# VÉGTELEN MÁTRIXOK VIZSGÁLATA

SZABÓ Lajos

Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar
Matematika Tanszék

## 1

Egy félcsoport $a$ és $b$ eleméről akkor mondjuk, hogy $\mathfrak{L}$-($\mathfrak{R}$-)*ekvivalensek*, ha az általuk generált bal-(jobb-) ideál megegyezik. Ezt a következő módon jelöljük: $a\mathfrak{L}b(a\mathfrak{R}b)$. Ismeretes, hogy az $S$ félcsoport $a$ és $b$ eleme akkor és csakis akkor $\mathfrak{D}$-*ekvivalens*, ha van olyan $c$ elem $S$-ben, melyre $a\mathfrak{L}c$ és $c\mathfrak{R}b$. Egy félcsoportot $\mathfrak{D}$-*egyszerű*nek nevezünk, ha bármely két eleme $\mathfrak{D}$-ekvivalens.

Bizonyos félcsoportokban fontos szerepet játszanak az E. Sz. Ljapin [3] által bevezetett ún. *növelő elemek*. Az $S$ félcsoport $x$ elemét *bal oldali növelő elem*nek nevezzük, ha a félcsoportnak van olyan U valódi részhalmaza, amelyre $xS = S$ teljesül. Hasonló a *jobb oldali növelő elem* definíciója is.

A dolgozatban olyan végtelen matrixok vizsgálatával foglalkozunk, amelyek sorai is és oszlopai is megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, de minden sorban és oszlopban legfeljebb véges sok elem különbözik zérustól. Ebben a matrixhalmazban az elemek egyenlőségét, ill. két elem szorzatát a véges matrixok egyenlőségéhez, ill. szorzatához hasonlóan definiáljuk. Az összes ilyen matrixok halmaza erre a műveletre nézve félcsoport. A részletesebb vizsgálat tárgyát ennek a félcsoportnak egy, általunk $P$-vel jelölt, részfélcsoportja képezi. Először a $P$ félcsoport elemeinek egy könnyen kezelhető előállítását fogjuk megadni, majd bebizonyítjuk, hogy $P$ $\mathfrak{D}$-egyszerű, továbbá tartalmaz mind bal, mind jobb oldali növelő elemeket. Végezetül felvázoljuk a $P$ félcsoport $\mathfrak{D}$-osztályát, és néhány megjegyzést fűzünk ehhez az osztályhoz.

A dolgozatban használt jelölések, szakkifejezések és fogalmak vonatkozásában az [1] és [2] művekre hivatkozunk.

## 2

Legyen $S$ valamely $K$ test feletti összes olyan végtelen mátrixok halmaza, amelyeknek sorai is és oszlopai is megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, de minden sorban és oszlopban legfeljebb véges sok elem különbözik a $K$ test zérusától. Az $S$-beli matrixok szorzását a véges matrixok szorzásához hasonlóan értelmezve nyilvánvaló, hogy az $S$ halmaz erre a műveletre nézve egységelemes félcsoport. Az egységelem az

$$e = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & f & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & f & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

matrix, ahol $f$ a $K$ test egységeleme, 0 pedig a zérusa.

Jelöljük $G$-vel az összes olyan $S$-beli

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & f & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & f & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & f & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

matrixok halmazát, ahol $n$ adott természetes szám az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrix pedig reguláris. Könnyen belátható, hogy az $S$ félcsoportnak a $G$ halmaz részcsoportja. Ezek után tekintsük az $S$ félcsoport

$$x = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & f & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & f & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & f & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

és

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ f & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & f & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & f & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

elemét, ahol az $x$ matrixban az első $n$ oszlop, az $y$ matrixban pedig az első $n$ sor minden eleme zérus.

Legyen $P$ az $S$ félcsoportnak az a részfélcsoportja, amit a $G \cup \{x, y\}$ halmaz generál. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $P$ részfélcsoport generátoraira igazak az alábbiak:

$$xy = e,\ ex = x,\ ye = y \tag{1}$$

és

$$xg = x,\ gy = y \tag{2}$$

teljesül a $G$ csoport bármely $g$ elemére.

