A SORBARENDEZÉSI PROBLÉMA MEGOLDÁSA A KÖRUTAZÁSI MODELL FELHASZNÁLÁSÁVAL (HAMILTONI UTAK PROBLÉMÁJA)

Rozgonyi László

Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar
Közlekedéstechnikai és Szervezési Intézet

A feladat hasonlít a körutazásra, azzal a különbséggel, hogy a sorbarendezésnél a gráf éleinek és csúcsainak száma nem egyezik meg.

A probléma felvetődik pl. folyamatos gyártási sor esetén, amikor az üzem több fázisban valamilyen terméket gyárt, összeszerel.

Az egyik termékről a másikra történő átállás költségkihatással jár. Az átállás a megrendeléstől, annak változásaitól függ.

Az üzem megkapja az új megrendelést és eldönti (kiválasztja) azt a sorrendet, amely a legkisebb összes átállási, átrendezési költséget eredményezi.

Első megközelítésben a sorbarendezési feladatot hozzárendelési problémának tekintjük és így oldjuk meg. Az eljárás során részkörutak keletkeznek. (Ezt a megoldást tekintjük alsó becslésnek.)

A keletkezett részkörutak összes hossza az adott feladatra nézve minimális (ezt a hozzárendelés biztosította).

A továbbiakban a részkörutakat fel kell bontani, ki kell nyitni, majd újabb részkörutakat (esetleg egyetlen részkörutat) hozunk létre a lehetséges legkisebb transzformáció mellett, miközben részkörutakat egyesítünk. Az egyesítés a részkörutak számának csökkenését eredményezi.

A részkörutakból azokat a báziselemeket kell kizárni, amelyek a legkisebb újabb transzformációt okozzák, hiszen minden újabb transzformáció az előző eredményt rontja (jelen esetben az első lépésben elért, a hozzárendelési feladat optimumát, a K_0 értékét növeli).

A pillanatnyilag lehetséges legkisebb transzformációt okozó báziscsere (régi bázisok kizárása) egyértelműen meghatározható, jelölésére a „z" betűt használjuk.

A matrixot particionáljuk, részekre bontjuk.

Egy részkörutat egy tömbön belül célszerű elhelyezni. Ez a megoldás a matrix sorainak és oszlopainak átrendezésével mindig megvalósítható.

A részkörutakhoz tartozó szuboptimumok összege kisebb (esetleg egyenlő, ami alternatív optimum esetén fordulhat elő), mint az egész körutazási, sorbarendezési feladat minimuma.

Egy részkörút — természetesen — minimálisan két (2) csúcsot, illetve ívet tartalmaz.

A megoldás menetét egy példán keresztül vizsgáljuk meg. A költségelemeket az 1. táblázat tartalmazza.

Tételezzük fel, hogy a feladatunk gépátrendezés, melynél az „*A*" helyzet jelenti a kiindulási alapot. Az „*A*" állapotból indulunk ki, tehát oda nem kell visszatérni, vagy a visszaérkezés költségeleme minden állapotból nulla értékű.

Az előbbi feltételből következően az első oszlop csak nulla értékű költségelemet tartalmaz. (Az első oszlopvektor minden eleme nulla.)

1. táblázat

A	8	9	6	8	3	2	4	6
5	B	3	3	6	4	4	8	3
3	4	C	4	3	7	2	7	6
7	8	4	D	8	4	4	3	8
4	5	5	7	E	3	2	8	7
11	5	9	5	4	F	3	2	12
10	7	9	8	6	4	G	4	5
5	9	8	2	11	1	3	H	2
7	6	11	4	12	6	8	9	I

Ezek után a hozzárendelési feladatot megoldjuk, majd a matrixot a részkörutak sorrendjében megfelelően átrendezzük.

