PERIODICA POLYTECHNICA SER. TRANSPORTATION ENG. VOL. 20, NO. 1, PP. 41–66 (1992)

VORRATSMODELLE FÜR DIE KOSTENOPTIMIERUNG UND ZUVERLÄSSIGKEITSBESTIMMUNG IN DER VERTEILUNGS- UND VERSORGUNGSLOGISTIK

J. PREZENSZKI und J. TOKODI

Lehrstuhl für Verkehrsbetrieb
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am: 6. März 1990.

Abstract

Set Models for Cost Optimising and Reliability in Supply- and Distributions Logistics

The storing process is an important element of supply- and distributions logistics, in particular for the optimising and synchronising of sets. The set control strategies of logistic systems are based on set models of different strategies.

This study shows some cost-minimalising and reliability models, and a model which applies the so-called minimax theory. This model is joined with an optimal set control strategy in the case, when the average and the deviation of the demand are known.

Keywords: cost optimising, logistics, storing process.

1. Die Rolle der Verteilungs- und Versorgungslogistik in den Unternehmen

Die Auslegung der Verteilungs- und Versorgungslogistik

Die Logistik schafft die Übereinstimmung aller Voraussetzungen, die für die Erreichung und dauerhafte Durchführung von im gegebenen Bewirtschaftungssystem vorkommenden Zielsetzungen notwendig sind. Unter diesen ist die Lösung folgender Zielsetzungsgruppen von besonderer Bedeutung:

- Aktivitäten auf dem Gebiet der Versorgung (Einkauf, Transport, Abnahme, Einlagerung, usw.) und der internen Handhabung zur Verfügungstellung (Lagerung, interner Transport, usw.) von materiellen Gütern, die zur Funktion des Unternehmens notwendig sind;
- Aktivitäten auf dem Gebiet der Vorbereitung (Expedition, Verpackung, usw.) Verteilung, Auslieferung für die Bedarfsträger;
- Erfüllung der Planungs-, Analyse-, Koordinations-, Informations- und Verwaltungsaufgaben, die mit der Durchführung und Abstimmung der aufgeführten Aktivitäten verknüpft sind.

Die Besonderheit der Planung logistischer Vorgänge ist, daß sie alle Elemente der Aufgabenerfüllung vom Hersteller bis zum Konsumenten vereinigt. Davon kann abgeleitet werden die Gesamtkostenfunktion, die nach irgendeinem Parameter (oder nach mehreren) optimiert werden kann.

Das Verhältnis zwischen der Logistik und der Lagerung

Das Bestimmungselement des Verhältnisses zwischen Hersteller und Konsument ist das Verteilungslager, das mit seinen Einrichtungen und Ausrüstungen die Regulierung des Ablaufsystems nach dem Bedarf sicherstellt.

Das Lager kann die Regulierungsrolle nur erfüllen, wenn sein möglicher Durchsatz mit der Analyse der Input–Output Faktoren und die Einlagerungskapazität unter der Berücksichtigung der optimalen Bestandsgrösse geplant werden. Bei größerem Durchsatz bzw. größerer Einlagerungskapazität als notwendig erhöhen sich durch die Höhe der gebundenen Mittel und Anlagen die Kosten, bei zu niedrigen Werten kann es dagegen zu Störungen im Verteilungsvorgang kommen.

Eine Komponente zur Beschreibung des Systems sind die konstanten und veränderlichen Lagerungskosten. Auf Grund des Prinzips der Superposition ist es möglich, daß wir das Lager als Regulierungsfaktor des Ablaufs eines logistischen Vorgangs herausheben und unter Beachtung der Systemparameter allein optimieren.

Regelung der Bestände im logistischen Ablauf

Die Zielsetzung der Bestandsregelung ist die Befriedigung des Material-, Halbfertigprodukt-, und Produktbedarfs laut Bedarfsstruktur des gegebenen logistischen Systems sowie die optimale Bestimmung und dynamische Nivellierung der Bestände.

Diese Zielsetzung kann nur mit abgestimmten Material-, und Informationssystemen erreicht werden. Die Aufgabe des Materialsystems ist die Realisierung der Bestandhaltung als materieller Ablauf — bei Auftreten des Bedarfs die Verminderung, bei Eintreffen des Nachschubs die Auffüllung des Bestandes. Die Aufgabe des Regulierungssystems besteht in der Realisierung des Bestandshaltungsstrategie, des Empfangs, der Aufarbeitung und Übertragung von Informationen aus der Umwelt, sowie der materiellen Vorgänge.

Für die strukturellen Untersuchung des Bestandshaltungssystems kann sowohl der materielle als auch der Regulierungsvorgang auf Teilvorgänge aufgeteilt werden. Im materiellen System muß mit den

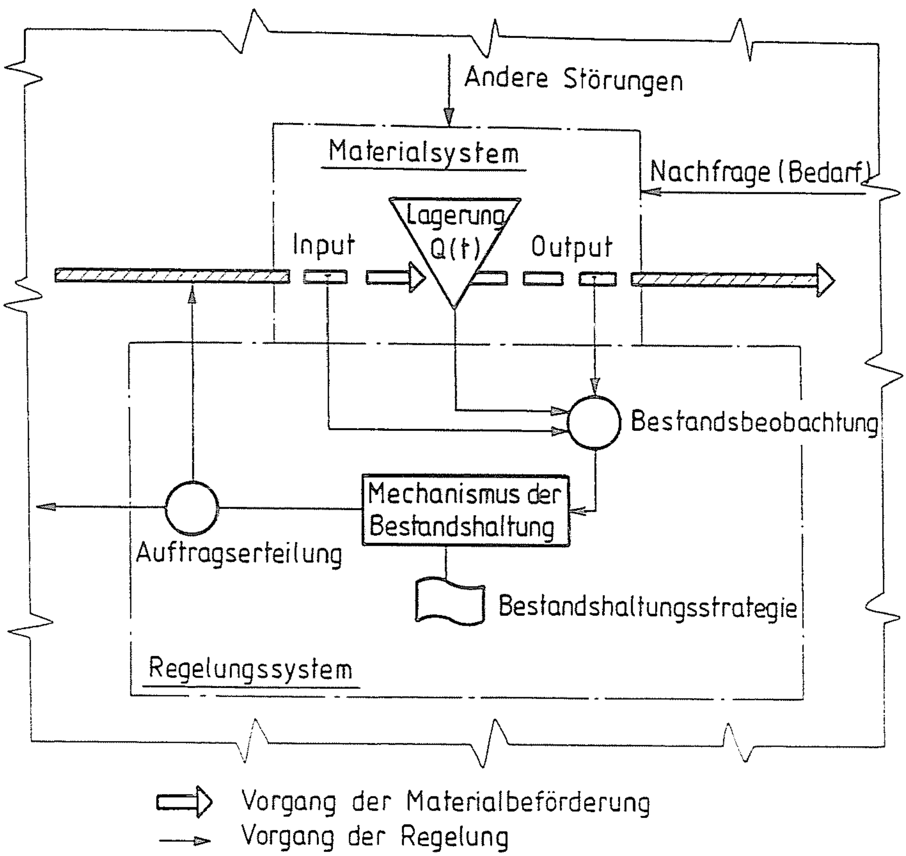

Fig. 1. Struktur des Bestandshaltungssystems

Teilabläufen input (Anlieferung), Bestandhaltung (Lagerung) und output (Auslieferung) gerechnet werden.

Im Regulierungssystem erfolgt die Auftragserteilung unter Beachtung der Bestandsentwicklung (Bestandsbeobachtung) und des Zustandes des Bestandhaltungsmechanismus sowie der Bestandhaltungsstrategie (*Abb. 1.*).

Das Bestandhaltungssystem setzt bei Vorliegen einer Nachfrage das materielle System in Bewegung. Die Bestandsänderung, die durch die Bewegung hervorgerufen wird, erfaßt der Regelungskreis den Bestand mit der in der Bestandsstrategie vorgeschriebenen Norm vergleichet, und wenn es notwendig ist steuernd eingreift.

