

# FOGASKEREK SZILÁRDSÁGI MÉRETEZÉSÉNEK FEJLESZTÉSI IRÁNYAI

KABAI Imre

Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar  
Gépelemek Tanszék

## Bevezetés

A fogaskerekek szilárdsági méretezésének az idők folyamán négy főszempontja alakult ki (1. ábra).

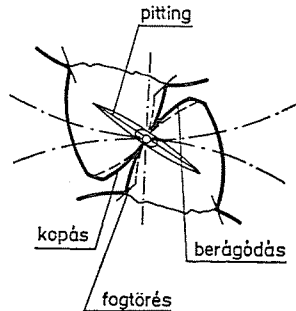
Legkorábban a fogtörés elkerülésére vonatkozó számítások alakultak ki. Elsőként Thomas Tredgold publikált 1822-ben egy tudományosan megalapozott, szélsőértékszámítás eredményeként nyert közelítő eljárást a fogtőteherbírás számítására, amelyet Carl von Bach fejlesztett tovább.

A fog alakjának pontatlan megközelítésére alapozott módszerek az amerikai ipar igényeit a XIX. század végére már nem elégítették ki. Wilfred Lewis 1892-ben egy Philadelphiában rendezett konferencián ismertetett egy, a fog pontos alakjára alapozott eljárást, bevezetve a fogalaktényező ma is használatos fogalmát.

A XX. század elején a fogaskerékpárok által átvitt teljesítmények növelésével egyidejűleg jelentkezett a kopás és a pittingképződés, amelynek körülményeit elsőként Vidéky Emil tárta fel és ismertetette 1908-ban, de ebben a vonatkozásban csak Earl Buckingham 1926-ban kidolgozott méretezési módszere terjedt el.

Berágódással az amerikai Almen után H. Blok foglalkozott, aki 1937-ben publikált általános érvényű megoldást és bevezette a hővillám fogalmát.

A fogaskerekek szilárdsági méretezése a második világháborút követő időkben intenzív fejlődésnek indult. Európában elsőként G. Niemann profesz-



1. ábra. Fogaskerekek szilárdsági méretezésének fő szempontjai

szor, az USA-ban Wellauer és Dudley ismertettek újabb és korszerű számítási módszereket. A Szovjetunióban is megindult a szisztematikus kutatómunka.

Hazai szinten a Niemann és a Botka—Erney szerzőpáros által adaptált és kiegészített Dudley-féle számítási módszerek használatosak.

A fejlődést az ISO legújabb, kidolgozás alatt álló ajánlata, a GOSZT 21354 szabvány és a KGST-szabvány képviselik. Mód van a terheléskép értékelésére is.

### ISO-tervezet

Az ISO-ajánlás kiterjed a fogfelületi, a fogtő-, a berágódási teherbírás, illetve biztonsági tényezők számítására és külön foglalkozik a külső és a belső dinamikus, valamint a kapcsolódást befolyásoló hatások számításbavételével.

A fogfelületi teherbírást a fogaskerékpár érintkező fogoldalain kialakuló Hertz-feszültség alapján állapítja meg utalva arra, hogy bár a tényleges feszültségállapot a Hertz-féle elmélettel nem írható le maradéktalanul, gyakorlati felhasználásra azonban alkalmas.

A fogaskerékpárt a  $\sigma_{HP}$  megengedhető és a  $\sigma_H$  keletkező Hertz-feszültség relációvizsgálata alapján megfelelőnek tekinti, ha

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP} \quad (1)$$

A feszültségek a kerékpár alapadataiból, különféle tényezők bevonásával állapíthatók meg.

A keletkező feszültség

$$\sigma_H = \sigma_{HO} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_v \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}}, \quad (2)$$

amelyben a névleges feszültség

$$\sigma_{HO} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_1} \cdot \frac{u+1}{u}}, \quad (3)$$

A megengedett feszültség pedig

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim} \cdot Z_N}{S_{Hmin}} \cdot Z_L \cdot Z_R \cdot Z_v \cdot Z_w \cdot Z_x. \quad (4)$$

A fogtő teherbírásának ellenőrzésére a 30°-os érintő helyén keletkező  $\sigma_F$  és a megengedhető  $\sigma_{FP}$  hajlító feszültségek relációvizsgálata szolgál

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP}, \quad (5)$$

bár lehetőséget ad pontosabb számításra is, pl. végeelem módszer, vagy konform leképzés felhasználásával.

