \quad 0 < \Theta < 1. \tag{2.31}$$

Es gilt also, daß $\left(k \leq \left[\frac{n}{2}\right];\ k \neq s;\ s+1\right)$:

$$| l_k^{(n)}(z) | < 2\,e\,\frac{(s+1)^{s+\frac{1}{2}}(n-S+1)^{n-s+\frac{1}{2}}}{(k+1)^{k+\frac{1}{2}}(n-k+1)^{n-k+\frac{1}{2}}} = 2\,e\left(\frac{s+1}{k+1}\right)^{s+\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{n-s+1}{n-k+1}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n-s+1}{k+1}\right)^{k-s} < C_3(|x|;|z|)\left[\left(\frac{\frac{2}{n}s}{\frac{2}{n}k}\right)^{\frac{2}{n}s}\right. \cdot$$

$$\left.\cdot\left(\frac{2-\frac{2}{n}s}{2-\frac{2}{n}k}\right)^{2-\frac{2}{n}k} \cdot \left(\frac{2-\frac{2}{n}s}{\frac{2}{n}k}\right)^{\frac{2}{n}k-\frac{2}{n}s}\right]^{\frac{n}{2}} 0 \leq C_4(|x|;|z|) \cdot \left[\frac{1-z^2}{1-x^2}\right. \cdot$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{|z|} \cdot \left(\frac{1-|x|}{1+|x|}\right)^{|X|}\right]^{\frac{n}{2}}. \tag{2.32}$$

Wir benützen jetzt wieder die Linearität und die Polynomrekonstruktionseigenschaft (ganz zum n-ten Grade) der Operation $L_n^{(ä)}$:

$$|f(z) - L_n^{(ä)}(z\,;f)| \leq |f(z) - P_n(z)| + |L_n^{(ä)}(z\,;f-P_n)|\,; \tag{2.33}$$

$$|L_n^{(ä)}(z\,;f-P_n)| = \left|\sum_{k=0}^{n}[f(x_k^{(n)}) - P_n(x_k^{(n)})]\,l_k^{(n)}(z)\right| \leq$$

$$\leq 2\left\{\sum_{k=0}^{s} + \sum_{s+2}^{[\frac{n}{2}]}\right\}|f(x_k^{(n)}) - P_n(x_k^{(n)})|\,|l_k^{(n)}(z)| + \sum_{k=s}^{s+1}|f(x_k^{(n)}) - P_n(x_k^{(n)})|\,|l_k^{(n)}(z)| <$$

$$< 2\cdot C_5\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} A_n(|x|)\cdot\left[\frac{1-z^2}{1-x^2}\cdot\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{|z|}\cdot\left(\frac{1-|x|}{1+|x|}\right)^{|x|}\right]^{\frac{n}{2}} + A_n(|z|)\left[1+\right.$$

$$\left.+4\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2}\right] \leq A_n(|z|)\left[1+4\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2}\right]F + \frac{n}{2}C_6\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} A_n(|x|)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1-z^2}{1-x^2}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{|z|}\left(\frac{1-|x|}{1+|x|}\right)^{|x|}\right]^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2}{n} = 0\,(1) \tag{2.34}$$

bzw.

$$\leq 0\,(1) + C_7\cdot n\int_0^1 A_n(|x|)\cdot\left[\frac{1-z^2}{1-z^2}\cdot\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{|z|}\left(\frac{1-|x|}{1+|x|}\right)^{|x|}\right]^{\frac{n}{2}}\cdot$$

$$\cdot\,dx \leq 0\,(1) + 0\,(1)\,n\int_0^1 x^n\,dx = 0\,(1) \tag{2.35}$$

w. z. b. w.

Satz 2.3. Es sei $f(x)$ eine in $[-1, 1]$ definierte und beschränkte Funktion, zu welcher man eine Polynomfolge $\{P_n(x)\}$ finden kann ($P_n(x)$ ein Polynom höchstens n-ten Grades ist), die wie folgt approximiert ($\{\varepsilon_n\} \to 0$):

$$\text{a)}\ |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon_n \frac{1}{n} \left[\frac{1-x^2}{1-z^2} \left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{|z|} \left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)^{|x|}\right]^{\frac{n}{2}}; \tag{2.36}$$

$$\text{b)}\ |f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon_n \cdot x^n \left[\frac{1-x^2}{1-z^2} \left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{|x|} \left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)^{|x|}\right]^{\frac{n}{2}}. \tag{2.37}$$

Neben diesen Bedingungen konvergiert $L_n^{(\ddot{a})}(x; f)$ zu $f(x)$ in $[-|z|; |z|]$:

$$\text{a)}\ |f(x_0) - L_n^{(\ddot{a})}(x_0; f)| \leq C_8 \cdot \frac{\varepsilon_n}{n}; \tag{2.38}$$

$$\text{b)}\ |f(x_0) - L_n^{(\ddot{a})}(x_0; f)| \leq C_9 \varepsilon_n |x_0|^n +$$

$$+\begin{cases} C_{10} \cdot \varepsilon_n \left[\dfrac{1-x_0^2}{1-z^2} \left(\dfrac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{|x|} \cdot \left(\dfrac{1+|x_0|}{1-|x_0|}\right)^{|x_0|}\right]^{\frac{n}{2}} \\ \text{bzw.} \\ C_{11} \cdot \varepsilon_n |z|^n \cdot \left[\left(\dfrac{1-|x_0|}{1+|z|}\right)^{(|z|-|x_0|)}\right]^{\frac{n}{2}} \cdot \dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{2.39}$$

falls $|x_0| < |z|$.

Dieser Satz ist eine leichte Folge des Hilfssatzes 2.2 bzw. 1.4.

Schrifttum

1. Bernstein, S. N.: Quelques remarques sur l'interpolation. Math. Annalen, 79. 1918.
2. Frey, T.: A lokálisan legjobban approximaló polinomsorozatokról. MTA Oszt. Közl. (Im Druck.)

Zusammenfassung

In dieser Arbeitet wird bewiesen, daß auch für aequidistante Lagrangesche Interpolationsfolgen ein Lokalisationssatz gültig ist, welcher aber nicht auf Punkte (d. h. nicht im Riemannschen Sinne) sondern auf Intervalle sich bezieht, und zwar auf solche Intervalle, die das Zentrum des Interpolationsintervalles als Halbierungspunkt besitzen.

T. Frey, Budapest, Budafoki-út 4—6. Ungarn.