FÉLCSOPORTOK CSOPORT KONGRUENCIÁINAK JELLEMZÉSE

NAGY Attila

Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar
Matematika Tanszék

Bevezetés

Legyen S egy félcsoport és H részfélcsoportja S-nek. Akkor mondjuk, hogy H *reflexív* S-ben, ha tetszőleges S-beli a és b elemek esetén ab akkor és csakis akkor eleme H-nak, ha ba is eleme H-nak. Továbbá H-t S *unitér részfélcsoportjának* nevezzük, ha ab, $a \in H$-ból $b \in H$ és ab, $b \in H$-ból $a \in H$ következik.

Legyen a tetszőleges S-beli elem. Definiáljuk a $H \,..\, a = \{(x, y) \in S \times S : xay \in H\}$ halmazt és segítségével a $P_H = \{(a, b) \in S \times S : H \,..\, a = H \,..\, b\}$ relációt az S félcsoporton. Könnyen igazolható, hogy P_H kongruencia S-en. A P_H kongruencia fontos szerepet játszik a félcsoportok csoport, illetve nullelemes csoport kongruenciáinak jellemzésében. Nevezetesen, ha H tetszőleges reflexív unitér részfélcsoportja egy S félcsoportnak, akkor P_H olyan kongruencia S-en, amely szerinti $S_{/P_H}$ faktorfélcsoport vagy csoport, vagy nullelemes csoport. Fordítva, ha P az S félcsoportnak olyan kongruenciája, amelyre $S_{/P}$ csoport, vagy nullelemes csoport, és H jelöli $S_{/P}$ egységelemét, akkor H reflexív unitér részfélcsoportja S-nek és $P_H = P$. Továbbá a $W = \{a \in S : H \,..\, a = \square\}$ halmaz akkor és csak akkor nem üres, ha $S_{/P}$-nek létezik nulleleme. Ilyen esetben $S_{/P}$ nulleleme egyenlő W-vel.

A vizsgálatok első részében a reflexív unitér részfélcsoportokkal foglalkozunk. Majd definiálva egy új fogalmat, az n-unitér részfélcsoport fogalmát, tetszőleges félcsoportban értelmezzük a normállánc és a kompozíciólánc fogalmát. Ezen fogalmak a csoportelméletben jól ismert normállánc és kompozíciólánc fogalmak félcsoportokra történő általánosításai.

A fő eredmény az, hogyha egy félcsoportnak létezik kompozíciólánca, akkor bármely két kompozíciólánca egymással izomorf.

Reflexív unitér részfélcsoportok

1. Tétel. Legyen S félcsoport és H reflexív unitér részfélcsoportja S-nek. Akkor P_H kongruencia S-en és $S_{/P_H}$ vagy csoport, vagy nullelemes csoport H egységelemmel. Fordítva, ha P olyan kongruencia S-en, amelyre nézve $S_{/P}$ csoport vagy nullelemes csoport és H jelöli $S_{/P}$ egységelemét, akkor H reflexív unitér részfélcsoportja S-nek és $P = P_H$. A $W = \{a \in S : H \,..\, a = \square\}$ részhalmaz akkor és csak akkor nem üres, ha $S_{/P}$-nek van nulleleme. Ebben az esetben $S_{/P}$ nulleleme egyenlő W-vel.

Bizonyítás. Legyen H reflexív unitér részfélcsoportja S-nek. Akkor P_H kongruencia S-en. Megmutatjuk, hogy H egy P_H-osztály. Legyenek h és g tetszőleges elemei H-nak, illetve S-H-nak külön-külön, és legyen t tetszőleges H-beli elem. Akkor $tht \in H$ és $tgt \in S$-H. Következésképpen $(h, g) \notin P_H$. Így H bizonyos P_H-osztályok uniója. Legyen a és b két olyan tetszőleges eleme H-nak, amelyekre $(a, b) \notin P_H$. Akkor léteznek olyan S-beli x, y elemek amelyekre például $xay \in H$ és $xby \notin H$. Mivel H reflexív S-ben, ezért ez az $yxa \in H$ és $yxb \notin H$ teljesülését eredményezi, amelyből $a, b \in H$ miatt $yx \in H$ és $yx \notin H$ következik. Mivel ez ellentmondás, H egy P_H-osztály. Megmutatjuk, hogy H egységeleme $S_{/P_H}$-nak. Legyenek $b, x, y \in S$ tetszőlegesek. Akkor $xby \in H \leftrightarrow yxb \in H \leftrightarrow yxbh \in H \leftrightarrow xbhy \in H$ és $xby \notin H \leftrightarrow yxb \notin H \leftrightarrow yxbh \notin H \rightarrow xbhy \notin H$ tetszőleges $h \in H$ esetén. Így $(b, bh) \in P_H$. Hasonlóan $(b, hb) \in P_H$. Így $S_{/P_H}$ egységelemes félcsoport H egységelemmel.

