VIZSGÁLATOK A FÉLCSOPORTOK ELMÉLETÉBEN

SZÁSZ GÁBOR

Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszék

Bevezetés

Ebben a dolgozatban — egy kivételtől eltekintve — az [1] jelölésrendszerét és terminológiáját követjük; az egyetlen kivétel az, hogy az $I(a)$ jelölést az [1]-től eltérő, alább definiálandó értelemben használjuk.

Szükségünk lesz néhány, az [1]-ben nem található elnevezésre és jelölésre; ezeket itt, a bevezetésben foglaljuk össze.

Az S félcsoport valamely J ideálját *gyengén-prim*nek nevezzük, ha az S bármely J_1 és J_2 ideáljára a $J_1J_2 \subseteq J$ tartalmazás csak úgy állhat fenn, hogy vagy $J_1 \subseteq J$, vagy $J_2 \subseteq J$. *Globálisan idempotens*nek mondjuk a J ideált, ha $J^2 = J$. Ha pedig $SJ = JS = J$, akkor azt mondjuk, hogy a J ideál *teljes*.

A 2. paragrafusban a belső ideálok tulajdonságaival foglalkozunk; a fogalmat Lajos Sándor (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem) vezette be, a [3]-ban. Az S félcsoport valamely I részfélcsoportját az S *belső ideál*jának nevezzük, ha $SIS \subseteq I$; ha éppen $SIS = I$, akkor azt mondjuk, hogy az I belső ideál *teljes*. Az ideálokhoz hasonlóan, az S félcsoport valamely I belső ideáljáról akkor mondjuk, hogy

inkluzív, ha $SaS \subseteq I$-ből $a \in I$,
prim, ha $ab \in I$-ből $a \in I$ vagy $b \in I$,
féligprim, ha $a^2 \in I$-ből $a \in I$,
gyengén-prim, ha $AB \subseteq I$-ből $A \subseteq I$ vagy $B \subseteq I$

következik az S minden a, b elempárjára, illetve A, B belső ideálpárjára. Az I belső ideált *globálisan idempotens*nek nevezzük, ha $I^2 = I$. Az S félcsoport valamely a eleme által generált belső ideált $I(a)$-val jelöljük.

A dolgozat 3. paragrafusában a félcsoportok bizonyos osztályait ideáljaik, illetve egy oldali ideáljaik és bi-ideáljaik alkalmas tulajdonságaival jellemezzük. A félcsoport valamely a eleme által generált bi-ideált $B(a)$-val jelöljük.

Belső ideálok

Nyilvánvaló, hogy ha J az S félcsoportnak ideálja, akkor belső ideálja is S-nek. Bizonyos feltételek teljesülése esetén ennek fordítottja is igaz; ilyen feltételekről szól az első két tétel.

1. *tétel* [8]. Ha az S félcsoport I belső ideálja inkluzív, akkor ideál az S-ben (és — a megfelelő definíciókból következően — mint ideál is inkluzív).

Kimutatható, hogy minden féligprim vagy gyengén-prim belső ideál inkluzív, és nyilvánvaló, hogy minden prim belső ideál féligprim. Ezért az 1. tételből közvetlenül következik, hogy minden féligprim, minden gyengén-prim és — még inkább — minden prim belső ideál egyszersmind ideál.

2. *tétel* [8]. Ha az S félcsoport I belső ideálja teljes, akkor I ideál az S-ben, és mint ideál is teljes.

Felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy — az 1. tétellel ellentétben — a 2. tétel második állítása nem tekinthető a megfelelő definíciók nyilvánvaló következményének.

Nem nehéz belátni, hogy minden globálisan idempotens belső ideál teljes. Ebből és a 2. tételből következik, hogy minden globálisan idempotens belső ideál egyszersmind ideál (mégpedig teljes és globálisan idempotens ideál).

Tekintsük az alábbi két, művelettáblákkal megadott félcsoportot:

S_1	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	a	a
d	a	a	a	a	a	a
e	a	a	a	b	a	e
f	a	a	c	d	a	f

S_2	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	a	a
d	a	a	a	a	a	b
e	a	a	a	a	b	c
f	a	a	b	a	d	a

Az S_1-ben az $\{a, e\}$ részhalmaz olyan belső ideál, amely bal ideál is, de nem ideál. Az S_2-ben $\{a, f\}$ olyan belső ideál, amely nem bi-ideál (és ezért bal vagy jobb ideál sem).

Ismeretes, hogy félcsoport bármely két ideáljának szorzata szintén ideál abban a félcsoportban. Ugyanezt belső ideálokra eddig nem sikerült kimutatni; valószínű, hogy nem is igaz. De:

3. *tétel* [7]. Ha I_1 és I_2 egy kommutatív S félcsoport belső ideáljai, akkor I_1I_2 is belső ideál S-ben, és fennáll az $I_1SI_2 \subseteq I_1 \cap I_2$ tartalmazás.

A tétel második állítása azért érdekes, mert az egyenlőség fennállása fontos következménnyel jár:

4. *tétel* [7]. Kommutatív S félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha bármely két I_1, I_2 belső ideáljára $I_1SI_2 = I_1 \cap I_2$.