A fogtőben keletkező feszültség

$$\sigma_F = \sigma_{FO} \cdot K_A \cdot K_v \cdot K_{F\beta} \cdot K_{Fz}, \quad (6)$$

amelyben a névleges feszültség

$$\sigma_{FO} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \quad (7)$$

és a megengedett feszültség

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT}}{S_{Fmin}} \cdot Y_{\delta relT} \cdot Y_{RrelT} \cdot Y_X. \quad (8)$$

A szabvány módszert ad a fogfelületeken kialakuló hőmérsékletek és az ebből adódó berágódás veszélyének számítására is.

A berágódási teherbírás ellenőrzése — a Blok-féle hőfokvillám kritérium alapján — a fogaskeréktest  $t_M$  és a hőfokvillám  $t_{fla}$  hőmérsékleti összegének, valamint a fogaskerék-kenőanyagrendszer  $t_B$  berágódási határhőmérsékletének

$$t_B = t_M + t_{fla} \leq t_S \quad (9)$$

relációvizsgálatából áll. A keréktest hőmérséklete

$$t_M = t_{olaj} + 0,11 \cdot v_t, \quad (10)$$

ahol a mértékadó fajlagos osztóhengeri terhelés

$$w_t = K_A \cdot K_v \cdot K_{B\beta} \cdot K_{Bz} \cdot K_{B\gamma} \cdot \frac{F_t}{b}. \quad (11)$$

A hőfokvillám

$$t_{fla} = 1,5 \cdot \mu_{my} \cdot X_M \cdot X_B \cdot X_\Gamma \frac{w_t^{3/4} \cdot v^{1/2}}{a^{1/4}}. \quad (12)$$

A rendszer berágódási hőmérséklete a  $t_{krit}$  kritikus kenőanyag hőmérsékletből egy  $X_w$  anyagszerkezeti tényezővel számítható

$$t_S = X_w \cdot t_{krit}, \quad (13)$$

számítható továbbá a biztonsági tényező is

$$S_B = \frac{t_S - t_{olaj}}{t_B - t_{olaj}} \quad (14)$$

Az integrálhőmérséklet kritérium alapján a fogfelületek  $t_{int}$  integrálhőmérsékletét a rendszerre jellemző  $t_{Sint}$  határhőmérséklettel javasolja összehasonlítani és biztonsági tényezővel számol

$$S_{Sint} = \frac{t_{Sint}}{t_{int}} \quad (15)$$

A határhőmérséklet

$$t_{\text{Sint}} = t_{MT} + C_2 \cdot X_W \cdot t_{\text{flaint}} \quad (16)$$

és az integrálhőmérséklet általános kifejezése

$$t_{\text{int}} = t_M + C_2 \cdot t_{\text{flaint}} \quad (17)$$

Az integrálhőmérséklet  $\varepsilon_z \geq 1$  profilkapcsolószámú fogazatokra a kapcsolódás végpontjában keletkező  $t_{\text{flaE}}$  hőfokvillámból

$$t_{\text{flaint}} = t_{\text{flaE}} \cdot X_\varepsilon \quad (18)$$

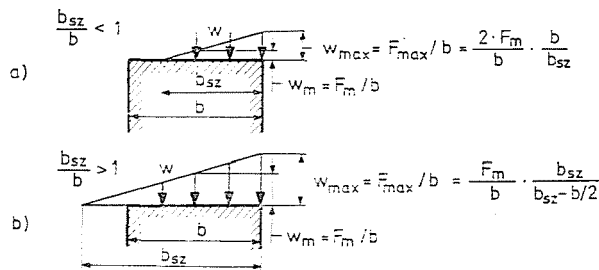
itt a hőfokvillám

$$t_{\text{flaE}} = \mu_m \cdot X_m \cdot (X_B)_E \cdot \frac{w_{Bt}^{3/4} \cdot v^{1/2}}{a^{1/4}} \cdot \frac{1}{X_Q \cdot X_{jg}} \quad (19)$$