Um ein optimales Funktionieren des Bestandhaltungsmechanismus und eine dynamische Nivellierung der Bestände zu erreichen müssen in das Regelungssystem solche Bestandhaltungsstrategien eingeschlossen werden, die die Merkmale der Input–Output Vorgänge berücksichtigen.

Die Bestandshaltungsstrategien werden allgemein auf solche Kostenminimierungs- oder Zuverlässigkeitsmodelle aufgebaut, die für die Bestimmung der optimalen Auftragshöhe und für die optimalen Bestände gleichermaßen geeignet sind.

Bei entsprechend sorgfältige Planung kann der Bestandhaltungsmechanismus mit der Bestandhaltungsstrategie zur Festlegung der Höhe der zu lagernden Bestände genützt werden.

Im weiteren werden wir einige Modelle vorstellen, die für die Planung und für die Steuerung anwendbar sind. Ausschließend führen wir die Anwendungsmöglichkeit des Prinzips Minimax für einen solchen Fall vor, wenn nur der wahrscheinliche Wert und die Streuung des stochastischen Vorganges bekannt sind.

2. Überblick über bekannte Kostenminimierungs- oder Zuverlässigkeitsmodelle

2.1 Bestimmung der optimalen Positionsgrösse beim deterministischen Vorgangsmodell

Wenn Bestandsmangel nicht zugelassen werden kann, sind die Gesamtkosten der Lagerhaltung (K) die Summe der Lagerungskosten (K_1) und der Bestellungskosten (K_2):

$$K = K_1 + K_2 \quad \text{Ft.} \tag{1}$$

Lagerungskosten:

$$K_1 = k_r \cdot \frac{q}{2} \cdot T \quad \text{Ft},$$

mit

k_r – spezifische Lagerungskosten (z. B. $\frac{\text{Ft}}{\text{Stück, Tag}}$);

q – Auftragspositionsgröße (z. B. Stück);

T – Untersuchungsperiode (z. B. in Tagen ausgedrückt); Bestellungskosten:

$$K_2 = \frac{B}{q} \cdot k_t \quad \text{Ft},$$

mit

B – der Bedarf der Untersuchungsperiode (z. B. Stück);

k_t – Bestellungskosten pro Posten (z. B. Forint);

Die obigen Formeln K_1 und K_2 in Gleichung (1) eingesetzt und nach q differenziert, liefern die optimale Bestellungspositionsgröße bei minimalen Kosten:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot k_t}{k_r \cdot T}}.$$

Die optimalen Gesamtkosten ergeben sich als

$$K_0 = \sqrt{2 \cdot B \cdot T \cdot k_r \cdot k_t}.$$

Wenn Bestandsmangel zugelassen werden kann, müssen wir von ähnlicher Datenstruktur ausgehen wie beim Modell (1), jedoch werden die Gesamtkosten K mit einem neuen Element erweitert:

$$K = K_1 + K_2 + K_3, \tag{2}$$

wo bei K_3 die Mangelkosten darstellen.

Da der Bedarf innerhalb der Zeitdauer t_2 nicht befriedigt werden kann, wird der effektiv lagernde Bestand auf $q'(< q)$ vermindert. Die Kostenkomponenten sind:

$$K_1 = \frac{q'}{2} \cdot k_r \cdot t_1 \cdot n;$$
$$K_2 = k_t \cdot n;$$
$$K_3 = \frac{q - q'}{2} \cdot k_f \cdot t_2 \cdot n,$$

mit

n – Anzahl der gelieferten Positionen im Untersuchungszeitraum

t_1 – Zeitraum, in welchem der Bedarf befriedigt werden kann (in Tagen);

k_f – spezifische Kosten des Mangels (z. B. $\frac{\text{Ft}}{\text{Stück, Tag}}$). (In K_3 ist die Grösse $\frac{q-q'}{2}$ der Durchschnittsmangel.)

Die Grössen $K_{1,2,3}$ werden in (2) eingesetzt und unter Beachtung der proportionalen Zusammenhänge

$$t_1 = t \cdot \frac{q'}{q} \quad \text{und} \quad t_2 = t \cdot \frac{q - q'}{q}$$

muß jetzt die Aufgabe

$$K = K(q, q') \to \underset{q,q'}{\text{Min!}} \quad \text{gelöst werden.}$$

Aus der partiellen Ableitung erhält man

$$q' = q \cdot \frac{k_f + k_r}{k} = q \cdot \varrho,$$

und

$$q' = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot k_r}{k_r \cdot T}} \cdot \sqrt{\frac{k_f + k_r}{k_f}} = q_0 \cdot \sqrt{\varrho},$$

worin ϱ die Rate des Mangels oder Ausfalls ist. Die weiteren Kenngrößen sind

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot k_t \cdot T}{k_r \cdot B}} \cdot \sqrt{\varrho} \quad \text{und} \quad K_0 = \sqrt{2 \cdot B \cdot T \cdot k_r \cdot k_t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varrho}}.$$

2.2 Bestimmung der optimalen Postengrösse bei deterministischen Input sowie bei normaler Verteilung des Bedarfs und der Nachschubszeit

In diesem Modell wird angenommen, daß der auf eine Zeiteinheit bezogene Bedarf eine Normalverteilung aufweist und ein Muster mit dem Element m des spezifischen Bedarfs bekannt ist. Dann gilt:

$$\overline{B} = \frac{\sum_{i=1}^{m} B_i}{m},$$

und

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (B_i - \overline{B})^2}{m - 1}}.$$

Der meldepflichtige Bestand (Q_j) wird aus dem Bedarf $(\overline{B} \cdot t_p)$ während der Wiederbeschaffungszeit (t_p) und der Streuung des Bedarfs (u, σ) zusammengesetzt:

$$Q_j = \overline{B} \cdot t_p + u \cdot \sigma.$$

In diesem Zusammenhang ist u ein Sicherheitsfaktor, der die Lieferbereitschaft des Lagers beachtet. Bei normaler Verteilung des Bedarfs kann der Wert $u - s$ aus einer Tabelle entnommen werden, die zusammengehörenden Werte von u und $\Phi(u)$ enthält (desto höhere Lieferbereitschaft vorgeschrieben wird, umso höher wird der Wert von u).

Wenn die Wiederbeschaffungszeit (t_p) auch normalverteilt ist mit dem voraussichtlichen Wert $\bar{t}_p$, und der Streuung σ_{tp}, dann wird der meldepflichtige Bestand (Q_j) mit dem Glied $u \cdot \overline{B}_{\sigma_{tp}}$ erweitert, welches die Änderungen der Nachschubszeit ausgleicht. Dann gilt

$$Q_j = \overline{B} \cdot \bar{t}_p + u(\sigma + \overline{B} \cdot \sigma_{tp}),$$

und für den Sicherheitsbestand:

$$Q_b = u(\sigma + \overline{B} \cdot \sigma_{tp}).$$

Der durchschnittliche Lagerbestand ist

$$Q_a = \frac{1}{2} q_0 + u(\sigma + \overline{B} \cdot \sigma_{tp}),$$

und der maximale Lagerbestand:

$$Q_{max} = q_0 + Q_b.$$

2.3 Modell zur Bestimmung des Anfangsbestands beim Eintreffen von Posten gleicher Größe zu zufälligen Zeitpunkten

Bei den folgenden Zuverlässigkeits-Bestandsmodellen liefern die Algorithmen eine Schätzung des Optimums von Anfangsbeständen aus. Die weiteren Merkmale (optimale Auftragspostenhöhe, optimaler Zeitabstand der Bestellungen, der Maximalbestand, usw. können mit der weiteren Anwendung der Modelle unter 2.2 oder durch Simulationsverfahren mit dem Computer bestimmt werden.

Im sog. PRÉKOPA—ZIERMANN Modell [5,6] ist die Nachfrage (Auslieferung) deterministisch. Die Anlieferungen dagegen werden in den Zeitintervallen $(0, T)$ in zu n mit gleicher Verteilung realisiert. Die Anlieferungstermine können mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu beliebigen Zeitpunkten im $(0, T)$ Zeitintervall auftreten. Durch die zufälligen Anlieferungen muss eine (Anfangs-) Sicherheitsreserve Q_k gebildet werden. Das Ziel besteht in der Bestimmung des Optimums des minimalen Anfangsbestand unter der Voraussetzung, daß der Mangel mit einer Wahrscheinlichkeit ε zugelassen werden darf.