A főátlóban az új sorrend:

$$A - G - B - I - D - C - E - F - H$$

Az átrendezett matrix:

2. táblázat

A	0^1	2	2	2	5	3	0	1
0^1	G	1	1	4	5	1	1	1
1	3	B	0^1	0	0	2	2	6
0	6	0	I	0^1	7	7	3	6
0	2	2	4	D	0^1	3	1	0
2	2	0	4	2	C	0^1	6	6
1	1	0^1	4	4	2	E	1	6
1	2	0	9	2	6	0	F	0^1
2	3	5	0	0	6	8	0^1	H

A további feladat a részkörutak egyesítése, összenyitása a lehetséges legkisebb transzformáció mellett.

Végső célunk az egyetlen összefüggő gráf. Ebből következik, hogy a jelenlegi részkörutak báziselemei közül legalább az egyik nem lehet a végső megoldás (gráf) báziseleme. Bázicserét kell tehát végrehajtani, minimális transzformáció mellett.

A feladat egyszerűsítése érdekében vizsgáljuk meg az $A—G—A$, valamint az $F—H—F$ részkörutak báziscsere lehetőségeit.

Ehhez felírjuk az $A—G—F—H$ csúcsokra vonatkozó minormatrixot a 3. táblázatba.

3. táblázat

A	0^1	0	1
0^1	G	1	1
1	2	F	0^1
2	3	0^1	H

A bázisok tiltását úgy végezzük el, hogy a kérdéses báziselemek helyére „V"-t írunk (változó). A „V" jelentése: nulla értékű, de pillanatnyilag bázisba nem vonható költségelem.

A báziscsere, bázistiltás kijelölése az elmaradó bázisok sorában és oszlopában található két (2) költségelem összegének minimuma alapján történik.

Például $A - G = V$ és $F - H = V$ esetén

$$z = z_1 + z_2$$
$$z = 1 + 2 = 3$$

vagy: $G - A = V$ és $F - H = V$ feltételezésével

$$z = z_1 + z_2$$
$$z = 1 + 1 = 2$$

A $z = 2$ az egész mátrixra nézve a legkisebb, ahol „z" az adott lépésben a transzformáció felső határa, azaz

$$z_{i\ \min} \geq t_i$$

A 3×3-as, vagy ennél nagyobb minormatrix esetén a részkörút irányított gráf, tehát az irányítottságot is figyelembe kell venni a $z_{\min}$ megállapításához.

A feladatban több helyen is található $z_1 + z_2 = 2$ báziscserét kijelölő érték. Ennél kisebb azonban nincs.

Tehát:

$$G - A = V \text{ és } F - H = V.$$

A bázisok tiltását a 4. táblázatban feltüntetjük.

4. táblázat

A	0	2	2	2	5	3	0	1
V	G	1	1	4	5	1	1	1
1	3	B	0	0	0	2	2	6
0	6	0	I	0	7	7	3	6
0	2	2	4	D	0	3	1	0
2	2	0	4	2	C	0	6	6
1	1	0	4	4	2	E	1	6
1	2	0	9	2	6	0	F	V
2	3	5	0	0	6	8	0	H

A 4. táblázat második sora (G sor) nem tartalmaz nulla értékű költségelemet, ezért ezt a sort transzformálni kell.

A sorban szereplő legkisebb költségelem egy (1), ezért

$$t_1 = 1$$
$$T_1 = K_0 + t_1 = 24 + 1 = 25$$

Az F sorban, valamint a H oszlopban található nulla költségelem, ezért itt transzformálni nem kell.

Az egy értékű transzformáció következtében a $G—A$ viszonylatot jellemző költségelem negatív értéket vesz fel (mínusz 1). Közben az $F—H$ viszonylat visszakapja a nulla értéket, hiszen a szükséges transzformáció bekövetkezett.

Az előbbiek szerint átalakított matrix:

5. táblázat

A	0^1	2	2	2	5	3	0	1
—1	G	0	0	3	4	0	0^1	0
1	3	B	0^1	0·	0·	2	2	6
0^1	6	0	I	0	7	7	3	6
0	2	2	4	D	0^1	3	1	0
2	2	0	4	2	C	0^1	6	6
1	1	0^1	4	4	2	E	1	6
1	2	0	9	2	6	0	F	0^1
2	3	5	0	0^1	6	8	0·	H

Egyértelműen csak négy (4) báziselemet tudunk meghatározni. Ezek: $A—G$; $C—E—B$; $F—H$.

