# О МОДЕЛЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

А. А. СМЕХОВ

Организации грузовой и коммерческой работы
Московского Инститза Инженеров Железнодорожного Транспорта

**Summary**

The paper discusses the modelling possibilities of stability for certain transportation systems (where the instability is defined by traffic-jam states) using the classical Ljapunov approach and modern methods of linear stability theory. The introduced and specialised model can be applied for forecasting of the expected "traffic-jam" in railways networks.

## Постановка задачи

В условиях интенсификации использования технических средств первостепенное значение приобчетает устойчивая работа транспортной системы.

Под устойчивостью в технологическом смысле следует понимать бесперебойное функционирование транспортной системы, при котором выполняются основные качественные и количественные показатели.

В математическом аспекте под устойчивостью понимается такое состояние системы, при котором такие параметры, как технологические нормы времени обработки транспортных потоков, парки транспортных средств, длина очередей находятся в области их допустимых значений.

Следует различать понятия устойчивости и надежности, которая относится к техническим параметрам. Высокая надежность обеспечивает необходимую устойчивость функионирования системы. Непосредственно математической теории устойчивости транспортных систем пока исследователи не уделяют достаточного внимания. И эта теория разработана недостаточно. Фундаментальных иследрваний в области теории устойчивости рельсовых транспортных систем, за исключением решения некоторых задач, не проводилось и пожалуй, исключением являются исследования в области математической теории транспортных потоков на автомобильном транспорте.

Задача устойчивости решается в такой последовательности:

— изучается технология транспортной системы и строится ее математическая модель,
— определяются критерии устойчивости и зона стабильности функционирования системы;

— проводится исследование реакции транспортной системы на действие возмущений; определяется полигон действия возмущения, скорость его распространения и продолжительность выхода системы из строя;
— в результате анализа математической модели исследуется устойчивость системы, устанавливаются условия стабильности ее функционирования.

Вид и структура математической модели выбираются в зависимости от класса транспортных систем; рельсового, автомобильного трубопроводного транспорта, устройств непрерывного перемещения грузов, подъемно-транспортных машин и т.д.

При высокой интенсивности транспортных потоков, в том числе рельсового и автомобильного транспорта, состояние транспортной системы можно достаточно корректно представить электродинамическими, гидродинамическими и другими подобными моделями. При такой аппроксимации состояние транспортной системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями в частных производных (если плотность транспортного потока и провозная способность изменяются вдоль пути его перемещения).

Такая модель для исследования устойчивости имеет одно беспорное преимущество. При ее применении можно воспользоваться классияескими методами, применяемыми в теории автоматического регулирования. Если система дифференциальных уравнений линейна-условия устойчивости устанавливаются на основе анализа корней характеристического уравнения, методом Рауса Гурвица, критерием Нойквита-Михайлова и др., для нелинейных систем — весьма эффективен прямой метод Ляпунова и подход, предложенный румынским ученым Поповым. Естественно, что результаты анализа устойчивости транспортной системы необходимо сверять с физической проиродой управляемого объекта, анализом его поведения в конфликтных ситуациях.

Для того, чтобы сократить размерность математической модели, целесообразно реальную транспортную систему разделить на некоторые однотипные фрагменты-модули. Каждый модуль, в обобщенном виде включает транспортный узел и прилегающий к нему линейный участок. При таком разбиении транспортная система представляет собой совокупность взаимодействующих между собой подобных фрагментов-модулей, и поддается математическому описанию и анализу условий устойчивости. Следует отметить, что разбиение сложной транспортной системы на модули представляет самостоятельную задачу.

Докладчиком выпольнены — построены математические модели для систем рельсового транспорта, подъемно-транспортных машин, устройств непрерывного транспорта. Анализ условий устойчивости таких систем, описываемых дифференциальными уравнениями позволил установить адекватность полученных в итоге математического исследования результатов с интуитивными представлениями о физической природе действия факторов, определяющих причины помех и нарушения стабильности работы транспортных систем.

## Математическое моделирование устойчивости транспортных систем

Как было указано выше, не исключается ряд подходов при построении математической модели транспортного потока, если процесс рассматривается в непрерывном времени.