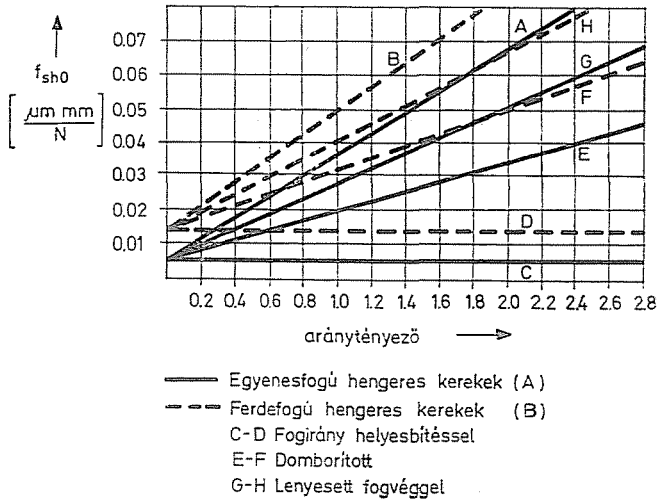
A  $K_\beta$  dinamikus tényező számításába behozza a fogszám értékét és a számításból kizárja a fogaskerékpár

$$n_{E1} = \frac{10^3}{2 \cdot \pi \cdot z_1} \sqrt{\frac{c_y}{m_{red}}} \quad [1/s] \quad (20)$$

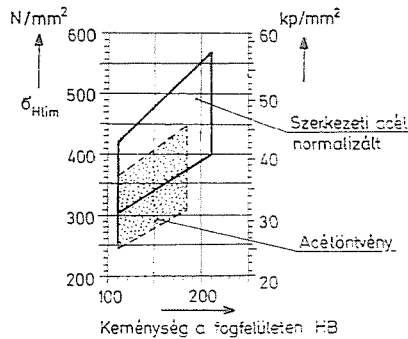
rezonanciafordulatszámának környezetét. A  $K_\beta$  tényezők számítása továbbra is lineáris terheléseloszlási elven alapul (2. ábra). Itt figyelembe vehetők a deformációk és a fog alkotó menti modifikációi is (3. ábra). A  $Z_\beta$  az  $Y_\beta$ , valamint a  $K_{B\gamma}$  tényezők tapasztalati jellegűek és a ferdefogazatoknak az egyenesfogazatoktól eltérő viselkedésére utalnak. A szokásos anyagok kifáradási határértékeire biztonsági területdiagramokat bocsájt rendelkezésre fogfelületre (4. ábra) és fogtőre (5. ábra). Figyelemre méltó az élettartamtényezők bevezetése fogfelületre (6. ábra) és fogtőre (7. ábra). A fogalaktényezők számítása során lehetőséget ad a protuberanciaszerszámok figyelembevételére. A számításba bevonja a Siebel-féle feszültségességi tényezőt is, amely különösen a nem fogaskerék alakú próbatestekkel megállapított kifáradási határok felhasználásakor kedvező.



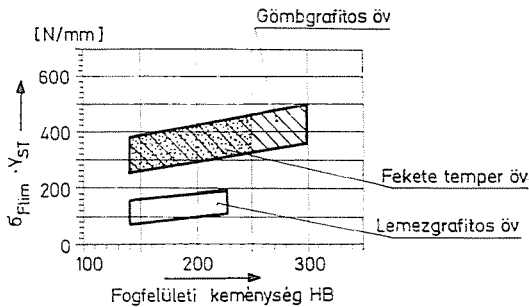
2. ábra. Terheléseloszlás a fogszélesség mentén



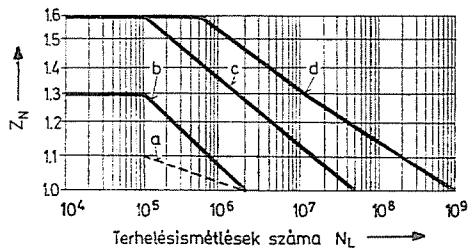
3. ábra. Fajlagos fogirányhiba megállapítása