A matrixban alternatív optimum lehetőség van. Az alternatívák közül zárjuk ki a $H—F$ lehetőséget a „rövidrezárás" elkerülése végett. Amennyiben a $H—F$ viszonylat bázis, úgy $F—H—F$ részkörút jön létre.

A keresett gráf: $A—G—F—H—D—C—E—B—I—A$
$$2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 3 + 5 + 3 + 0 = 25$$
A végső sorrend: $A—G—F—H—D—C—E—B—I$

Amennyiben még mindig egynél több körutunk lenne, úgy az eljárást folytatni kellene az egyetlen gráf kialakításáig az előbb ismertetett módszer szerint.

A végső gráf szerinti összes költség értéke természetesen megegyezik az eddig elvégzett összes transzformációval.

A feladat általános megoldása

Amennyiben nem ismerjük a kiindulás helyét, úgy abból a sorvektorból, vagy oszlopvektorból célszerű kiindulni, amelyikben legnagyobb a sortranszformáció, illetve az oszloptranszformáció.

Vizsgáljuk meg ebből a szempontból az előbbi feladatot

6. táblázat

										u ↓	
	A	8	9	6	8	3	2	4	6	2	
	5	B	3	3	6	4	4	8	3	3	
	3	4	C	4	3	7	2	7	6	2	
	7	8	4	D	8	4	4	3	8	3	
	4	5	5	7	E	3	2	8	7	2	
	11	5	9	5	4	F	3	2	12	2	
	10	7	9	8	6	4	G	4	5	4	— 4
	5	9	8	2	11	1	3	H	2	1	
	7	6	11	4	12	6	8	9	I	4	— 6
v →	3	4 ↓ 5	3	2	3	1	2	2	2		

A legnagyobb sortranszformáció értéke 4 (*G; I* sor). Ugyancsak 4 a B oszlop legkisebb eleme is. Ezek alapján még nem tudjuk eldönteni, hogy melyik sor vagy oszlop költségelemeit tegyük egyenlővé nulla értékkel. Az *I* sor második legkisebb költségeleme hat (6). Így a második legkisebb költségelem alapján döntünk.

Az utolsó sorvektor költségelemeit tesszük nullával egyenlővé.

A hozzárendelés végeredménye:

7. táblázat

A	4	5	2	4	0	0^1	1	2
2	B	0	0^1	3	2	3	6	0·
0	1	C	1	0^1	5	1	5	3
3	4	0^1	D	4	1	2	0	4
0^1	1	1	3	E	0	0	5	3
8	2	6	2	1	F	2	0^1	9
5	2	4	3	1	0^1	G	0	0
3	7	6	0	9	0·	3	H	0^1
0	0^1	0	0	0	1	2	1	I

A hozzárendelés optimuma egyben a végső gráfot (egyetlen összefüggő gráf) biztosítja.

A keresett gráf: $B - D - C - E - A - G - F - H - I$

$3 + 4 + 3 + 4 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 = 24$

Amennyiben nem egyetlen összefüggő gráfot kaptunk volna, úgy a részkörutakat az előbbiek szerint kellene összezárni.

Elvileg annyiszor kellene a körutazási feladatot megoldani, ahány sora, illetve oszlopa van a matrixnak.

Gyakorlatban azonban csak az aktuális minimum eléréséig kell folytatni a feladat megoldását.

A feladatnak (általános eset) két (2) szélső értéket adó megoldása van.

a) $B—C—E—A—G—F—H—I—D$

$3 + 3 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 = 24$

b) $B—D—C—E—A—G—F—H—I$

$3 + 4 + 3 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2 = 24$

A számpélda adatai A. Kaufmann: Az operációkutatás módszerei és modelljei című könyv 21. oldalán szerepelnek. Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1968.

Dr. Rozgonyi László egy. adjunktus