Мы обсудим подход, основанный на принципе баланса-аналога известного метода классической механики-принципа Даламбера. При построении модели оперировать показателями провозной и перерабатывающей способности, а в качестве объекта управления примем своеобразный «модуль», фрагмент транспортной сети, состоящий из транспортного узла и линейного участка (или двух сменных участков).

Введем следующие обозначения; $P_1$ — производительности участка, — количество тоннокилометров в единипу времени (т. км/ед. времени), $\frac{\partial P_1}{\partial X}$ — градиент измениния производительности по длине участка, тонн в единипу времени-провозная способность: $P_2$ — перерабатывающая способность узла т/единипу времени: $W$ — интенсивность транспортного потока в т/ед. времени; $\varphi_1(W, X, P_1)$ — функция, выражающая технологические потери провозной способности на участке; зависит от интенсивности транспортного потока $W$, провозной способности $P_1$ и длины участка $X$ характерной особенностью данных потерь является то, что они носят достаточно устойчивый, повторяющийся характер, определяются задержками транспортных потоков, вероятнрсть которых возрастает с увеличением интенсивности транспортного потока. $\varphi_2(W, P_2)$ — функция, выражающая технологические потери перерабатывающей способности транспортного узла, определяемая появлением очередей на отдельных фазах обработки транспорного потока. Разработаны в настоящее время достаточно эффективные методы определения величины данных потерь $\varphi_1$ и $\varphi_2$ с помощью методов ТМО.

$\xi_1(W_0, t)$ — потери провозной способности, обусловленные действием различных случайных факторов, в совокуьности представляющих случайный процесс $\xi_1^0, (t)$ (внезапные выходы из строя постоянных устройств, подвижного состава, явления стихийного характера и т.д.)

$\xi_2(W, t)$ — потери перерабыважщей способности транспортного узла по указанным выше причинам, которые обусловлены действием случайного процесса $\xi_2^0(t)$.

$\Delta P_1^0$ — потери провозной способности связанные с выделением времени на выполнение плановых ремонтных работ на участке $\Delta P_2^0$ — тоже в узле.

Заметим, что внезапные выходы из строя технических средств, продолжительность и частота ремонтов также зависят от интенсивности транспортного потока.

В силу многочисленных случайных факторов, определяющих появление потерь провозной и перерабатывающей способности, зависимости $\xi_1(t)$ можно интерпретировать нормальными процессами с нулевым математическим ожиданием или пуассоновским процессом, если в случайном процессе доминируют отказы технических средств. Руководствуясь принципом баланса, с учетом введенных обозначений и пояснений, можно записать следующие уравнения, описывающие состоянение фрагмента транспортной системы в обобщенном виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial \mathrm{X}} &= W + \varphi_1(W(t), P_1) + \xi_1(W, t) + \Delta P_1^0(W)) \\ P_1 &= W + \varphi_2(W(t), P_2) + \xi_2(t) + \Delta P_2^0(W) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В свою очередь, интенсивности $W(t) = q(x)\,\dfrac{\partial x}{\partial t}$

где $q(x)$ — плотность транспортного потока. Если провозная способность принимается не зависящей от $x$ постоянной на всем участке, тогда $\dfrac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial \mathrm{x}} = P_1^0 = \mathrm{const}$ и уравнения ($I$) в частных производных вырождаются в обыкновенные дифферен циальные уравнения.

Если функции $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ выражают задержки транспортного потока соответсвенно на участке и в узле, то для того, чтобы перейти к потерям провозной и перерабатывающей способности необходимо воспользоваться соотношениями

$$\varphi_1(W(t), X, P_1) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1(\cdot)\cdot W) \qquad \text{(т/ед. времени)}$$

$$\varphi_2(W(t), P_2) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_2(\cdot)\cdot W) \qquad \text{(т/ед. времени)}$$

Аналогично выполняется переход от затрат времени, связанных с действием случайных процессов $\xi_1^0(t)$, $\xi_2^0(t)$ и с выполнением ремонтных работ на участке и в узле $\Delta P_1^0$ и $\Delta P_2^0$ к потерям провозной и перерабатывающей способности. Например,

$$[\xi_1(W, t) + \Delta P_1^0(W)] = \frac{\partial}{\partial t}\,[[\xi(\cdot) + \Delta P_1(\cdot)]^{\mathrm{W}}]$$

Представляет интерес описатв состояние фрагмента транспортной системы, состоящей из транспортного узла и двух сложных участков.