Betrachten wir $F_n(t)$ als die bis zum Termin t ins Lager gelieferte Gesamtwarenmenge. Mangel kann ausgeschlossen werden, wenn

$$Q_k = F_n(t) \geq C \cdot t,$$

worin C der konstante Bedarf je Zeiteinheit ist (z. B. $\frac{\text{Stück}}{\text{Tag}}$) (Also sinngemäss: $C \cdot T = B$).

Daraus kann das auf Q_k bezogene Wahrscheinlichkeitskriterium ausgedrückt werden:

$$P\{\inf_{0 \leq t \leq T}(F_n(t) - C \cdot t) \geq Q_k\} = 1 - \varepsilon. \tag{3}$$

Die Lösung der Zuverlässigkeitsgleichung nach Q_k ergibt den optimalen Anfangsbestand. Dazu muss die folgende Gleichung nach Y auf gelöst werden

$$\varepsilon = Y \cdot \sum_{i=0}^{n(1-Y)} \binom{n}{i} (1 - Y - \frac{i}{n})^{n-i} (Y + \frac{i}{n})^{i-1}, \tag{4}$$

mit

$$Y = \frac{Q_k}{B}.$$

Davon $Q_k = Y \cdot B$.

Die Gleichung (4) kann explizit nicht nach Y auf gelöst werden, sondern nur mit numerischen Methoden, durch Iterationsverfahren. Als Anfangslösung kann von der Gleichung

$$Y_0 = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

ausgegangen werden.

Auf Grund des Modells haben wir für die Bestimmung des optimalen Anfangsbestands ein Rechnerprogramm für IBM kompatible Maschinen erstellt.

2.4 Modell zur Bestimmung des Anfangsbestands beim Eintreffen von Posten zufälliger Größe zu zufälligen Zeitpunkten

Das Modell beschreibt den Zusammenhang zwischen deterministischer Auslieferung und gleichverteilter Anlieferung von n Posten im Intervall $(0, T)$. Die Posten der Anlieferung werden wie folgt beschrieben:

– q_d die kleinste auf einmal gelieferte Menge:

$$0 \leq q_d \leq \frac{B}{n},$$

– die restliche $B - n \cdot q_d$ Menge wird unter den n Lieferungsterminen so verteilt, daß das $B - n \cdot q_d$ lange Intervall zufällig auf $n - 1$ Strecken erteilt wird, und zwar mit gleichmäßiger Verteilung.

Die Aufgabe besteht jetzt in der Bestimmung des Anfangbestands (Q_k) als Sicherheitsreserve mit der Voraussetzung, daß der Bedarf mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon$ gedeckt werden kann.

Wenn

$$\tau_1^* < \tau_2^* < \cdots < \tau_{n-1}^*,$$

bzw.

$$t_1^* < t_2^* < \cdots < t_{n-1}^*$$

geordnete Muster des Intervalls $(0, T)$ sind, die unabhängig sind, und

$$\lambda = n \cdot q_d, \qquad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

dann ist die verallgemeinerte empirische Verteilungsfunktion der Anlieferung:

$$F_n(t, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq t \leq t_1^*, \\ \lambda \cdot \dfrac{k}{n} + (1 - \lambda) \cdot \tau_k^*, & \text{wenn } t_k^* < t \leq t_{k+1}^*, \\ 1, & \text{wenn } t_n^* < t \leq T. \end{cases}$$

Die bedingte Grenzwertaufgabe bestimmende Beziehung:

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} (ct - F_n(t, \lambda)) \leq Q_k\} \geq 1 - \varepsilon. \tag{5}$$

Der Anfangsbestand kann am Rand = der $\geq$ Voraussetzung ermittelt werden.

Die exakte Lösung der Zuverlässigkeitsgleichung ist ziemlich kompliziert. Für eine näherungsweise Lösung von (5) können wir die Beziehung

$$Q_k \approx B \cdot \sqrt{1 + (1 + \lambda)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2n} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

empfehlen.

Auf Grund des Modells erstellten wir ein Computerprogramm für IBM kompatible Maschinen, das für die Bestimmung des optimalen Anfangsbestandes geeignet ist.

2.5 Modell zur Bestimmung des Anfangsbestandes beim zufälligen Eintreffen von Posten

Dieses Modell ist ein Spezialfall des in 2.4 beschriebenen, wenn von der unteren Grenze der Lieferung keine Informationen zur Verfügung stehen, d. h.: $\lambda=0$.

Die Intervallen der Liefermengen $(0, B)$ können durch gleichmässige Aufteilung auf Teile $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ aufgeteilt werden. Die bis zum Termin t gelieferte Menge ist

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i, \quad \text{wenn} \quad t_k \le t < t_{k+1}$$

gilt.

Die Aufgabe besteht auch jetzt in der Bestimmung des minimalen Q_k Anfangsbestandes so, daß der Bedarf mit der Wahrscheinlichkeit $1-\varepsilon$ befriedigt werden kann.

Die empirische Verteilungsfunktion des stochastischen Vorgangs der Anlieferung lautet:

$$F_n(t,0) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \le t \le t_1^*, \\ \tau_k^*, & \text{wenn } t_k^* < t \le t_{k+1}^*, \\ 1, & \text{wenn } t_n^* < t \le T. \end{cases}$$

Für die Zuverlässigkeitsgleichung gilt

$$P\{\sup_{0\le t\le T}(C\cdot t - F_n(t,0)) \le Q_k\} = 1-\varepsilon.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist mit der Lösung der Gleichung

$$(1-\frac{Q_k}{B})^n(1+\frac{Q_k}{B})^{n-1} = \varepsilon \tag{6}$$

äquivalent. Für grosse $(n > 10)$ n Werte gibt die Gleichung

$$Q_k = B\sqrt{1-\sqrt[n]{\varepsilon(1+Y_0)}},$$

eine gute Annäherung, worin

$$Y_0 = \sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

2.6 Modell zur Bestimmung des Anfangsbestandes bei zufälliger An- und Auslieferung

Zur Verallgemeinerung des Modells PRÉKOPA [5] wird die im Intervall $(0, t)$ bestellte Gesamtmenge mit $\xi(t)$, die angelieferte Gesamtmenge mit $\eta(t)$ bezeichnet. Am Anfang der Periode $(0, T)$ steht der Anfangsbestand Q_k zur Verfügung. Die notwendige Menge wird in n Posten geliefert, wobei gilt:

1. Die Lieferungen werden zu unabhängigen und gleichmäßig verteilten Terminen n realisiert.

2. q_d ist die kleinste bei einer Gelegenheit bestimmt gelieferte Menge $(0 \leq q_d \leq \frac{B}{n})$. Das übriggebliebene $B - n \cdot q_n$ Intervall wird auf $(n-1)$ gleich aufgeteilte zufällige Mengen verteilt, die zu q_d addiert die Anlieferungsgrößen der Posten erhalten.

3. In der Auslieferung bedeutet q_d die minimale, bei einer Gelegenheit bestimmt gelieferte Menge $(0 \leq q_g \leq \frac{B}{m})$.

Nehmen wir an, daß die Bestellmenge mit der Summe der Anlieferungen gleich ist. Die Nachfrage der Größe $B - mq_g$ (m ist die Anzahl der Auslieferungen) wird zufällig mit gleichmässiger Verteilung zwischen den Bedarfsterminen aufgeteilt.

Ziel ist die Bestimmung des gesicherten Anfangsbestandes Q_k so, daß bei den obigen Voraussetzungen die Nachfrage mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon$ befriedigt werden kann.

Die Zuverlässigkeitsgleichung lautet für diesen Fall

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} \{\xi(t) - \eta(t)\} \leq Q_k\} \geq 1 - \varepsilon,$$

woraus Q_k aus

$$P\{\sup_{0 \leq t \leq T} \{\xi(t) - \eta(t)\} \leq Q_k\} = 1 - \varepsilon$$

erhalten wird. Die Gleichung kann nur mit numerischen Methoden gelöst werden. Eine annähernde Lösung ist:

$$Q_k \approx B \cdot \sqrt{\frac{1 + (1-\lambda)^2}{n} + \frac{1 + (1-\mu)^2}{m}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon}},$$

mit

$$\lambda = \frac{q_d}{\overline{q}_b} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{q_g}{\overline{q}_k},$$

$\overline{q}_b$ der Durchschnitt der Anlieferung,
$\overline{q}_k$ der Durchschnitt der Auslieferung ist.