Legyen $V = \{a \in S : H \,.\,.\, a \neq \square\}$ és $W = \{a \in S : H \,.\,.\, a = \square\}$. Az nyilvánvaló, hogy $V \cap W = \square$ és $V \cup W = S$. Megmutatjuk, hogy vagy $W = \square$, vagy W ideál S-ben. Tegyük fel, hogy $W \neq \square$. Legyenek $w \in W$ és $v \in V$ tetszőleges elemek. Akkor léteznek olyan x, y elemei S-nek, hogy $xvy \in H$. Másrészt $xwy \notin H$, mert $w \in W$. Így $(v, w) \notin P_H$. Következésképpen W bizonyos P_H-osztályok uniója. Mivel minden $w \in W$ esetén $xwy \notin H$ minden $x, y \in S$-re, ezért W egyetlen P_H-osztály. Meg kell még mutatnunk, hogy W ideál S-ben. Legyenek $s \in S$ és $w \in W$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy $sw \in V$. Akkor léteznek olyan x, y elemei S-nek, hogy $xswy \in H$, amely ellentmond a $w \in W$ feltételnek. Így $sw \in W$. Hasonlóan, $ws \in W$. Így W ideál S-ben. Megmutatjuk, hogy $V_{/P_H}$ csoport. Legyen $v \in V$ tetszőleges. Akkor léteznek olyan x, y elemei S-nek, hogy $xvy \in H$. Mivel H reflexív, ezért $(yx)v \in H$. Ebből pedig az következik, hogy V részfélcsoportja S-nek és $V_{/P_H}$ csoport.

Fordítva, legyen P olyan kongruencia az S félcsoporton, amelyre $S_{/P}$ csoport vagy nullelemes csoport. Jelölje H az $S_{/P}$ egységelemét. Akkor H unitér részfélcsoportja S-nek. Legyen $a, b \in S$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $ab \in H$. Ha $a \in H$, akkor H unitér volta következtében $b \in H$ és így $ba \in H$. Ha $a \notin H$, akkor $b \notin H$, és így S_a-val, illetve S_b-vel jelölve az a-t, illetve b-t tartalmazó P-osztályokat, S_a és S_b egymás inverzei $S_{/P}$-ben. Így $S_bS_a \subseteq H$, azaz $ba \in H$. Tehát H reflexív S-ben. Megmutatjuk, hogy $P = P_H$. Legyenek a és b tetszőleges elemei S-nek az $(a, b) \in P$ feltétellel. Akkor bármely S-beli x és y esetén $(xay, xby) \in P$. Így $xay \in H \leftrightarrow xby \in H$. Tehát $(a, b) \in P_H$. Tegyük fel, hogy $(a, b) \notin P$. Akkor a következő két eset közül legalább az egyik teljesül

(1) a és b egyike eleme B-nek

(2) $a, b \notin B$.

Itt B jelöli $S_{/P}$ nullelemét. Megjegyezzük, hogy ha $S_{/P}$-nek nincs nulleleme, akkor csak a (2) esetet kell tekinteni.

Az (1) esetben tegyük fel, hogy pl. $a \in B$. Akkor $b \notin B$ és így létezik olyan x eleme S-nek, hogy $x \notin B$ és $bx \in H$. Így tetszőleges $h \in H$ esetén $hbx \in H$. Ugyanakkor $hax \in B$, és így $hax \notin H$. Ez pedig $(a, b) \notin P_H$-t jelenti.

A (2) esetben két újabb esetet különböztetünk meg.