В данном случае при построении математической модели задача заключается в том, чтобы согласовать взаимодействие двух участков и транспортного узла, один из которых является каналом входящего транспортного потока интенсивностью $W_1$, а второй принимает сформированный в вузе выходящий поток интенсивностью $W_2$. Такой фрагмент транспортной системы состоит из пяти подсистем: двух смежных участков, подсистемы, перерабатывающей входящий транспорвный поток, подсистемы, формирующей выходящий транспортный поток, и бункера-аккумулятора, с помощью которого согласовывается работа двух последних подсистем. В соответсвии с этим математическая модель рассматруваемого фрагмента транспортной системы состоит из пяти урадненний

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = W_1 + \varphi_1(W_1, P_1) + \xi_1(W_1, t) + \varDelta P_1^0(W)$$

$$P_2 = W_1 + \varphi_2(W_1, P_2) + \xi_2(W_1, t) + \varDelta P_2^0(W_1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = W_1 - W_2$$

$$P_3 = W_2 + \varphi_3(W_2, P_3) + \xi_3(W_2, t) + \varDelta P_3^0(W_2)$$

$$\frac{\partial P_4}{\partial x} = W_2 + \varphi_4(W_2, P) + \xi_4(W_2, t) + \varDelta P_3^0(W_2)$$

Здесь $P_2$ и $P_3$ — перерабатывающие способности подсистем, соответсвенно оислуживающих входящие и выходящие потоки; $P_1 \cup P_4$ — провозная способность смежных участков; $\xi_3(W_2, t)$ и $\xi_4(W_2, t)$ — аналоги величин $\xi_1(W_1, t)$ и $\xi_2(W_1, t)$; $\varDelta P_3^0(W_2)$ и $\varDelta P_4^0(W_2)$ — аналоги величин $\varDelta P_1^0(W_1)$ и $\varDelta P_2^0(W_2)$.

Третье уравнение системы (2) описывает процесс изменения величины запасов транспортных единиц $E$, в бункере, например, на сортировочных путях узла.

При исследовании динамики конкретного фрагмента транспорной системы уравнения (1) и (2) дополняются краевыми (начальными) условиями.

Можно сделать различные предположения относительно зависимости интенсивности транспортного потока от времени. Такая зависимость бесспорно наблюдаема. В частности, иногда она ности пульсирующий, пилообразный характер.

Поэтому процесс изменения интенсивности транспортного потока аппроксимируется зависимостями, имеющими синусоидальный характер или в более общем случае его можно описать с помощью рядов фурье.

Построение корректной, работоспособной модели-это лишь одна часть проблемы исследования устойчивости транспортной системы. Необходимо еще воспользоваться данной математической моделью для выявления этих условий. Предже всего полезно уточнить содержание критерия устойчивости. В качестве критерия технологической устойчивости могут выступать время пребывания транспортных средств на элементах транспортной системы, потери провозной и перерабатывающей способности, количество транспортных единиц, их запас (рабочий парк), одновременно находящихся в ожидании в процессе обслуьивания. Между перечисленными показателями нетрудно установить функциональную зависимость. По нашему мнению, колебания запаса транспортных единиц на том или ином элементе транспортной сети дают досточно объективное представление об устойчивости ее функционирования и характеризуют качество управления. От величины «Запаса» зависит бесперебойная работа транспортной системы и временные показатели.

Практика свидетельствует, что превышение рабочих парков вагонов на отвельных полигонах сети в настоящее время является одной из причин появления трудностей в продвижении вегонопотоков и свидетельством неустойчивой работы.