Auf der Grundlage dieses Modells haben wir für IBM kompatible Maschinen ein Rechnerprogramm für Optimierung entwickelt.

3. Anwendung des Prinzips Minimax für die Bestimmung der optimalen Bestandsgröße

3.1 Aufbau des Kostenmodells

Wir untersuchen im weiteren die folgende An- und Auslieferungsstruktur hinsichtlich der Optimierung. Nehmen wir an, daß das Lager zu Beginn der Periode (T) die Menge (Q_k) bestellt, und Q_k am Anfang der Periode (T) zur Verfügung steht. Nachbestellung ist nicht zugelassen; die nach der Periode übrig gebliebene Waren können überhaupt nicht oder nur mit Verlust verkauft werden (z. B. im Fall von Warenhäusern). Unser Ziel ist die Bestimmung von Q_k so, daß die auftretenden Kosten und Verluste minimal bleiben. Von den beschriebenen ausgehend, können wir die Gesamtkosten aus drei Teilen zusammensetzen.

1. Lagerungskosten. Die Lagerungskosten sind mit der am Anfang der Periode bestellten Menge Q_k proportional, der Proportionalitätsfaktor ist $c(\frac{\mathrm{Ft}}{\mathrm{St}})(c > 0)$.

2. Bestandsmangelkosten. In unserem Modell sind die Mangelkosten:

$$k_1 = k_f \cdot N_1,$$

mit
k_1 – spezifische Kosten des Mangels (S. Punkt 2.1);
N_1 – die Größe des Mangels (z. B. Stück).

3. Kosten der Überbestände. Die Kosten der übrig gebliebenen, nur für gedrückten Preis, oder überhaupt nicht verkaufbaren Bestände sind k_2.

Bezeichnen wir die Größe der Nachfrage für die Ware mit ξ. Die Kostenfunktion lautet:

$$K(Q_k) = \begin{cases} cQ_k + k_1, & \text{wenn } \xi > Q_k, \\ cQ_k, & \text{wenn } \xi = Q_k, \\ cQ_k + k_2, & \text{wenn } \xi < X. \end{cases} \tag{7}$$

Nehmen wir weiter an, daß $k_1 > k_2$ gilt.

Wenn die Häufigkeitsfunktion der Wahrscheinlichkeitsveränderlichen ξ durch $f(y)$ bezeichnet wird, dann besteht definitionsmässig wie folgt:

$$P\{\xi < Q_k\} = \int_{-\infty}^{Q_k} f(y)dy.$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit $G(Q_k) = P(\xi > X)$ mit G/Q_k bezeichnet wird, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Nachfrage in der Zukunft den Anfangsbestand übertrifft, dann gilt

$$G(Q_k) = \int_{Q_k}^{+\infty} f(y)dy.$$

Bilden wir jetzt die durchschnittliche Kostenfunktion $\overline{K}(Q_k)$! In der Definitionsgleichung $K(Q_k)$ (7) steht in allen drei Fällen die Grundgröße cQ_k, die Kosten des Bestandsmangels k_1, die Wahrscheinlichkeit derselben $G(Q_k) = P(\xi > Q_k)$, die Kosten der Überbestände k_2, Wahrscheinlichkeit $P(\xi \leq Q_k) = 1 - G(Q_k)$. Deshalb ist die Funktion der Durchschnittskosten:

$$\overline{K}(Q_k) = c \cdot Q_k + k_1 G(Q_k) + k_2[1 - G(Q_k)].$$

Nehmen wir an, daß $k_3 = k_1 - k_2$! In diesem Fall erhalten wir nach Auflösen der Klammer und durch Reduktion

$$\overline{K}(Q_k) = cQ_k + k_3 G(Q_k) + k_2.$$

Die Zielfunktion lautet

$$\overline{K}(Q_k) \to \underset{Q_k}{\text{Min!}}$$

Die Bedeutung der Grenzwerte ändert sich nicht, wenn wir anstatt $\overline{K}(Q_k)$ irgendeine lineare Kombination derselben minimalisieren. Multiplizieren wir also $\overline{K}(Q_k)$ mit $\frac{1}{C}$, und subtrahieren dann aus dem Resultat den Wert $\frac{k_2}{c}$. Dann gestaltet sich Zielfunktion wie folgt

$$Q_k + \frac{k_3}{c} G(Q_k) \to \underset{Q_k}{\text{Min!}}$$

Nehmen wir an, daß $\frac{k_3}{c} = r$. Weiter bezeichnen wir $z(Q_k) = \frac{1}{c}\overline{K}(Q_k) - \frac{k_2}{c}$; Es kann dann folgende Beziehung geschrieben werden:

$$z(Q_k) = Q_k + r \cdot G(Q_k) \qquad (r > 0) \to \underset{Q_k}{\text{Min!}}$$

Im Interesse der Berechnung des Grenzwertes lautet die umgekehrte Beziehung:

$$\overline{K}(Q_k) = c \cdot z(Q_k) + k_2.$$

Als Beispiel untersuchen wir den Fall, wenn $f(y)$ durch die Poisson–Verteilung mit dem Parameter λ beschrieben wird:

$$f(Y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & \text{wenn } Y > 0, \\ 0, & \text{wenn } Y \leq 0. \end{cases}$$

In diesem Fall wird $G(Q_k) = e^{-\lambda Q_k}$ also die Durchschnittskosten:

$$\overline{K}(Q_k) = cQ_k + k_3 e^{-\lambda x} + k_2$$

und

$$z(Q_k) = Q_k + r \cdot e^{-\lambda x}.$$

3.2 Kostenoptimierung bei bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage

Bei bekannter Verteilung ist so $G(Q_k)$ als auch $z(Q_k)$ gegeben. In diesem Fall kann das Minimum mit herkömmlichen Methoden durch Differenzierung festgestellt werden:

$$z'(Q_k) = 1 + r \cdot G'(Q_k) = 1 - r - f(Q_k),$$

doch

$$G'(Q_k) = -f(Q_k).$$

Somit muss die Gleichung $1 - r \cdot f(Q_k) = 0$ gelöst werden:

$$f(Q_k) = \frac{1}{r}. \tag{8}$$

Da $f(Q_k)$ eine Häufigkeitsfunktion ist, hat (8) nur dann keine Lösung, wenn $f(Q_k) < \frac{1}{r}$ für jedes Q_k. In diesem Fall ist $Q_{kmin} = 0$, da $z(Q_k)$ die monoton zunehmende Funktion von (Q_k) die Verteilungsfunktion $(G(Q_k))$ ist. Wenn (8) irgendeine Lösung hat, dann muss die zweite Derivierte untersucht werden:

$$z''(Q_{kmin}) > 0.$$

Es folgt

$$z''(Q_{kmin}) = -r \cdot f'(Q_k),$$

unter der Voraussetzung

$$f'(Q_{kmin}) < 0 \quad \text{ergibt sich} \quad (r > 0).$$

Im Fall der als Beispiel gewählten Poisson–Verteilung gestaltet sich die Gleichung (8) wie folgt:

$$\lambda e^{-\lambda Q_k} = \frac{1}{r}.$$

Auf Q_k geordnet:

$$e^{-\lambda Q_k} = \frac{1}{\lambda r}$$

und

$$Q_k = \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda \cdot r),$$

bzw.

$$Q_k = \ln[(\lambda \cdot r)^{1/\lambda}]. \tag{9}$$

Wenn wir beachten, daß sinngemäß $Q_k > 0$, dann muß

$$(\lambda \cdot r)^{1/\lambda} > 1$$

erfüllt werden. Davon ist $\lambda_r > 1$. Also gibt es im Fall der Poisson–Verteilung für (8) dann, und nur dann eine Lösung, wenn $\lambda_r > 1$ und in diesem Fall wird die Lösung durch (9) gegeben, da

$$\overline{K}(Q_{kmin}) = c \cdot \ln[(\lambda r)^{1/\lambda}] + k_3 \frac{1}{\lambda r} + k_2.$$

3.3 Kostenoptimierung, wenn der voraussichtliche Wert und die Streuung der Nachfrage bekannt sind

In diesem Fall sind von den Aufteilungsmerkmalen der Nachfrage für die untersuchte Ware der voraussichtliche Wert (μ) und die Streuung (σ) bekannt, der Verteilungstyp nicht. (Die Häufigkeitsfunktion kann durch beide Parameter allgemein nicht bestimmt werden.)

