VÉGES ABELCSOPORTOK KELLER-TÍPUSÚ FAKTORIZÁCIÓJÁRÓL

SEITZ Károly

Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar, Matematika Tanszék

Bevezetés

Legyen G véges abelcsoport. Egy $G = K_1K_2 \dots K_n$ $(K_1, K_2, \dots, K_n \subseteq G)$ egyenletet a G egy egyértelmű faktorizációjának nevezünk, ha G minden eleme egyértelműen $g_1g_2 \dots g_n$ alakban írható $(g_j \in K_j, j = 1, 2, \dots, n)$.

A következőkben *szimplexnek* nevezünk minden olyan komplexust, amelynek elemei $e, g, g^2, \dots, g^{\gamma-1}$, $(o(g) \geq \gamma \geq 2)$. Ez a szimplex nyilván akkor és csak akkor csoport, ha a g elem rendje $o(g) = \gamma$.

O. H. Keller 1930-ban kimondott sejtésében [1] azt állította, hogy egybevágó kockák egyszeresen térfedő rendszere akkor is mindig oszlopozott, ha a kockák középpontjai nem alkotnak rácsot.

Minkowski [2] sejtése szerint az n-dimenziós euklideszi térben minden egyszeresen térfedő kockarács oszlopozott (azaz tartalmaz egész lapokkal illeszkedő kockapárt).

Hajós 1938-ban bebizonyította [3], hogy Minkowski sejtése a következő tétellel ekvivalens:

A G véges abelcsoport szimplex tényezőkre való faktorizációjában legalább az egyik tényező szükségképpen csoport.

Minkowski sejtését minden n-re Hajós 1941-ben bizonyította be [4].

Keller sejtésének Hajós által megadott csoportelméleti megfogalmazása [5] a következő: A G véges abelcsoport minden

$$G = K[a_1][a_2] \dots [a_n] \tag{1}$$

alakú faktorizációjánál, ahol K a G csoport komplexusa, az

$$[a_j] = (e, a_j, a_j^2, \dots, a_j^{\alpha_j - 1}), (j = 1, 2, \dots, n)$$

szimplexek közül legalább az egyik záróeleme, $a_j^{\alpha_j}$ $(1 \leq j \leq n)$, előállítható két K-beli elem hányadosaként:

$$a_j^{\alpha_j} = k^{-1}k', \; (k, k' \in K).$$

A következőkben a Keller-sejtéssel kapcsolatos egyes újabb eredményekkel foglalkozunk.

A Keller-sejtés bizonyított speciális esetei

A [6] tanulmányban Keller sejtésének a következő speciális esetekre vonatkozó bizonyítása szerepel:

1. A K komplexus csoport,
2. A K egyértelműen előállítható G-beli szimplexnek, illetve csak prímszámú elemet tartalmazó $e\in K_1$, $e\in K_2$, $\ldots$, $e\in K_m$ komplexusok szorzataként.
3. $n = 1, 2, 3, 4$.
4. G prímhatványrendű ciklikus csoport.

A 2. eset bizonyításánál alapvető szerepet játszik Rédei tétele [9]:

Ha a $G = P_1P_2 \ldots P_m$ egyértelmű faktorizációnál $e\in P_j$ és a P_j, ($j = 1, 2, \ldots, m$) faktorok elemszáma prímszám, akkor a P_1, P_2, $\ldots$, P_m faktorok közül legalább az egyik csoport.

A Keller-sejtés egy általánosításáról

Ezután Keller sejtésének a következő általánosításával foglalkozunk:

Ha a G véges abelcsoportnak

$$G = K \cdot P_1 \cdot P_2 \ldots P_m \tag{2}$$

egy egyértelmű faktorizációja, ahol $e\in P_1$, $e\in P_2$, $\ldots$, $e\in P_m$ és P_1, P_2, $\ldots$, P_m mindegyike csak prímszámú elemet tartalmaz, akkor a P_1, P_2, $\ldots$, P_m faktorok közül legalább az egyik olyan $[a]$, $(a\in G)$ szimplexszel helyettesíthető, amelynek záróeleme előállítható két K-beli elem hányadosaként.

A [7] tanulmányban a fenti általánosított Keller-sejtést az 1., 2., 4. speciális esetekre vonatkozóan bizonyítottuk be.

Újabban A. D. Sands [8] a Keller-sejtést mindazon ciklikus csoportokra vonatkozóan igazolta, amelyek rendje két prímhatvány szorzata.

Irodalom

1. Keller, O. H.: Über lückenlose Erfüllung des Raumes mit Würfeln, J. reine und angew. Math. *163* 231 (1930).
2. Minkowski, H.: Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896—1910. p. 104—105.
3. Hajós, Gy.: Többméretű terek befedése kockaráccsal Mat. Fiz. Lapok *45*, 171 (1938).
4. Hajós, G.: Über Einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, Math. Zeitschrift *47* 427 (1941).
5. Hajós, G.: Sur la factorisation des groupes abéliens. Casopis *74* 157 (1950).
6. Seitz, K.: Investigations in the Hajós—Rédei Theory of Finite Abelian Groups, K. Marx Univ. Economics, Dept. Math., Budapest 1975 (MR 53 No. 655 /1977)
7. Seitz, K.: On a generalization of Keller's conjecture, K. Marx Univ. Economics, Dept. Math., Budapest, 1978.
8. Sands, A. D.: On Keller's conjecture for certain cyclic groups. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society *22* 17 (1979).
9. Rédei, L.: Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós. Acta Math., Acad. Sci. Hungar. *16* 329 (1965).

Dr. Seitz Károly egy. docens, a matematikai tudományok kandidátusa