При исследовании устойчивости транспортной сети и математической формулировки задачи могут быть предложены два подхода. При первом подходе целевая функция, выражающая критерий оптимальности, представляет собой запас, величину «рабочего парка», транспортных единиц или производную от этого показателя. В частном случае функции $\varphi_1(W, P_1)$ и $\varphi_2(W, P_2)$ определяются с помошью теории очередей, а величины $\xi_1(t, W)$ и $(\xi_2(W, t)$ — исходя из гипотезы о пуассоновском потоке откагов технических средств системы.

В качестве таких производных можно принять интегральный функционал (интегральную оценку), выражающий дисперсию отклонения случайной величины рабочего парка $n$ транспортных единиц относительно его ночмы $n_0$ или математическое ожидание такого отклонения.

В последнем случае функционал имеет следующий вид

$$\varphi = \int (n_0 - n(W)] f(n_0 - n(W)] \, d[n - n(W)]$$

Рабочий парк $n(W)$ зависит от интенсивности транспортного потока

$$W = \{W_1, W_2\}$$

В качестве ограничений здесь выступают уравнения связи (1) или (2) описывающие состояние системы, а параметрами управления являются интенсивности входящих и выходящих транспортных потоков $W_1$ и $W_2$. Провозная и перерабатывающая способность, в границах которой варьируют величиной $W = (W_1, W_2)$ также принимается в качестве ограничения. Задача состоит в том, чтобы варьируя значением $W(t)$, минимизировать целевую функцию при заданных уравнениях связи и ограничениях.

При втором варианте постановки задачи показатель устойчивости: рабочий парк транспортных единиц или среднее оклонение или дисперсия отклонения, выступают в качестве ограничений, а целевая функция представляет собой эксплуатационные расходы. Задача, в этом случае состоит в том, чтобы минимизировать эксплуатационные расходы при заданных показателях устойчивости и провозной и перерабатывающей способности рассматриваемого фрагмента транспортной системы.

Рассмотрены различные варианты постановки задачи оптимизации стабильности функционирования транспортной системы.

Для частного случая, фрагмента транспортной сети, состоящего из узла и прилегающего участка, состояние которого описывается системой (1) и при допущении того, что $\frac{\partial P}{\partial x} = P_1^0$, то есть когда провозная способность не изменяется по длине участка, данная система после преобразований принимает вид

$$\ddot{Q} + a_1(\dot{Q})^2 + a_2\dot{Q} + a_3 = 0 \qquad (3)$$

где коэффициенты $a_1$, $a_2$ и $a_3$ зависят от перерабатывающей способности узла $P_2^0$ и провозной способности участка. В данном случае $W = \dot{Q}$ и $W = \ddot{Q}$, где $Q$ — объем перевозки.

Исследования нелинейной системы (2) использованием прямого метова и функции Ляпунова $V(Q_1, Q_2)$ на асимптотическую устойчивость системы позволили выявить условия устойчивости при различных значениях $Q_2 = W$ — интенсивности транспортного потока и отказов технических средств системы.

Функкия Ляпунова выбрана следующим образом $V = a(Q_1^2 + Q_2^2)$ где $Q_1 = Q$, $Q_2 = Q_1$. На рис. 1 $\Psi(Q)$ — основной компонент производной функции Ляпунова, определяющий ее знак.

Здесь коэффициенты $\alpha_1 - \alpha_2 \cdot \alpha_3$ зависит от интенсивности отказов системы и времени их восстановления.

Поэтому на приведенном графике величины $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и выражают проявления слувайных процессов $\xi_1^0(t)$ и $\xi_2^0(t)$. Зона устойчивости при $\alpha =$