Ha $ab \in H$, akkor tetszőleges $h \in H$ esetén $hab \in H$. Mivel $(a, b) \notin P$ és S/P csoport vagy nullelemes csoport, $(ab, b^2) \notin P$, amelyből $b^2 \notin H$ következik. Így $hb^2 \notin H$. Ha $ab \notin H$, akkor létezik olyan S-beli c elem, hogy $c \notin B$ és $ac \in H$. Mivel $(a, b) \notin P$, ezért $bc \notin H$. Ugyanakkor $bc \notin H$ miatt $(ac, bc) \notin P$, és így $(a, b) \notin P$, amelyből az következik, hogy tetszőleges $h \in H$ esetén $hac \in H$ és $hbc \notin H$. Így $(a, b) \notin P_H$. Tehát $P \supseteq P_H$ és így $P = P_H$.

A következő három tétel reflexív unitér részfélcsoportok tulajdonságaival kapcsolatos.

2. Tétel [3]. Legyen S félcsoport és H reflexív unitér részfélcsoportja S-nek. Jelölje p az S-nek $S_{/P_H}$-ra való természetes homomorfizmusát. Ha N olyan egyszerű unitér részfélcsoportja S-nek, hogy $H \subseteq N$, akkor Np részcsoportja $S_{/P_H}$-nak. Ha N még reflexív is, akkor Np normális részcsoportja $S_{/P_H}$-nak.

3. Tétel [3]. Legyen S félcsoport. Ha N és M olyan reflexív unitér részfélcsoportjai S-nek, amelyekre $N \subseteq M$ és M egyszerű, akkor $M_{/P_N}$ normális részcsoportja $S_{/P_N}$-nek és

$$(S_{/P_N})/(M_{/P_N}) \simeq S_{/P_M}.$$

4. Tétel [3]. Ha H és N unitér részfélcsoportjai az S félcsoportnak és H reflexív S-ben, akkor $H \cap N$ vagy üres, vagy reflexív unitér részfélcsoportja N-nek és

$$\langle H, N \rangle_{/P_H} \cong N_{/P_{H \cap N}}.$$

5. Definíció. Legyen S félcsoport és H részfélcsoportja S-nek. Akkor mondjuk, hogy H *normális unitér* (röviden n-unitér) részfélcsoportja S-nek, ha

(a) H reflexív és unitér részfélcsoportja S-nek,

(b) H minden unitér részfélcsoportja egyszerű,

(c) Ha V olyan unitér részfélcsoportja S-nek, hogy annak minden unitér részfélcsoportja egyszerű, akkor $\langle H, V \rangle$ unitér részfélcsoportja S-nek, $\langle H, V \rangle = HV$, és $\langle H, V \rangle$ minden unitér részfélcsoportja is egyszerű.

6. Definíció. Legyen S félcsoport. S egy *normálláncán* S_i, $i = 0, 1, \ldots, k$ részfélcsoportjainak olyan

$$S = S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_k \tag{1}$$

monoton csökkenő láncát értjük, amelynél minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra S_i n-unitér részfélcsoportja S_{i-1}-nek. A k számot az (1) lánc hosszának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az (1) normállánc *kompozíciólánc*, ha $S_i \neq S_{i-1}$ ($i = 1, \ldots, k$) és minden olyan T-re, amelyre $S_{i-1} \supseteq T \supseteq S_i$ és T olyan valódi reflexív unitér részfélcsoportja S_{i-1}-nek, amelynek minden unitér részfélcsoportja egyszerű, az következik, hogy $T = S_i$, $i = 1, \ldots, k+1$. Itt S_{k+1} az üres halmazt jelöli.

Akkor mondjuk, hogy az (1) és a

$$S = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_n \tag{2}$$

normálláncok egymással izomorfok, ha $k = n$ és a $\{0, 1, 2 \ldots, k\}$ számoknak van olyan $i \to t$ permutációja, hogy $S_{i/P_{S_{i+1}}} \cong H_{t/P_{H_{t+1}}}$.

7. Tétel [3]. Ha egy félcsoportnak van kompozíciólánca, akkor bármely két kompozíciólánca egymással izomorf.

Irodalom

1. Clifford—Preston: The Algebraic Theory of Semigroups, Amer. Math. Soc. Providence. I. R. 1961
2. Kuros, A. G.: Group Theory, Moscow, 1953 (Russian)
3. Nagy, A.: A generalization of the Jordan—Hölder Theorem (To appear in Semigroup Forum)

Dr. Nagy Attila adjunktus