Bezeichnen wir die unbekannte Verteilungsfunktion mit $F(Q_k)$. Auf Grund der Definition des voraussichtlichen Wertes, und der Streuung, als Momente der ersten und zweiten Ordnung gilt:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

und

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) - \mu^2,$$

bzw. mit der Häufigkeitsfunktion:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2.$$

Nehmen wir drei häufig vorkommende Aufteilungen als Beispiel, deren voraussichtliche Werte μ und die Streuung σ sind!

a) **Gleichverteilung** auf dem Intervall $\mu - \sigma \cdot \sqrt{3} \geq 0$ in unserem Fall $(\mu - \sigma \cdot \sqrt{3}, \mu + \sigma\sqrt{3})$

b) **Gamma-Verteilung**, mit folgenden Parametern:

$$\lambda = \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad a = \frac{\mu^2}{\sigma^2}.$$

Häufigkeitsfunktion:

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{a-1}}{\Gamma(a)} \qquad (x \geq 0).$$

c) **Normale Verteilung**, mit folgender Häufigkeitsfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Nehmen wir an, daß $U(\mu, \sigma)$ die Menge der Verteilungen ist, deren voraussichtlicher Wert μ und die Streuung σ sind. In der untersuchten Periode ist unbekannt, mit welcher Verteilung die Schwankung der Nachfrage beschrieben werden kann. Erst am den der Periode ist der Verteilungstyp bestimmbar. Deswegen beziehen wir das *Prinzip Minimax* in unsere Untersuchungen. Für eine Bestandsschwankung können wir den Grundsatz dieses Prinzips wie folgt zusammenfassen:

Da für uns unbekannt ist, welches Element von $U(\mu, \sigma)$ die effektive Verteilung beschreibt, sind wir bestrebt zu sichern, daß die Größe Q_{kmin} auch im ungünstigsten Fall so gewählt wird, daß ein minimaler Verlust auftritt (6).

Auf Grund des bereits Beschriebenen kann der Verlust (die Kosten) durch die Größe $z(Q_k)$ charakterisiert werden. Nehmen wir an, daß die unbekannte Verteilungsfunktion $G_\xi(Q_k)$ und die Verteilungsfunktion $z_\xi(Q_k)$ bekannt sind. Dann gilt

$$Z_\xi(Q_k) = Q_k + r \cdot G_\xi(Q_k),$$
$$(G_\xi(Q_k) \varepsilon U(u, \sigma)).$$

Bei gegebenen Q_k ist der ungünstigste Fall der folgende:

$$M(Q_k) = \sup z_\xi(Q_k),$$
$$G_\xi(Q_k) \varepsilon U(\mu, \sigma).$$

Laut dem Grundsatz Minimax kann der die kleinsten Kosten verursachende Anfangsbestand mit der folgenden Beziehung bestimmt werden:

$$M(Q_{kmin}) = \min_{Q_k \geq 0} M(Q_k). \tag{10}$$

Das ist die Grundgleichung der Optimierung bei bekanntem voraussichtlichen Wert und Streuung, wenn die beiden Kenngrößen gegeben sind:

$$E(\xi) = \mu$$

und

$$D^2(\xi) = \sigma^2.$$

Unsere Strategie wird im Folgenden beschrieben. Für jede Warenmenge Q_k werden die dazu gehörenden Kosten für den ungünstigsten Fall ermittelt, also für den Fall, bei dem ξ eine solche Aufteilung hat, daß

$$z_\xi(Q_k) = Q_k + r \cdot G_\xi(Q_k)$$

maximal sein wird. Danach kann die Warenmenge Q_k als optimal betrachtet werden, die beim ungünstigsten ξ die niedrigsten Kosten auslöst.

Die Lösung ist also dasjenige Q_k^* für welches laut (10) folgendes gültig ist

$$M(Q_k^*) = \min_{Q_k \geq 0} M(Q_k).$$

Nehmen wir an, daß gilt

$$H(Q_k) = \sup\{G_\xi(Q_k); \xi \geq 0, E(\xi) = u_1 D^2(\xi)\} = \sigma^2.$$

Da

$$z_\xi(Q_k) = Q_k + r \cdot G_\xi(Q_k) \quad \text{und} \quad r > 0,$$

deshalb

$$\sup z_\xi(Q_k) = \sup_\xi (Q_k + r \cdot G_\xi(Q_k)) = Q_k + r \cdot \sup_\xi G_\xi(Q_k),$$

d. h. es genügt das Supremum $G_\xi(Q_k)$ zu bestimmen.

Das Nächste Lemma kann bei der Feststellung des Werts von $H(Q_k)$ behilflich sein.

LEMMA 1.

$$H(Q_k) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } 0 \leq Q_k \leq \mu, \\ \dfrac{\mu}{Q_k}, & \text{wenn } u \leq Q_k \leq \dfrac{\alpha^2}{\mu}, \\ \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + (Q_k - \mu)^2}, & \text{wenn } \dfrac{\alpha^2}{\mu} \leq Q_k, \end{cases}$$

wo

$$\alpha^2 = \mu^2 + \sigma^2. \tag{6}$$

Wir erhalten

$$\min_{Q_k \geq 0} M(Q_k) = \min\{\min_{0 \leq Q_k \leq \mu} (Q_k + r), \min_{\mu \leq Q_k \leq \frac{\alpha^2}{\mu}} (Q_k + r\frac{\mu}{Q_k}),$$
$$\min_{\cdot}(Q_k + \frac{r\sigma^2}{\sigma^2 + (Q_k - \mu)^2})\}.$$

Im nächsten Lemma müssen die Größen in den Verbindungsklammern bestimmt werden [6]:

LEMMA 2.

a)

$$\min_{0 \leq Q_k \leq \mu} (Q_k + r) = r, \quad Q_{kmin} = 0.$$

b)

$$\min_{\mu \leq Q_k \leq \frac{\alpha^2}{\mu}} (Q_k + r \cdot \frac{\mu}{Q_k}) = \begin{cases} \mu + r, & \text{wenn } r \leq \mu, Q_{kmin} = \mu; \\ 2\sqrt{r\mu}, & \text{wenn } \dfrac{d^4}{\mu^3} \geq r \geq \mu; \\ \dfrac{\alpha^2}{\mu} + r\dfrac{\mu^2}{r^2}, & \text{wenn } r \geq \dfrac{\alpha^4}{\mu^3}; Q_{kmin} = \dfrac{\alpha^2}{\mu}. \end{cases}$$

c)

$$\min_{\frac{\alpha^2}{\mu} \leq Q_k} (Q_k + \frac{r\sigma^2}{\sigma^2 + (Q_k - \mu)}) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{\mu} + r \cdot \dfrac{\mu^2}{\alpha^2} = g(\dfrac{\alpha^2}{\mu}), & \text{wenn } Q_{ko} \text{ nicht existiert, oder} \\ & \text{wenn } Q_{ko} \leq \dfrac{\alpha^2}{\mu} \text{ oder} \\ & \text{wenn } g(\dfrac{\alpha^2}{\mu}) < g(Q_{ko}); \quad Q_{kmin} = \dfrac{\alpha^2}{\mu} \\ g(Q_{ko}), & \text{wenn } Q_{ko} \text{ existiert, und} \\ & \quad Q_{ko} > \dfrac{\alpha^2}{\mu}; \quad Q_{kmin} = Q_{ko} \\ & \quad (Q_{ko} z_\xi(Q_k) \text{ relative} \\ & \quad \text{Minimumstelle hat} \\ & \quad (G'(Q_k) = g(Q_k)) \end{cases}$$

Lemma 3.