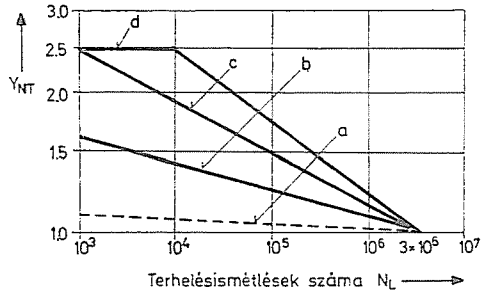
4. ábra. Általános szerkezeti acél és acélöntvény Hertz-feszültségének kifáradási határterületei



5. ábra. Öntöttvasak fogtőfeszültségének kifáradási határterületei



6. ábra. Fogfelületi élettartamtényező különféle acélminőségekre



7. ábra. Fogtő élettartamtényező különféle acélminőségekre

### GOSZT 21354 szabvány

Információtartalmát tekintve szintén hőséges, viszont gyakorlati felhasználásra lényegesen kezelhetőbb, mint a kissé túlbonyolított ISO-tervezet. A számítások alapját mind a fogfelületi, mind a fogtő-teherbírás vonatkozásában a gördülőhengeri vagy az osztóhengeri fajlagos, egységnyi fogszélességre jutó terhelés képezi. Berágódásra méretezési módszert nem ad.

A fogfelületi teherbírást az érintkező fogfelületeken keletkező Hertz-feszültség alapján számítja

$$\sigma_H = Z_H \cdot Z_M \cdot Z_\epsilon \cdot \sqrt{\frac{w_{Hwl}}{d_{w1}} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (21)$$

A működő fajlagos terhelés

$$w_{Hwl} = \frac{F_{Hwl}}{b_w} \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\nu'} \quad (22)$$

a megengedhető Hertz feszültség

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_H} \cdot Z_R \cdot Z_V \cdot K_L \cdot K_{xH} \quad (23)$$

és a relációvizsgálat

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}. \quad (24)$$

A fogtő teherbírását a hajlítófeszültség alapján számítja, elhanyagolva a nyomó és a nyírófeszültségeket, de figyelembe veszi a keresztmetszet változásából adódó feszültségnövekedést. A fogtőben keletkező hajlítófeszültség

$$\sigma_F = Y_F \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \cdot \frac{w_{Ft}}{m}. \quad (25)$$

Az osztóhengeri fajlagos terhelés

$$w_{Ft} = \frac{F_{Ft}}{b_w} \cdot K_{Fz} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{Fv} \quad (26)$$

A megengedett hajlítófeszültség

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{S_F} \cdot Y_R \cdot Y_S \cdot K_{xP} \quad (27)$$

és a relációvizsgálat

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP}. \quad (28)$$

A tényezők jelölése és értelmezése is az ISO-hatást tükrözi, bár vannak kivételek. A dinamikus tényezőt pl.

$$K_{Hv} = 1 + v_H \quad (29)$$

képlettel számítja, amelyben a dinamikus növekmény a Hertz-feszültséghez

$$v_H = \frac{w_{Hwv} \cdot b_w \cdot d_{w1}}{2000 \cdot T_{1H} \cdot K_{Hz} \cdot K_{H\beta}} \quad (30)$$

és ebben a dinamikus fajlagos terhelés

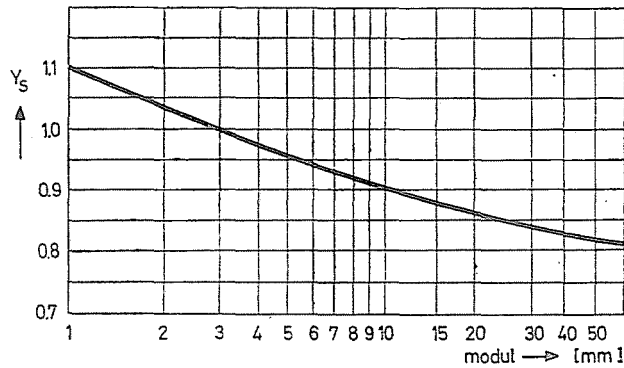
$$w_{Hwv} = \delta_H \cdot g_0 \cdot v \cdot \sqrt{\frac{a_w}{u}} \quad (31)$$

