

# ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ С УЧЕТОМ ЗАТУХАНИЯ

Л. В. Занг

Кафедра Механики Будапештского политехнического университета, Н-1521

Поступило 30 июля 1987 г.

Представлено: проф. др. П. Михелбергер

## Abstract

The paper deals with the method of investigation for dynamical stability of internal combustion engine taking the damping process into consideration. The limits of intervals of dynamical stability are also presented.

## 1. Расчетная модель

Известно, что расчет колебаний коленчатых валов сводят обычно к расчету прямолинейного вала с некоторой приведенной жесткостью и рядом сосредоточенных дисков (по числу цилиндров и маховиков), (рис. 1) [3]:

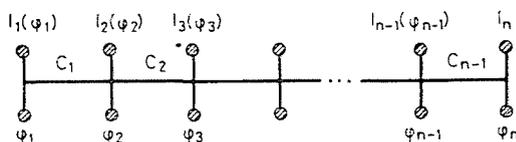


Рис. 1

Момент инерции массы каждого диска выбирается таким образом, чтобы его кинетическая энергия была равна кинетической энергии вращающихся частей, шатуна и поршня, которые этот диск заменяет. Так, если длина шатуна  $l$  велика по сравнению с длиной кривошипа  $r$ , то общая кинетическая энергия, относящаяся к  $i$ -тому кривошипу,

$$T_i = \frac{1}{2} I_{oi}(\dot{\varphi}_i)^2 + \frac{1}{2} m(r\dot{\varphi}_i \sin \varphi_i)^2,$$

где  $\varphi_i$  — угол поворота  $i$ -того кривошипа,  
 $I_{oi}$  — момент инерции вращающихся частей,  
 $m$  — масса шатуна и поршня.

Отсюда приведенный момент инерции:

$$I_i(\varphi_i) = \left( I_{oi} + \frac{1}{2} mr^2 \right) - \frac{1}{2} mr^2 \cos 2\varphi_i \quad (1)$$

и, следовательно, при установившемся вращении (приближенно  $\varphi_i \cong \theta t$ ) инерционный коэффициент будет периодической функцией времени [1], [3].

На рис. 1 обозначаем:

- $I_i(\varphi_i)$  — момент инерции, вычисляемый по формуле (1),  
 $I_n$  = const — момент инерции маховика,  
 $\varphi_i$  — угол поворота  $i$ -того кривошипа,  
 $C_i$  — жесткость вала на участке между  $i$ -тым и  $i + 1$ -м дисками.

## 2. Уравнение движения

Кинетическая энергия приведенной системы на рис. 1:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i(\varphi_i) (\dot{\varphi}_i)^2, \quad (2)$$

и её потенциальная энергия:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} C_i (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 \quad (3)$$

Составляя уравнение Лагранжа: [2]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_k} (T - U) = M_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

получим систему уравнений:

$$I_i(\ddot{\varphi}_i) \varphi_i + \frac{1}{2} \frac{dI_i(\varphi_i)}{d\varphi_i} (\dot{\varphi}_i)^2 - C_{i-1}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) = M_i, \quad (5)$$

$(i = 1, 2, \dots, n; C_0 = C_n = 0)$

где  $M_i(\varphi_i)$  — внешний момент, действующий на  $i$ -тый кривошип. В случае двухтактного двигателя момент  $M_i(\varphi_i)$  имеет период  $\frac{2\pi}{\theta}$ , в случае четырехтактного —  $\frac{4\pi}{\theta}$ .

Пренебрегая нелинейным членом и допустим, что силы сопротивления пропорциональны скорости движения, вводя в дифференциальное уравнение дополнительный член с первой производной от перемещения по времени. Поэтому система уравнения движения при колебаниях будет иметь такой вид:

$$I_i(\varphi_i) \ddot{\varphi}_i + \xi_i \dot{\varphi}_i - C_{i-1}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + C_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) = M_i, \quad (6)$$

$(i = 1, 2, \dots, n; C_0 = C_n = 0)$

где  $\xi_i \dot{\varphi}_i$  — момент силы сопротивления, и  $\xi_i$  — коэффициент затухания для каждого кривошипа будет определяться из опыта и часто принимается одинаково для всех кривошипов: [3],

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = \xi$$

и допустим, что

$$\frac{\xi_1}{I_1} = \frac{\xi_2}{I_2} = \dots = \frac{\xi_{n-1}}{I_{n-1}} = 2\varepsilon \tag{7}$$

Введем новые переменные

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \Phi_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \Phi_{n-1} &= \varphi_{n-1} - \varphi_n \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

После подстановки (8) в (6) с учетом (7), и после упрощений получим следующее матричное уравнение [1], [6]:

$$\ddot{\Phi} + 2\varepsilon\dot{\Phi} + A(t)\Phi = B(t) \cdot M(t), \tag{9}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon \end{bmatrix}; \quad M(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) \end{bmatrix}; \\ B(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & -\frac{1}{I_3} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{I_{n-1}} \end{bmatrix}; \\ A(t) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}; \end{aligned} \right\} \tag{10}$$



и учитывая, что  $e^{-\varepsilon t}$  — неособенная матрица (все  $e^{-\varepsilon_k t} > 0$ ), приходим к уравнению:

$$\ddot{u} + [A(t) - \varepsilon^2 E]u = 0, \quad (18)$$

Здесь  $E$  — единичная матрица.

