

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Л. В. Занг

Кафедра Механики Данангского  
Будапештского технического университета, Н-1521 Budapest

Поступило 2. сентября 1983. г.

Представлено: проф. др. П. Михелбергер

## Summary

The author elaborated method for the numerical investigation of the torsional dynamical stability of petrol or diesel engines. It is possible to give an approximate solution for the boundaries of the unstable operation of engines.

## Расчетная модель

Наиболее важная техническая загадка, относящаяся к колебанию систем с периодически меняющейся массой—это задача о колебаниях коленчатых валов. Известно, что расчет колебаний таких валов сводят обычно к расчету прямолинейного вала с некоторой приведенной жесткостью и рядом сосредоточенных дисков (по числу цилиндров и маховиков) (рис. 1). Момент

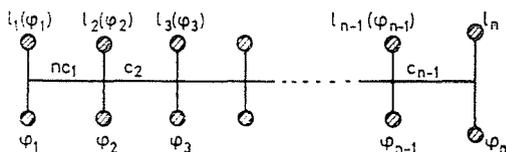


Рис. 1

инерции массы каждого диска выбирается таким образом, чтобы его кинетическая энергия была равна кинетической энергии вращающихся частей, шатуна и поршня, которые этот диск заменяет. Так, если длина шатуна  $l$  велика по сравнению с длиной кривошипа  $\Gamma$ , то общая кинетическая энергия, относящаяся к  $i$  — тому кривошипа,  $T_i = \frac{1}{2} J_{oi}(\dot{\varphi}_i)^2 + \frac{1}{2} m(\Gamma\dot{\varphi}_i \sin \varphi_i)^2$ , где  $\varphi_i$  — угол поворота  $i$  — того кривошипа,  $J_{oi}$  — момент инерции вращающихся частей,  $m$  — масса шатуна и поршня. Отсюда приведенный момент инерции.

$$J_i(\varphi_i) = \left( J_{oi} + \frac{1}{2} m \Gamma^2 \right) - \frac{1}{2} m \Gamma^2 \cos 2\varphi_i \quad (1)$$





Из уравнений (13), (14) следует, что уравнение (8) выражается в виде

$$\frac{dx}{dt} + \mathbf{B}(t)x = 0 \quad (15)$$

где  $x^* = [x_1, x_2, \dots, x_{2m}]$

$\mathbf{B}(t)$  — матрица порядка  $2m$ , из (11) следует, что

$$\mathbf{B}(t + T) = \mathbf{B}(t) \quad (16)$$

Согласно свойству (16), если матрица  $x(t)$  является решением уравнения (15), то матрица  $x(t + T)$  также является его решением и может быть получена из  $x(t)$  с помощью некоторого неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами

$$x(t + T) = \mathbf{R}x(t) \quad (17)$$

где  $\mathbf{R} = [\Gamma_{ik}]$ ,  $\Gamma_{ik}$  — координаты матрицы  $x(t + T)$  в фундаментальной системе  $x(t)$ . Таким образом, можно находить такую фундаментальную систему, которая при добавлении  $kt$  периода преобразуется в векторной записи:

$$x_k(t + T) = \varrho_k \cdot x_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, 2m) \quad (18)$$

здесь  $x_k$  — вектор [к-го] решения уравнения (15), т. е. (8).

$\varrho_k$  — [к-ам] характеристическая корень линейного преобразования (17).

Из формулы (18) следует, что решения системы (15) могут быть представлены в виде

$$x_k(t) = \varphi_k(t) e^{\frac{t}{T} \ln \varrho_k} \quad (19)$$

где  $\varphi_k(t)$  — периодический вектор с периодом  $T$ . Учитывая, что

$$\ln \varrho_k = \ln |\varrho_k| + i \arg \varrho_k \quad (20)$$

приходим к следующему выводу:

Если  $\ln |\varrho_k| < 0$ ,  $|\varrho_k| < 1$ , то общее решение уравнения (8) устойчивое, если  $\ln |\varrho_k| > 0$ ,  $|\varrho_k| > 1$ , то общее решение уравнения (8) неустойчивое. Если  $\ln |\varrho_k| = 0$ ,  $\varrho_k = \pm 1$ , то это предельный случай. В интервале между корнями  $\varrho_k = 1$  и  $\varrho_k = -1$  лежала бы вещественная корень, следовательно,  $\varrho_k = 0$ , это невозможно ввиду неособенности преобразования (17). Корни  $\varrho_k = 1$  и  $\varrho_k = -1$  ограничивают область комплексных корней (устойчивую область). В случае, когда  $\varrho_k = 1$ , решение уравнения (8) будет периодическим с периодом  $T$ , и когда  $\varrho_k = -1$ , с периодом  $2T$ .

Отсюда следует, что на границах областей неустойчивости дифференциальная система имеет периодические решения с периодом  $T$  или  $2T$ .

Точнее говоря, области динамической неустойчивости ограничены решениями с одинаковыми периодами и области динамической устойчивости — решениями с разными периодами  $T$  или  $2T$  [1].



Из (22) и (26), матричное уравнение (8) принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + \frac{\omega^2}{1 - 2\mu \cos \theta t} \mathbf{D} \Phi = 0 \quad (28)$$

Допустим, что момент инерции маховика достаточно велик, чтобы положить  $J_n \gg m\Gamma^2$ , что моменты инерции вращающихся частей кривошипов одинаковые, т.е.  $J_{01} = J_{02} = \dots = J_{0n-1}$ . В этом случае можно считать элементы матрицы  $\mathbf{D}$  постоянными элементами.

Отыскиваем решение уравнения (28) с периодом  $2T$  в виде ряда Фурье:

$$\Phi = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (\mathbf{a}_k \sin k\theta t + \mathbf{b}_k \cos k\theta t) \quad (29)$$

где  $\Phi$  является вектором с компонентами  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$ , и  $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$  — векторы.

При подстановке (29) в уравнение (28) получим две системы матричных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 \mathbf{D} - \theta^2 \mathbf{E} - \mu \theta^2 \mathbf{E}) \mathbf{a}_1 + 9\mu \theta^2 \mathbf{E} \mathbf{a}_3 &= 0 \\ (\omega^2 \mathbf{D} - k^2 \theta^2 \mathbf{E}) \mathbf{a}_k + \mu k^2 \theta^2 \mathbf{E} (\mathbf{a}_{k+2} + \mathbf{a}_{k-2}) &= 0 \\ &(k = 3, 5, 7, \dots) \\ (\omega^2 \mathbf{D} - \theta^2 \mathbf{E} + \mu \theta^2 \mathbf{E}) \mathbf{b}_1 + 9\mu \theta^2 \mathbf{E} \mathbf{b}_3 &= 0 \\ (\omega^2 \mathbf{D} - k^2 \theta^2 \mathbf{E}) \mathbf{b}_k + \mu k^2 \theta^2 \mathbf{E} (\mathbf{b}_{k+2} + \mathbf{b}_{k-2}) &= 0 \\ &(k = 3, 5, 7, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Если эти две системы должны иметь решения, отличающиеся от нуля, то их детерминанты должны равняться нулю. Таким образом, получим уравнение критических частот:

$$\left| \begin{array}{cccc} \omega^2 \mathbf{D} - \theta^2 \mathbf{E} \pm \mu \theta^2 \mathbf{E} & 9\mu \theta^2 \mathbf{E} & 0 & 0 \\ 9\mu \theta^2 \mathbf{E} & \omega^2 \mathbf{D} - 9\theta^2 \mathbf{E} & 9\mu \theta^2 \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 25\mu \theta^2 \mathbf{E} & \omega^2 \mathbf{D} - 25\theta^2 \mathbf{E} & 25\mu \theta^2 \mathbf{E} \end{array} \right| = 0 \quad (31)$$

В уравнении (31) содержится оба случая ( $\pm$ )