Az $S$-beli szorzás definíciójából, valamint az (1) és (2) összefüggésekből közvetlenül adódnak a következők:

1. *következmény:* Az $x$ és $y$ elemek végtelen rendűek.

2. *következmény:* Minden $p$ és $q$ természetes számra

$$x^p y^q = \begin{cases} x^{p-q}, & ha \quad p > q, \\ e, & ha \quad p = q, \\ y^{q-p}, & ha \quad p < q. \end{cases} \tag{3}$$

3. *következmény:* A $P$ félcsoport minden eleme

$$y^m s x^n \tag{4}$$

alakra hozható, ahol $s$ a $G$ csoport eleme, $m$ és $n$ pedig nem negatív egész szám. (Az $m = 0$ esetben $y^0$-t, az $n = 0$ esetben $x^0$-t elhagyjuk.)

A következőkben a $P$ félcsoport néhány tulajdonságára mutatunk rá.

*I. A $P$ félcsoport elemei egyértelműen állíthatók elő (4) alakban.*

A bizonyítást indirekt úton végezve tegyük fel, hogy

$$y^m s x^n = y^i t x^j \tag{5}$$

fennáll úgy is, hogy pl. $m \neq i$. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $m > i$. Ekkor az (5) összefüggés mindkét oldalát $x^{m+1}$-gyel szorozva, (3) és (2) miatt

$$x^{n+1} = x^{m+1-i+j}$$

adódik. Ebből az 1. következmény miatt kapjuk, hogy

$$m - i = n - j = k. \tag{6}$$

Ezt figyelembe véve, (5) így alakítható

$$y^{i+k} s x^{j+k} = y^i t x^j.$$

Ha $i > 0$, akkor $x^i$-vel balról és ha $j > 0$, akkor $y^j$-vel jobbról szorozva kapjuk, hogy

$$y^k s x^k = t.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez egyetlen $P$-beli elemre sem állhat fenn, ha $k$ természetes szám. Ezt figyelembe véve, (6) miatt (5) csak úgy teljesülhet, ha $m = i$ és $n = j$. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy (5) fennállásából $s = t$ következik.

*II. A P félcsoportban a szorzást a következő módon végezhetjük el:*

$$(y^m sx^n)(y^i tx^j) = \begin{cases} y^m sx^{n-i+j}, & ha \quad n > i, \\ y^m stx^j, & ha \quad n = i, \\ y^{m+i-n} tx^j, & ha \quad n < i. \end{cases} \tag{7}$$

A szorzási szabály helyessége (1), (2) és (3) alapján könnyen ellenőrizhető.

*III. A P félcsoport növelőelemes.* Az

$$A = \{sx^i : i = 1, 2, 3, \ldots ; s \in G\}$$

halmaz az összes balnövelő, a

$$B = \{y^j x : j = 1, 2, 3, \ldots ; t \in G\}$$

halmaz pedig az összes jobbnövelő elemek halmaza.

A bizonyításhoz tekintsük a $P$ félcsoport következő részhalmazait:

$$U_i = \{y^{m+i} ux^n : m, n = 0, 1, 2, \ldots ; u \in G,\}$$

$$V_j = \{y^m vx^{n+j} : m, n = 0, 1, 2, \ldots ; v \in G,\}$$

ahol $i, j = 1, 2, 3, \ldots$. Könnyű látni, hogy az $U_i$ és $V_j$ halmazok minden $i$ és $j$ természetes számra valódi részhalmazok $P$-ben. Alkalmazva (7)-et kapjuk, hogy

$$(sx^i) U_i = V_j (y^j t) = P$$

fennáll minden $i$ és $j$ természetes számra, és a $G$ csoport bármely $s$, $t$ elemeire.

Azt, hogy az $A$ halmaz elemein kívül más balnövelő elem nincs $P$-ben, a következő módon láthatjuk be. Legyen $s$ a $G$ csoport tetszőleges eleme. Könnyen belátható, hogy $sP = Ps = P$. Ebből következik, hogy $G$-nek egyetlen eleme sem lehet balnövelő. Az $y^m sx^i$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ alakú elemek pedig azért nem lehetnek balnövelők $P$-ben, mert minden ilyen elemre

$$(y^m sx^i)P = y^m (sx^i) P = y^m P \subset P.$$

Hasonlóan bizonyítható az is, hogy a $B$ halmaz elemein kívül más jobbnövelő elem nincs $P$-ben.