Es existiert Q_{ko} und $Q_{ko} > \dfrac{\alpha^2}{\mu}$, dann, und nur dann, wenn gilt

$$r > \frac{\alpha^4}{2\mu^3}(r \geq \mu).$$

In diesem Fall wird auch $g(Q_{ko}) < g(\dfrac{\alpha^2}{\mu})$ erfüllt.

Der nächste Schritt ist die Bestimmung des gemeinsamen Minimums $M(Q_k)$. Nach den Parametern r, sowie μ und α und ihrem Verhältnis zu einander können wir mehrere Fälle unterscheiden.

Fall 1. $r \leq u$. Dann ist $M(Q_k) > Q_k$, und wenn $Q_k > \mu$ dann ist $M(Q_k) > \mu \geq r$. So wird nach Punkt a/ des Lemmas 2. $\min M(Q_k) = r$, und $Q_{kmin} = 0$. Im Fall 2. und 3. $r \geq \mu$ nach Punkt c/ des Lemmas 2. muss die Voraussetzung $Q_{ko} > \frac{\alpha^2}{\mu}$ untersucht werden. Dazu leistet Lemma 3. Hilfe.

Fall 2. $u \leq r \leq \frac{\alpha^4}{2\mu^3}$. In diesem Fall ergibt sich das Minimum von $M(Q_k)$ aus den b/ und c/ Teil des Lemmas 2. Wenn $\mu \leq r < \frac{\alpha^4}{\mu^3}$, dann ist die Minimumstelle nach Punkt b/ des Lemmas 2. $2\sqrt{r\mu}$.

Fall 2a. $2\sqrt{\mu r} \geq r$. In diesem Fall muss nach Punkt a/ des Lemmas 2, die Voraussetzung $r \leq 4$ existieren, dann ist der Minimumwert r, und $Q_{kmin} = 0$.

Fall 2b. Wenn $r \geq 4\mu$, dann ergibt nach Punkt b/ des Lemmas 2. das Minimum von $M(Q_k)$ $\min M(Q_k) = 2\sqrt{r\mu}$ und $Q_{kmin} = \sqrt{r\mu}$.

Fall 3. $r \geq u$, und $r \geq \frac{\alpha^4}{2\mu^3}$. Dann existiert nach Lemma 3. Q_{ko} und $Q_{ko}\frac{\alpha^2}{\mu}$. Also vergleichen wir $g(Q_{ko})$ mit dem Minimum der Punkte a/ und b/ des Lemmas 2.

Fall 3a. $r \leq 4\mu$. Laut Fall 2a ist im Intervall $0 \leq Q_k \leq \frac{\alpha^2}{\mu}$ das Minimum von $M(Q_k)$ mit r gleich. Also $\min M(Q_k) = \min(r, g(Q_{ko}))$.

Fall 3b. $4\mu \leq r \leq \frac{\alpha^4}{\mu^3}$. Jetzt gibt von $g(Q_{ko})$ und $2\sqrt{r\mu}$ der kleinere Wert das Minimum von $M(Q_k)$, da im Intervall $\mu \leq Q_k \leq \frac{\alpha^2}{\mu}2\sqrt{r\mu} < r$ und im Intervall $0 \leq Q_k \leq \frac{\alpha^2}{\mu}$ auch $2\sqrt{r\mu} < r$.

Fall 3c. $4\mu \leq r$, $\frac{\alpha^4}{\mu^3} \leq r$. Dann ist nach Punkt b/ des Lemmas 2. die absolute Minimumstelle der Funktion $Q_k + r\frac{\mu}{Q_k}$ größer als $\frac{\alpha^2}{\mu}$, und der Minimalwert ist kleiner als r. Es kann auch leicht verstanden werden, daß $Q_k + r\frac{\mu}{Q_k} > g(Q_k)$, wenn $Q_k > \frac{\alpha^2}{\mu}$, so daß $g(Q_{ko}) < r$. Somit gilt $\min M(Q_k) = g(Q_{ko})$ und $Q_{kmin} = Q_{ko}$.

Mit diesen haben wir das Minimum von $M(Q_k)$ für jeden Fall bestimmt. (Zusammenfassend s. *Tabelle 1*).

3.4 Der logische Ablauf bei der Problemlösung

Der Ablauf der Lösung von der Aufgabe kann prinzipiell auf Grund der Beziehungen in *Tabelle 1* aufgebaut werden. Für die Größe des Anfangsbestands kommen eigentlich drei mögliche Minimumstellen in Frage:

1. 0;
2. Q_{ko} und
3. $\sqrt{r\mu}$.

Wir können zahlen die optimalen mitleren Kosten als dreimal:

1. k_1,
2. $2\sqrt{ck_3\mu} + k_2$ und
3. $cQ_{ko} + \frac{k_3\sigma^2}{\sigma^2+(Q_{ko}-\mu)^2} + k_2$.

Gleichzeitig spielen in der Mehrzahl der Fälle nur zwei Parameter die Rolle:

$$a = \frac{\mu}{r} \quad \text{und} \quad b = \frac{\sigma}{r}.$$

Mit den Relationen zwischen a und b können alle Fälle beschrieben werden.

Im Laufe der Lösung müssen die Lagerungskosten, die Mangelkosten und die Kosten der Überbestände angegeben werden. Die Parameter der statistischen Verteilung μ und σ werden als Konstanten eingeführt oder aus Beobachtungen bestimmt.

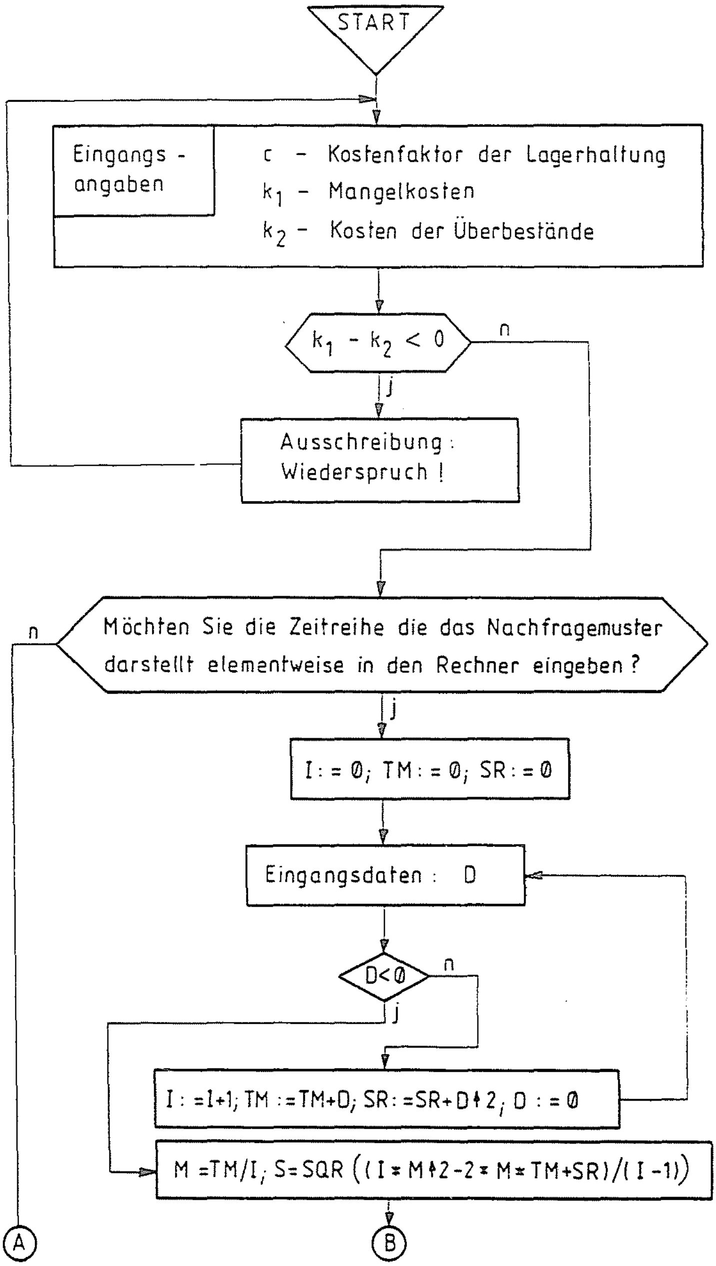

Fig. 2a. Der logische Vorgang der Bestimmung des optimalen Anfangsbestandes bei Kenntnis des voraussichtlichen Wertes, und der Streuung der Nachfrage