Подобным образом будет отыскивать решение с периодом  $T$  в форме ряда Фурье:

$$\Phi = \mathbf{b}_0 + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} (\mathbf{a}_k \sin k\theta t + \mathbf{b}_k \cos k\theta t) \quad (32)$$

Если подставим выражение (32) в уравнение (28), то аналогично предыдущему случаю, получим детерминанты:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \mathbf{D} & 4\mu\theta^2 \mathbf{E} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \omega^2 \mathbf{D} - 4\theta^2 \mathbf{E} & 16\mu\theta^2 \mathbf{E} & 0 & \dots \\ 0 & 16\mu\theta^2 \mathbf{E} & \omega^2 \mathbf{D} - 16\theta^2 \mathbf{E} & 16\mu\theta^2 \mathbf{E} & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

и

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \mathbf{D} - 4\theta^2 \mathbf{E} & 16\mu\theta^2 \mathbf{E} & 0 & 0 & \dots \\ 16\mu\theta^2 \mathbf{E} & \omega^2 \mathbf{D} - 16\theta^2 \mathbf{E} & 16\mu\theta^2 \mathbf{E} & 0 & \dots \\ 0 & 36\mu\theta^2 \mathbf{E} & \omega^2 \mathbf{D} - 36\theta^2 \mathbf{E} & 36\mu\theta^2 \mathbf{E} & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

### Границы области динамической неустойчивости

В случае, когда  $\mu = 0$ , из уравнения (28) получим уравнение собственного колебания системы:

$$\ddot{\Phi} + \omega^2 \mathbf{D} \Phi = 0 \quad (35)$$

Предполагаем, что колебание гармоническое, и отыскиваем решение уравнения (35) в виде

$$\Phi = \mathbf{a} \sin(\Omega t + \alpha) \quad (36)$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор амплитуды,  $\Omega$  — частота собственных колебаний систем. Подстановкой выражения (36) в уравнение (35) получим уравнение для определения частот собственных колебаний систем:

$$|\omega^2 \mathbf{D} - \Omega^2 \mathbf{E}| = 0 \quad (37)$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

В случае, когда  $\mu = 0$ , из уравнений (31), (33) и (34), получим уравнение критических частот:

$$\begin{aligned} |\omega^2 \mathbf{D} - k^2 \theta^2 \mathbf{E}| &= 0 \\ (\kappa &= 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (38)$$

Сравним уравнение (38) с уравнением (37), легко получаем, что

$$\theta_* = \frac{\Omega}{k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (39)$$

где  $\theta_*$  — критическая частота внешней сил.

Формула (39) даёт те соотношения между частотой внешней силы и частотой собственных колебаний системы коленчатого вала, вблизи которых возможно возникновение неограниченно возрастающих колебаний.

Область неустойчивости, лежащая вблизи  $\theta_* = \Omega$ , будем называть главной областью динамической неустойчивости.

Приближенное решение для границы главных областей неустойчивости получим, причавняв нулю определитель верхнего диагонального элемента матрицы (31):

$$|\omega^2 \mathbf{D} - \theta^2 \mathbf{E} + \mu \theta^2 \mathbf{E}| = 0. \quad (40)$$

### Резюме

Приводится методика исследования динамической устойчивости двигателя внутреннего сгорания. Определяются границы области динамической устойчивости.

### Литература

1. Болотин В. В.: Динамическая устойчивость упругих систем. Госуд. издат. технико-теоретической литературы. Москва 1956
2. Кузьмин П. А.: Малые колебания и устойчивость движения. Издат. «Наука». Главная редакция физико-математ. литературы. Москва 1973
3. Занг Л. В.: Исследование динамической устойчивости (параметрического резонанса) неразрезного стержня на упругих опорах. Периодика Политехника, Будапешт 1979
4. Занг Л. В.,—Михелбергер П.: Исследование динамической устойчивости плоской модели железнодорожного вагона. Периодика Политехника, Будапешт 1979

Le Viet Giang, B. m Co ky thuat Dai hoc bach  
Khoa Da nang, VIET NAM