Решения уравнения (18) имеют вид: [1], [4], [6],

$$u_k = \chi_k(t) e^{\frac{t}{T} \ln \varrho_k} \quad (19)$$

где  $\varrho_k$  — корни характеристического уравнения,

$\chi_k(t)$  — векторы, компоненты которых являются периодическими функциями времени с периодом  $T$ .

По (15) и (19), возвращаясь к уравнению (12), представим его решения в виде:

$$\Phi_k = \chi_k(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln \varrho_k - \varepsilon t\right) \quad (20)$$

или, отделив вещественную часть  $\ln \varrho_k$ ,

$$\Phi_k = \psi_k(t) \exp\left(\frac{t}{T} \ln |\varrho_k| - \varepsilon t\right) \quad (21)$$

Здесь  $\psi_k(t)$  — векторы, компоненты которых являются ограниченными (почти периодическими) функциями:

$$\psi_k(t) = \chi_k(t) e^{i \frac{t}{T} \arg \varrho_k}$$

Из (21) легко видеть, что поведение решений уравнения (12) зависит от соотношения между коэффициентом затухания  $\varepsilon$  и вещественной частью  $\ln \varrho_k$ : [1], [6]

а) Если характеристические числа  $\varrho_k$  — комплексно сопряженные, тогда  $(\varrho_k) = 1$ ,  $\ln(\varrho_k) = 0$ , то решения уравнения (12) затухают со скоростью затухания свободных колебаний

$$\Phi_k = \psi_k(t) e^{-\varepsilon t}$$

б) Рассмотрим случай вещественных корней, причём для определенности положим:  $(\varrho_k) > 1$ , то здесь могут представиться два случая. Если

$$\varepsilon > \frac{\ln |\varrho_k|}{T},$$

то решение будет ограниченным, если же

$$\varepsilon < \frac{\ln |\varrho_k|}{T}$$

то решение, а следовательно, и общий интеграл будут неограниченно возрастать со временем.

в) Рассмотрим граничный случай

$$\varepsilon = \frac{\ln |\varrho_k|}{T},$$

решение уравнения (12) будет в этом случае периодическим: а именно при  $\varrho_k > 0$  будет иметь место период  $T$ , а при  $\varrho_k < 0$  — период  $2T$ . Итак, отыскание областей неустойчивости для уравнения (12) сводится к определению условий, при которых оно имеет периодические решения. С периодами  $T$  и  $2T$ , причём и здесь два решения одинакового периода ограничивают область возрастающих решений, два решения разных периодов — область затухающих решений.

#### 4. Вывод уравнения критических частот с учетом затухания

Матрица  $A(t)$  записывается в виде: [6]

$$A(t) = \frac{\omega^2}{1 - 2\mu \cos 2\theta t} D \quad (22)$$

где  $D$  — матрица порядка  $n - 1$ ,

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{C_1}{I_{01} + \frac{1}{2}mr^2} \\ \mu &= \frac{mr^2}{2[2I_{01} + mr^2]} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Здесь  $I_{01}$  — момент инерции вращающихся частей первого кривошипа,  
 $m$  — масса шатуна и поршня.

Из (22), уравнение (12) имеет вид:

$$\ddot{\Phi} + 2\varepsilon\dot{\Phi} + \frac{\omega^2}{1 - 2\mu \cos 2\theta t} D\Phi = 0, \quad (24)$$

Допустим, что момент инерции маховика достаточно велик, чтобы положить  $I_n \gg mr^2$ , что моменты инерции вращающихся частей кривошипов одинаковые, т. е.  $I_{01} = I_{02} = \dots = I_{0n-1}$ : В этом случае можно считать элементы матрицы  $D$  постоянными элементами.

Отыскиваем решение уравнения (24) с периодом  $2T$  в виде ряда Фурье:

$$\Phi = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_k \sin k\theta t + b_k \cos k\theta t) \quad (25)$$

где  $\Phi$  является вектором с компонентами  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$  и  $a_k, b_k$  — векторы.