Ismeretes, hogy kommutatív félcsoport bármely a, b elemeire fennáll a $J(ab) = J(a)J(b)$ egyenlőség. Belső ideálokra a következő analóg tételt sikerült bebizonyítani:

5. *tétel* [7]. Kommutatív S félcsoport bármely a, b elemeire fennáll az $I(ab) \subseteq I(a)I(b)$ tartalmazás; ha $S^2 = S$, vagy ha $S^2 \neq S$, de az $S \setminus S^2$ bármely x eleme kielégíti az $x^3 = x^2$ egyenletet, akkor $I(ab) = I(a)I(b)$ érvényes az S bármely a, b elempárjára.

A belső ideáloknak az ideálokéhoz hasonló tulajdonsága az is, hogy ha egy S félcsoportban az S tetszőleges x elemével képezett Sx szorzat egyenlő S-sel (az ilyen tulajdonságú félcsoportot egyes szerzők balzéró félcsoportnak nevezik), akkor S-nek nincs valódi — azaz, az S-től különböző — belső ideálja; speciálisan, balcsoportnak sincs.

Félcsoportosztályok jellemzése ideáltulajdonságokkal

A paragrafus első részében olyan tételeket foglalunk össze, amelyek a reguláris, az intrareguláris, valamint az egyidejűleg reguláris és intrareguláris félcsoportok ideálelméleti jellemzését adják. Az első három tétel Lajos Sándorral közös kutatási eredmény.

6. *tétel* [4]. Egy S félcsoportra a következő állítások páronként ekvivalensek:

(A) Az S reguláris.
(B) Az S minden B bi-ideáljára és R jobb ideáljára $B \cap R \subseteq RB$.
(C) Az S minden a, b elempárjára $B(a) \cap R(b) \subseteq R(b)B(a)$.
(D) Az S minden a elemére $B(a) \cap R(a) \subseteq R(a)B(a)$.

7. *tétel* [4]. Egy S félcsoportra a következő állítások páronként ekvivalensek:

(A) Az S intrareguláris.
(B) Az S minden L bal és R jobb ideáljára $L \cap R \subseteq LR$.
(C) Az S minden a, b elempárjára $L(a) \cap R(b) \subseteq L(a)R(b)$.
(D) Az S minden a elemére $L(a) \cap R(a) \subseteq L(a)R(a)$.

8. *tétel* [4]. Egy S félcsoportra a következő állítások páronként ekvivalensek:

(A) Az S reguláris és intrareguláris.
(B) Az S minden L bal és R jobb ideáljára $L \cap R \subseteq LR \cap RL$.

(C) Az S minden a, b elempárjára $L(a) \cap R(b) \subseteq L(a)R(b) \cap R(b)L(a)$.
(D) Az S minden a elemére $L(a) \cap R(a) \subseteq L(a)R(a) \cap R(a)L(a)$.
(E) Az S minden B_1, B_2 bi-ideálpárjára $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1B_2$.

Az intrareguláris félcsoportok primideáljaik segítségével is jellemezhetők. a következőképpen:

9. *tétel* [5]. Az S félcsoport akkor és csak akkor intrareguláris, ha az S minden olyan a és b eleméhez, amelyre $J(a)$ nem része $J(b)$-nek, található olyan P primideál, hogy $b \in P$, de $a \notin P$.

Emlékeztetjük az olvasót arra, hogy ugyanezzel az ideáltulajdonsággal jellemezhetők a hálók között a disztributívak.

Mintegy három évtizede ismeretes az intrareguláris félcsoportoknak R. Croisot-tól származó jellemzése, amely szerint egy félcsoport akkor és csak akkor intrareguláris, ha minden ideálja féligprim (l. [1], Theorem 4.4.). Ez a nevezetes tétel adta az indítékot olyan tulajdonságok keresésére, amelyek szükségesek és elegendők ahhoz, hogy egy félcsoport minden ideálja gyengén-prim, illetve prim legyen. A nyert eredményeket a következő két tétel foglalja magába:

10. *tétel* [6]. Egy S félcsoport összes ideálja akkor és csak akkor gyengénprim, ha S ideáljai globálisan idempotensek és a tartalmazásra nézve láncot alkotnak (azaz, az S bármely két J_1, J_2 ideáljára $J_1 \subseteq J_2$ vagy $J_2 \subseteq J_1$).

11. *tétel* [6]. Egy S félcsoport összes ideálja akkor és csak akkor prim, ha S intrareguláris és az S ideáljai a tartalmazásra nézve láncot alkotnak.

Irodalom

1. Clifford, A. H.—Preston, G. B.: The algebraic theory of semigroups, *1—2*. Amer. Math. Soc., Providence, (1961) — (1967)
2. Lajos, S.: Generalized ideals in semigroups. Acta Sci. Math. Szeged, *22* 217 (1961)
3. Lajos, S.: (m, k, n)-ideals in semigroups. Notes on Semigroups, Dept. Math. K. Marx Univ. Econ., *2* 12 (1976)
4. Lajos, S.—Szász, G.: On characterization of certain classes of semigroups. Publicationes Math. Debrecen, *25* 225 (1978)
5. Szász, G.: Halbgruppen, deren Elemente durch Primideale trennbar sind. Acta Math. Acad. Sci. Hung., *19* 187 (1968)
6. Szász, G.: Eine Charakteristik der Primidealhalbgruppen. Publicationes Math., *17* 209 (1970)
7. Szász, G.: Interior ideals in semigroups. Notes on Semigroups, Dept. Math. K. Marx Univ. Econ., *4* 1 (1977)
8. Szász, G.: Remarks on interior ideals of semigroups. Studia Sci. Math. Hung., *16* 61 (1981)

Dr. Szász Gábor tanszékvezető egy. tanár