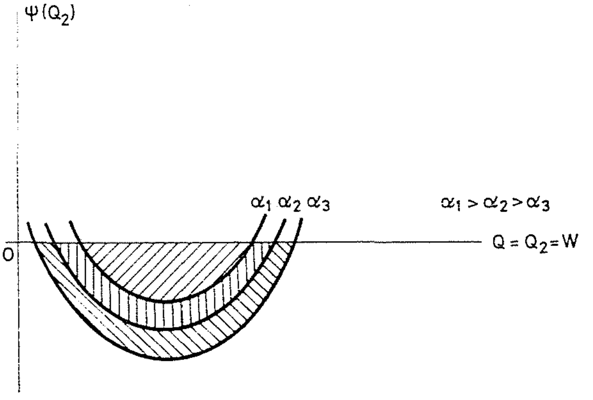


*Рис. 1*

$= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ заштрихована. Автором рассмотрены ряд типичных ситуаций, для которых выявлены общие условия устойчивости транспортной системы и, в частности, для случая, когда интенсивность входящих $W_1$ и входящих $W_2$ потоков в узле неодинаковы. В результате исследования получены выводы, которые не противоречат физической природе процесса и позволяют воспользоваться некоторыми количесвенными соотношениями для анализа условий устойчивости. В частности, установлено, что главной причиной нарушения устойчивости фрагмента сети является существенное различие интенсивностей входящего и выходящего транспортных потоков и недостаточная надежность. В условиях колебаний загрузии технических средств, и интенсивности транспортных потоков, становястя все более вероятными факты неустойчивой работы, нарушения равновесного стационарного состояния. Необходимо исследовать реакцию транспортной системы в случае возникновения затруднений, своеобразных барьеров на пути транспортного потока.

В работе рассмотрен «критический» случай, когда конфликтная ситуация настолько серьезна, что может вызвать временной перерыв в перемещении, скажем той части транспортного потока, который должен перерабатываться в транспортном узле. Задачей исследования является прогнозирование зоны и времени действия помехи на заданном полигоне в задисимости от его технических и технологических параметров и от продолжительности конфликтной ситуации $\tau$, определённой временем восстановления системы.

При непрерывном во времени транспортном потоке можно рассмотреть две концепции для определения характера реакции системы на появление конфликтной ситуации. Первая концепция основана на том, что транспортный поток представляется как несжимаемся жидкость, и появление на ее пути препятствий, барьеров можно сравнить с гидравлическим ударом.

Следствием такого удара является возникновение ударной волны и распространение ее в напрвлении, обратном движению транспортного потока. Движение обратной волны описывается волновым гиперболическим уравнением в частных производных. Еслу достаточно корректно определены креавые условия, то в результате решения такого уравнения можно определить указанные выше параметры реакции транспортной системы.

Скорость распространения ударной волны возрастает с увеличением плотности потока. В работе предлагается также вторая концепция для определения реакции транспортной системы на возмущение, основанная также на непрерывности транспортного потока, но вместе с тем отличаюшихся более четко выраженной физической интерпретацией. Суть данной концепции состоит в том, что рассматриваемый полигон сети в момент возникновения помехи располагает некоторой резервной емкостью $E_0$ транспортных единиц или тонн. Ета емкость постепенно заполняется в течение времени действия возмущения.

Свободную емкость полигона можно представить как своеобразный резервуар с длиной, равной протяженности полигона. Можно высказать различные предположения относительно процедуры заполнения этого «резервуара».

В простейшем случае, можно принять одинаковую погонную емкость $q_0$ резервуара-полигона по всей его длине. В более общем случае величина $q_{0i}$ изменяется по длине, что соответствует неодинаковой аккумулирующей способности различных участков транспортной сети. Естественно, что скорость заполнения емкости-резервуара зависит от интенсивности транспортного потока.

В наиболее простом случае равномерного распределения емкости и синусоидальном характере изменения интенсивности входящего потока дифференциальное уравнение, описывающее процесс заполнения транспортными единицами емкость, имеет вид

$$\dot{x} = \frac{W_0}{q_0}(1 + b_0 \sin \omega t) \qquad (4)$$

где $W_0$ — математическое ожидание интенсивности;
$b_0$ — амплитуда ее колебаний.