При подстановке (25) в уравнение (24) получим две системы матричных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 D - \Theta^2 E - \mu \Theta^2 E) a_1 + 9\mu \Theta^2 E a_3 - 2(\mu + 1) \Theta \varepsilon b_1 + 6\mu \Theta \varepsilon b_3 &= 0; \\ (\omega^2 D - k^2 \Theta^2 E) a_k + \mu \Theta^2 E [(k-2)^2 a_{k-2} + (k+2)^2 a_{k+2}] - \\ - 2k \Theta \varepsilon b_k + 2\mu \Theta \varepsilon [(k-2) b_{k-2} + (k+2) b_{k+2}] &= 0; \\ (k = 3, 5, 7, \dots) \\ (\omega^2 D - \Theta^2 E + \mu \Theta^2 E) b_1 + 9\mu \Theta^2 E b_3 - 2(\mu - 1) \Theta \varepsilon a_1 - 6\mu \Theta \varepsilon a_3 &= 0; \\ (\omega^2 D - k^2 \Theta^2 E) b_k + \mu \Theta^2 E [(k-2)^2 b_{k-2} + (k+2)^2 b_{k+2}] + \\ + 2k \Theta \varepsilon a_k - 2\mu \Theta \varepsilon [(k-2) a_{k-2} + (k+2) a_{k+2}] &= 0; \\ (k = 3, 5, 7, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Если эти две системы должны иметь решения, отличающиеся от нуля, то их детерминанты должны равняться нулю. Таким образом, получим уравнение критических частот:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 D - 9\Theta^2 E & \mu \Theta^2 E & 2\mu \Theta \varepsilon & -6\Theta \varepsilon \\ 9\mu \Theta^2 E & \omega^2 D - \Theta^2 E - \mu \Theta^2 E & -2(\mu + 1) \Theta \varepsilon & 6\mu \Theta \varepsilon \\ -6\mu \Theta \varepsilon & -2(\mu - 1) \Theta \varepsilon & \omega^2 D - \Theta^2 E + \mu \Theta^2 E & 9\mu \Theta^2 E \\ 6\Theta \varepsilon & -2\mu \Theta \varepsilon & \mu \Theta^2 E & \omega^2 D - 9\Theta^2 E \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

Подобным образом будем отыскивать решение с периодом  $T$  в форме ряда Фурье:

$$\Phi = b_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} (a_k \sin k\Theta t + b_k \cos k\Theta t) \quad (28)$$

Если подставим выражение (28) в уравнение (24), то аналогично предыдущему случаю, получим детерминанты:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 D - 16\Theta^2 E & 4\mu \Theta^2 E & 0 & 4\mu \varepsilon \Theta & -8\Theta \varepsilon \\ 16\mu \Theta E & \omega^2 D - 4\Theta^2 E & 0 & -4\varepsilon \Theta & 8\mu \Theta \varepsilon \\ 0 & -4\mu \Theta \varepsilon & \omega^2 D & 4\mu \Theta^2 E & 0 \\ -8\mu \Theta \varepsilon & 4\Theta \varepsilon & 0 & \omega^2 D - 4\Theta^2 E & 16\mu \Theta^2 E \\ 8\Theta \varepsilon & -4\mu \Theta \varepsilon & 0 & 4\mu \Theta^2 E & \omega^2 D - 16\Theta^2 E \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

### 5. Границы области динамической устойчивости

В случае, когда  $\mu = 0$  и  $\varepsilon = 0$ , из уравнений (27) и (29), получим уравнение критических частот:

$$|\omega^2 D - k^2 \Theta^2 E| = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Сравнивая это уравнение с уравнением собственных частот для консервативной задачи:

$$|\omega^2 D - \Omega E| = 0, \quad (31)$$

Находим:

$$\Theta_* = \frac{\Omega_j}{k}, \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, 3, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где  $\Theta_*$  — критическая частота внешней силы.

$\Omega_j$  — частота собственных колебаний системы коленчатого вала.

Формула (32) даёт те соотношения между частотой внешней силы и частотой собственных колебаний системы коленчатого вала, вблизи которых возможно возникновение неограниченно возрастающих колебаний. Область неустойчивости, лежащая вблизи  $\Theta_* = \Omega_1$ , будем называть главной областью динамической неустойчивости.

Приближенное решение для границы главных областей неустойчивости получим, выделив в (27) центральные квазиэлементы:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 D - \Theta^2 E - \mu \Theta^2 E & -2(\mu + 1)\Theta \varepsilon \\ -2(\mu - 1)\Theta \varepsilon & \omega^2 D - \Theta^2 E + \mu \Theta^2 E \end{vmatrix} = 0. \quad (33)$$

### Резюме

Приводится методика исследования динамической устойчивости двигателя внутреннего сгорания с учетом затухания. Определяются границы области динамической устойчивости с учетом затухания.

### Литература

1. Болотин, В. В.: Динамическая устойчивость упругих систем. Госуд. издат. технико-теоретической литературы. Москва 1956.
2. Кузьмин, П. А.: Малые колебания и устойчивость движения. Издат. «Наука». Главная редакция физико-математ. литературы. Москва 1973.
3. Попык, К. Г.: Динамика автомобильных и тракторных двигателей. Издат. «Высшая школа». Москва, 1970.
4. Занг, Л. В.: Исследование динамической устойчивости (параметрического резонанса) неразрезного стержня на упругих опорах. Периодика Политехника, Будапешт, 1979.
5. Занг, Л. В. — Михелбергер, П.: Исследование динамической устойчивости плоской модели железнодорожного вагона. Периодика Политехника, Будапешт, 1979.
6. Занг, Л. В.: Исследование динамической устойчивости двигателя внутреннего сгорания. Периодика Политехника, Будапешт, 1984.

Le VIET GIANG, B.m. Co ky thuat Dai hoc bach khoa Da nang, Viet-Nam.