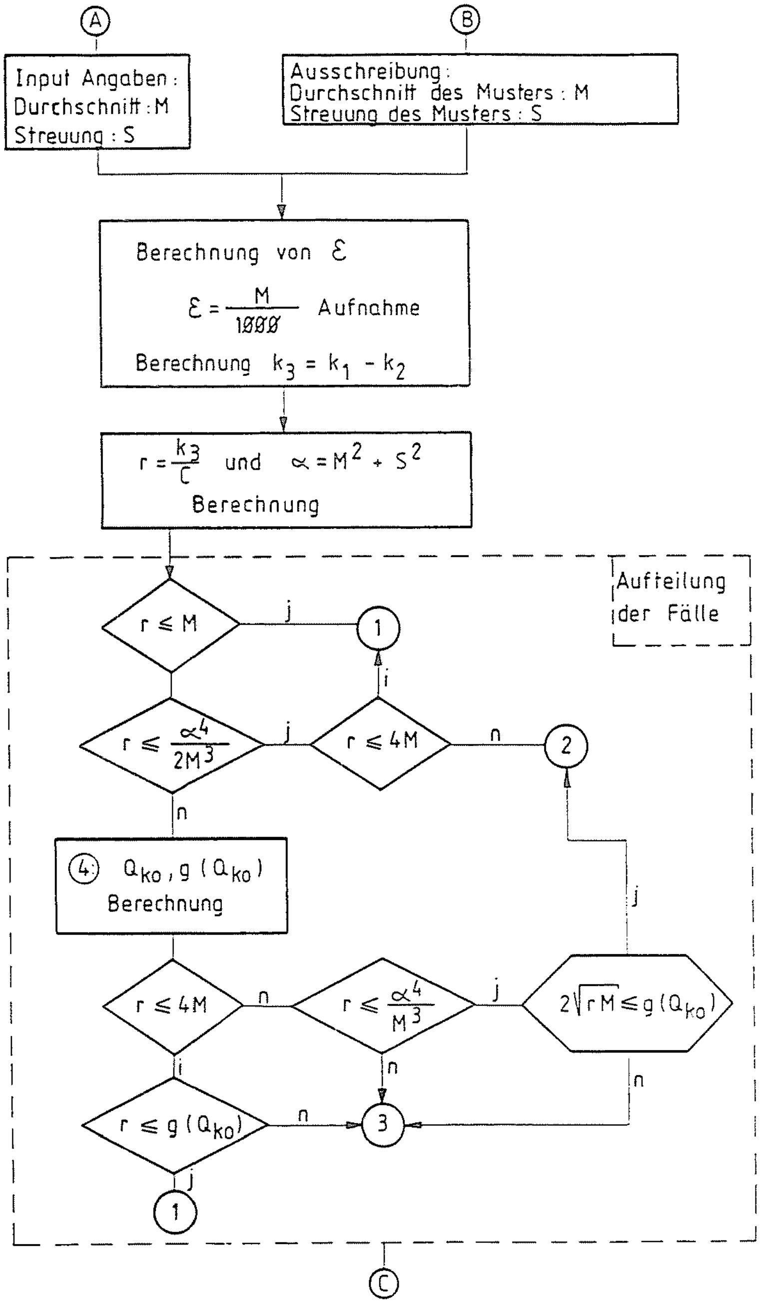
A
B
Input Angaben:
Durchschnitt: M
Streuung: S
Ausschreibung:
Durchschnitt des Musters: M
Streuung des Musters: S
Berechnung von ε
ε = M / 1000 Aufnahme
Berechnung k3 = k1 - k2
r = k3 / C und α = M2 + S2
Berechnung
Aufteilung der Fälle
r ≤ M
j
1
r ≤ α4 / 2M3
r ≤ 4M
n
2
n
4
Qko, g (Qko)
Berechnung
j
r ≤ 4M
n
r ≤ α4 / M3
j
2√rM ≤ g (Qko)
n
n
r ≤ g (Qko)
n
3
j
1
C

Fig. 2b.

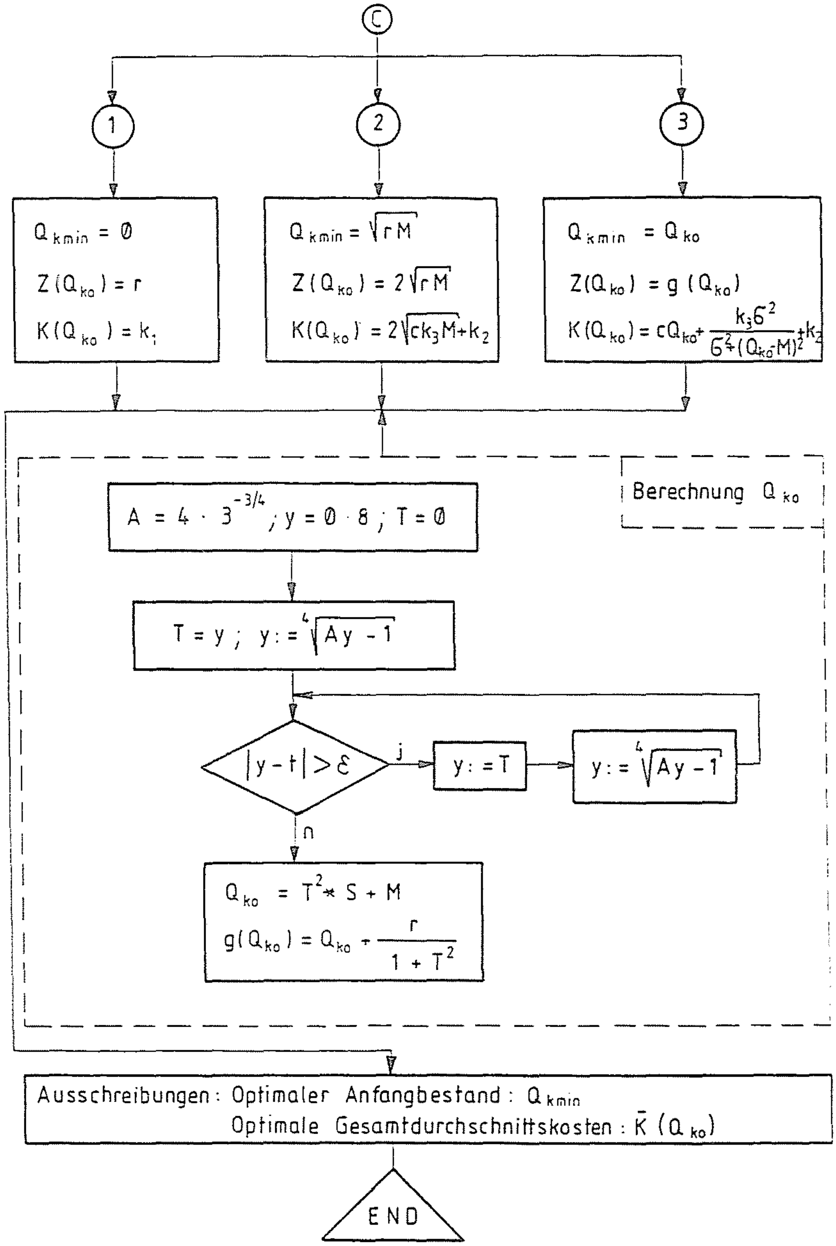
C
1
2
3
$Q_{kmin} = 0$
$Z(Q_{ko}) = r$
$K(Q_{ko}) = k_1$
$Q_{kmin} = \sqrt{rM}$
$Z(Q_{ko}) = 2\sqrt{rM}$
$K(Q_{ko}) = 2\sqrt{ck_3M} + k_2$
$Q_{kmin} = Q_{ko}$
$Z(Q_{ko}) = g(Q_{ko})$
$K(Q_{ko}) = cQ_{ko} + \frac{k_3\sigma^2}{\sigma^2 + (Q_{ko} - M)^2} + k_2$
Berechnung Q_{ko}
$A = 4 \cdot 3^{-3/4}; y = 0 \cdot 8; T = 0$
$T = y; \; y := \sqrt[4]{Ay - 1}$
$|y - t| > \varepsilon$
j
$y := T$
$y := \sqrt[4]{Ay - 1}$
n
$Q_{ko} = T^2 * S + M$
$g(Q_{ko}) = Q_{ko} + \frac{r}{1 + T^2}$
Ausschreibungen: Optimaler Anfangbestand: Q_{kmin}
Optimale Gesamtdurchschnittskosten: $\bar{K}(Q_{ko})$
END

Fig. 2c.