*IV. A P félcsoport $\mathfrak{D}$-egyszerű.*

Ehhez elegendő azt belátni, hogy a $P$ félcsoport $y^m s x^n$ és $y^i t x^j$ eleme akkor és csakis akkor $\mathfrak{L}$-($\mathfrak{R}$-)ekvivalens, ha $n = j$ $(m = i)$.

Tegyük fel először, hogy $(y^m s x^n)\mathfrak{L}(y^i t x^j)$. Tudjuk, hogy ez akkor és csakis akkor áll fenn, ha létezik olyan $y^p u x^q$ és $y^w v x^z$ elem $P$-ben, amelyekre

$$(y^p u x^q)(y^m s x^n) = y^i t x^j \tag{8}$$

és

$$(y^w v x^z)(y^i t x^j) = y^m s x^n. \tag{9}$$

A (7) szorzási szabályt alkalmazva, ezekből következik, hogy (8)-ban az $m \geq q$, (9)-ben pedig az $i \geq z$ esetekben $n = j$. Ha viszont $m < q$, akkor $q - m + n = j$. Ebből $n < j$ adódik. Ez a (9)-beli $i < z$ és $z - i + j = n$ összefüggések miatt lehetetlen. Kaptuk tehát, hogy ha a fenti két elem $\mathfrak{L}$-ekvivalens, akkor $n = j$.

Azt, hogy az $n = j$ feltevésből $(y^m s x^n)\mathfrak{L}(y^i t x^n)$ következik, könnyű belátni, mert

$$(y^i t s^{-1} x^m)(y^m s x^n) = y^i t x^n$$

és

$$(y^m s t^{-1} x^i)(y^i t x^n) = y^m s x^n,$$

ahol $s^{-1}$ az $s$, $t^{-1}$ pedig a $t$ elem $P$-beli inverze.

Az $\mathfrak{R}$-ekvivalenciára vonatkozó állítás bizonyítása hasonló.

A *IV.* tulajdonság alapján felvázoljuk a $P$ félcsoport (egyetlen) $\mathfrak{D}$-osztályát.

$$\begin{array}{c|cccc} \multicolumn{5}{l}{\longrightarrow \mathfrak{R}} \\ \hline & G & Gx & Gx^2 & \dots \\ \downarrow & yG & yGx & yGx^2 & \dots \\ \mathfrak{L} & y^2G & y^2Gx & y^2Gx^2 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \hline \end{array}$$

A következő megjegyzésekben levő állítások helyességéről könnyen meggyőződhetünk.

## Megjegyzések

1. A $P$ félcsoportban az összes idempotens mátrix az

$$I = \{y^m e x^m : m = 0, 1, 2, \dots\}$$

részhalmaz elemei.

2. A $G$ csoport bármely $s$ elemére a

$$H = \{t, sx, ys^{-1} : t \in G\}$$

halmaz a $P$ félcsoportnak generátorrendszere.

3. A $G$ csoport bármely $s$ eleme esetén az $\langle sx, ys^{-1} \rangle$ részfélcsoport izomorf a biciklikus félcsoporttal.

4. A $\mathcal{H}$-ekvivalencia kongruenciareláció a $P$ félcsoporton és a $P/\mathcal{H}$ faktorfélcsoport izomorf a biciklikus félcsoporttal.

## Irodalom


1. Clifford, A. H. and Preston, G. B.: The algebraic theory of semigroups, Amer. Math. Soc., Prov. R. I. *1*, *2* (1964), (1967)
2. Ljapin, E. Sz. (Е. С. Ляпин): Полугруппы, Москва, 1960.
3. Ljapin, E. Sz. (Е. С. Ляпин): Увеличительные элементы ассоциативных систем. Уч. зап. Лен. Гос. пед. ин-та им. Герцена, *89*, 55 (1953).


Dr. Szabó Lajos egy. docens