После восстановления системы, устранения «барьера», через время $\tau$, начинается движение сигнало восстановления вслед за ударной волной. Уравнение, описывающее движение сигнала восстановления имеет аналогичный вид

$$\dot{x}_1 = \frac{W'_0}{q'_0} + \frac{W'_0 q'_0}{q_0'^2} \sin \omega'(t + \tau) = \frac{W'_0}{q'_0}(1 + q_0 \sin \omega'(t + \tau)) \qquad (5)$$

Для того, чтобы найти зону действия возмущения и время, которое затрачивается, на то, чтобы сигнал восстановлены достиг волны, помехи, необходимо решить уравнение $x_1 = x$ относительно $t = T_0$ (заметим, что скорость движения сигнала восстановления больше скорости волны возмущения в силу физической природы процесса восстановления — движения и обслужива-

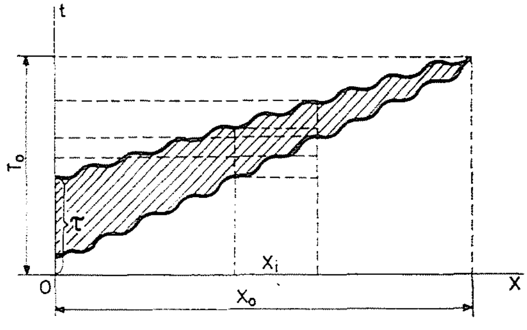


*Рис. 2*

ния транспортного потока). Зон действия возмущения $B_0(x)$ определяется подстановкой в уравнение (3) величины $t = T_0$ после его интегрирования.

На рис. 2 изображен процесс движения ударной волны и сигнала восстановления системы.

В принципе можно в любой точке с заданной координатой $x_i$ спрогнозировать продолжительности выхода из строя $i^{\underline{20}}$ элемента $\tau_i$ транспортной системы на рассматриваемом полигоне.

Не представляет трудностей рассчитать потери в натуральных или денежных показательях, которые возникают вследствие нарушения устойчивости фрагмента транспортной системы. Если на полигоне размещается $i$ участков, $i = \overline{1, n}$ отличащихся удельными нормативными емкостями $q_{0i}$ и уделпными значениями освободившихся емкостей $q_{0i}$ при достижении которых намечается функционирование участков, после ликвидации затруднения, то тогда для расчёта протяженности полигона распространения возмущения необходимо составить и последовательно решить $i = \overline{1, n}$ пар дифференциальных уравнений вида (4) и (5).

Пределы интегрирования уравнений (4), описывающих процесс распространения возмущения для участка принимаются равными $\{t_{i-1}, t_i\}$ для ураднения (5), описывающего процесс движения сигнала восстановления $\{\tau + t'_{i-1}, \tau + t'_i\}$.

Причем нижние пределы интегрирования $t_{i-1}$, $t'_{i-1}$ известны, они получаются в итоге решения двух предыдущих пар уравнений. Поскольку величины $x_i$ известны, они определяются границами участков, то из полученных в результате интегрирования алгебраических уравнений определяются величны $t_i$ и $t'_i$, а затем из выражения $\tau_i = t'_i - t_i$ рассчитывается продолжительность затруднений в движении транспортного потока на $i$ — м участке. Для последнего $n^{\underline{20}}$ участка совместно решается последняя пара дифференциальных уравнений вида (4) и (5) и определяется искомая протяженность полигона, на котором действует вогмущение.

## Выводы

1. Предлагаемая методика построения математической модели транспортного потока, анализ устойчивости функционирования транспортной системы и ее реакции на возмущения удобны и полезны для моделирования и прогнозирования разлияных конфликтных ситуаций на трудных участках сети, большой протяженности полигонов и при разработке мер по их локализации и ликвидации.

2. Учитывая важность рашения проблемы устойчивости транспортных систем при решении различных оптимизационных задач, связанных с управлением технологическими процессами сортировочных, грузовых станний, с

определением методов развития провозной способности железных дорог, мощности технических средств необходимо учитывать фактор устройчивости. Этот фактор при построении экономико-математической модели можно учесть или целовой функции, или в системе ограническии, налагаемых на технические и технологические параметры.

3. Необходимо проведение фундаментальных исследований в обсласти устойчивости транспортных систем.

## Литература

1. Ляпунов, А. М.: Обшая задача устойчивости движения, ГИТТЛ, Москва, 1950.
2. Летов, А. М.: Устойчивость в нелинейных системах регулирования, Физматгиз, Москва, 1961.

Prof. Dr. Anatoly Alekseievich Smehow, Moscow University for Transportation Engineering, Moscow, USSR