Danach folgt die Berechnung der Merkmale a und b, dann die Aufteilung der Fälle, der Tabelle entsprechend. Zuletzt müßen die optimale Anfangspostengröße und die optimalen Gesamtkosten berechnet werden.

Im Interesse der Unterstützung der praktischen Anwendung der Lösung haben wir ein Computerprogramm erstellt, dessen Ablaufplan in *Abb. 2* dargestellt wurde.

Das Programm wurde in BASIC geschrieben, für Rechner C 64. Das Laden des Programms geschieht durch Befehl

LOAD'MINIMAX',8 $\boxed{\text{RETURN}}$

danach kann durch Befehl RUN $\boxed{\text{RETURN}}$ gestartet werden. Nach der Ausschreibung des Titels können die Angaben c, k_1, k_2 gerufen werden. Danach kann gewählt werden: wenn wir die Taste 'I' drücken, muss das gesamte statistische Muster in die Maschine eingegeben werden, und zum Schluß geben wir 1 an. Der Durchschnitt und die Streuung werden aus dem Muster durch den Rechner berechnet. Wenn wir bei der Wahl die Taste 'N' drücken, dann muß direkt der Durchschnitt und die Streuung des Musters eingetragen werden.

Nach der Dateneingabe erledigt das Programm die Auswahl der Fälle nach dem Blockdiagramm der *Abb. 2*. Auf Grund dieser Auswahl werden der optimale Anfangsbestand mit Q_{kmin}, und die optimalen Gesamtkosten mit $(K(Q_{kmin}))$ gleich sein.

In der *Tabelle 2* haben wir einige charakteristische Rechnerergebnisse zusammengefaßt.

4. Zusammenfassung

Im ersten Teil unserer Studie haben wir Bestandsmodelle behandelt, die in der Praxis auf Grund von einfachen Erwägungen eingesetzt werden können. Ein Teil dieser Modelle ist auch für die Handhabung der stochastischen Input–Output Abläufe geeignet. Bei der Herleitung des Optimums ist die Wahrscheinlichkeit der Befriedigung des Bedarfs berücksichtigt worden, also auch die Zuverlässigkeit des Lagerungssystems (das Risiko).

In der Praxis kommen auch solche Fälle vor, wo die Struktur des Bedarfs am Anfang der gegebenen Periode noch unbekannt oder auf Grund der früheren Erfahrungen veränderlich ist. Deshalb kann vom Bedarf nur behauptet werden, daß er stochastisch ist, aber sein Verteilungstyp kann nicht angegeben werden. Nur der Durchschnitt und die Streuung können auf Grund der vergangenen Aktivitäten als bekannt betrachtet werden.

In unserer Studie haben wir einen solchen Bestandshaltungsvorgang untersucht, bei dem die Anlieferung deterministisch ist, in einem Posten durchgeführt wurde, und die Auslieferungsperiode verhältnismäßig lang ist.

Durch Anwendung einer speziellen Form der Csebisev–Ungleichheit und der Strategie Minimax wurde ausgehend von gegebenen Risikofaktoren ein Modell aufgebaut, welches den optimalen Anfangsbestand und die optimalen Durchschnittsgesamtkosten bestimmt.

Tabelle 1
Überblick und Zusammenfassung der Beziehungen, die für die Bestimmung der einzelnen Merkmale geeignet sind.

Fall	Voraussetzung	Q_{kmin}	$M(Q_{kmin})$	$K(Q_{kmin})$
1.	$r \leq \mu$	0	r	k_1
2.	$\mu \leq r \leq \frac{\alpha^4}{2\mu^3}$			
2a	$r \leq 4\mu$	0	r	k_1
2b	$r > 4\mu$	$\sqrt{r\mu}$	$2\sqrt{r\mu}$	$2\sqrt{ck_3\mu} + k_2$
3.	$\mu \leq r$ und $\frac{\alpha^4}{2\mu^3} \leq r$			
3a	$\mu \leq r \leq 4\mu$			
3a	$r \leq g(Q_{ko})$	0	r	k_1
3a	$r \geq g(Q_{ko})$	Q_{ko}	$g(Q_{ko})$	$cQ_{ko} + \frac{k_3\sigma^2}{\sigma^2+(Q_{ko}-\mu)^2} + k_2$
3b	$4\mu \leq r \leq \frac{\alpha^4}{\mu^3}$			
3b	$2\sqrt{r\mu} \leq g(Q_{ko})$	$\sqrt{r\mu}$	$2\sqrt{r\mu}$	$2\sqrt{ck_3\mu} + k_2$
3b	$2\sqrt{r\mu} \geq g(Q_{ko})$	Q_{ko}	$g(Q_{ko})$	$cQ_{ko} + \frac{k_3\sigma^2}{\sigma^2+(Q_{ko}-\mu)^2} + k_2$
3c	$4\mu \leq r$ und $\frac{\alpha^4}{\mu^3} \leq r$	Q_{ko}	$g(Q_{ko})$	$cQ_{ko} + \frac{k_3\sigma^2}{\sigma^2+(Q_{ko}-\mu)^2} + k_2$

Tabelle 2
Anfangsangaben und Gesamtresultate bei Anwendung des Minimax Grundsatzes

Laufende Nummer	$C[\frac{\text{Ft}}{\text{Stück}}]$	k_1[Ft]	k_2[Ft]	μ(M)	σ(s)	Q_{kmin}	$\overline{K}(Q_{kmin})$
1	3.5	100000	50000	10000	200	0	100000
2	3.5	100000	20000	1500	100	5855.4	60987.8
3	5	1000	50	200	30	0	1000
4	5	1000	50	30	5	75.5	805.0
5	2	50000	10000	5000	1000	0	50000
6	2	50000	10000	1000	250	4472.1	27888.5
7	4	5000	1000	100	20	316.2	3529.8

References

1. CHIKÁN, A.: Készletezési modellek (Vorratsmodelle) Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1983.
2. PREZENSZKI, J.: Raktározástechnika (Lagerungstechnik), Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
3. PREZENSZKI, J. — UGRAY, L.: Készletezési modellek (Vorratsmodelle). TU Budapest, Lehrstuhl für Verkehrsbetrieb, Forschungsbericht, 1985.
4. PREZENSZKI, J. — UGRAY, L.: Megbízhatósági készletmodellek (Vorratsmodelle für die Zuverlässigkeitsbestimmung). TU Budapest, Lehrstuhl für Verkehrsbetrieb, Forschungsbericht, 1985.
5. PRÉKOPA, A. — KELLE, P.: Sztochasztikus programozáson alapuló megbízhatósági jellegü készletmodellek (Vorratsmodelle vom Charakter der Zuverlässigkeit auf Grunde der stochastischen Programmierung) *Alkalmazott Matematikai Lapok* 2/117b/ S. 1-16.
6. ZIERMANN, M.: A Szmirnov tétel alkalmazása egy raktározási problémára (Anwendung des Smirnov-Lehrsatzes an einem Lagerungsproblem). MTA Közlemények, 8/1963. Box..N4.

Addresses:

Dr. József PREZENSZKI
Lehrstuhl für Verkehrsbetrieb
Technische Universität
H–1521 Budapest, Ungarn

Dr. Jenö TOKODI
Lehrstuhl für Verkehrsbetrieb
Technische Universität
H–1521 Budapest, Ungarn