amelynek értékét a fogazat pontosságának függvényében korlátozza. Figyelemre méltó itt is az élettartamtényezők bevezetése. A kifáradási határfeszültség fogfelületi teherbírásra

$$\sigma_{Hlim} = \sigma_{Hlimb} \cdot K_{HL}, \quad (32)$$

amely különösen a változó terhelésű hajtások számításához kedvező. A kifáradási határfeszültség fogfelületi terhelésre egyértelmű

$$\sigma_{Hlimb} = 2 \cdot HB + 70 \text{ vagy } 23 \cdot HRC. \quad (33)$$



8. ábra. Fogtő feszültségkoncentrációs tényező

A fogtő teherbírás élettartamtényezője

$$K_{FL} = \sqrt[m_F]{\frac{N_{FO}}{N_{FE}}}, \quad (34)$$

amelynek gyökkitevője  $m_F = 6$  vagy  $m_F = 9$  a technológiától függően és a gyök alatt az alap és az egyenértékű ciklusszám található. A fogtő feszültségállapotának a számításába  $Y_S$  jelöléssel bevon egy relatív feszültségkoncentrációs tényezőt is, amelyre diagramot is ad (8. ábra). Részletes és konkrét, szám-szerű javaslatot ad a biztonsági tényezők felvételére.

### KGST-szabvány

A KGST keretében kidolgozott szabvány hengereskerékpárok fogfelületi és fogtőteherbírásának számítási módszereit tartalmazza. Információtartalmát tekintve bőséges és a GOSZT 21354-hez hasonlóan lényegesen jobban kezelhető, mint az ISO-tervezet. Korszerű, bevezetésre alkalmas számítási módszert ad. Lehetőséget biztosít a változó terhelések figyelembevételére is.

Fogfelületi teherbírás esetén a  $\sigma_{Hlimk}$  kifáradási határból és a keletkező egyenértékű  $\sigma_H$  Hertz-feszültségből biztonsági tényezőt számol

$$S_H = \frac{\sigma_{Hlimk}}{\sigma_H}. \quad (35)$$

A keletkező Hertz-feszültség

$$\sigma_H = \sqrt{K_H} \cdot \sigma_{HO}, \quad (36)$$

ahol a dinamikus hatások nélkül számított feszültség

$$\sigma_{HO} = Z_E \cdot Z_H \cdot Z_\beta \cdot Z_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{F_t}{b_w \cdot d_1} \cdot \frac{u+1}{u}} \quad (37)$$



és a dinamikus hatások tényezője

$$K_H = K_A \cdot K_{Hv} \cdot K_{Hz} \cdot K_{H\beta} \quad (38)$$

Változó terhelés esetén, ha  $j$  az egyes terhelési ciklusok indexe

$$\sigma_H = \sqrt[q]{\sum_{j=1}^p \sigma_{Hj}^q \cdot \Phi'_j} \quad (39)$$

ebben  $q$  a Wöhler-görbe kitevője. A kifáradási határfeszültség

$$\sigma_{Hlimk} = \sigma_{Hlim} \cdot Z \cdot Z_N \quad (40)$$

ahol figyelemre méltó a  $Z_N$  élettartamtényező,

A fogtőteherbírás számítási elve hasonló, itt is biztonsági tényezővel számol

$$S_F = \frac{\sigma_{Flimk}}{\sigma_F} \quad (41)$$

A keletkező fogtőfeszültség

$$\sigma_F = K_F \cdot Y_S \cdot \sigma_{Fn} \quad (42)$$

ahol

$$\sigma_{Fn} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_\beta \quad (43)$$

és

$$Y_F = Y_{Fa} \cdot Y_\varepsilon \quad (44)$$

Az  $Y_{Fa}$  a fejköri terhelés fogalaktényezője hajlítófeszültségre. A dinamikus tényező

$$K_F = K_A \cdot K_{Fv} \cdot K_{Fz} \cdot K_{F\beta} \quad (45)$$

Változó terhelés esetén

$$\sigma_F = Y_S \cdot \sqrt[q]{\sum_{j=1}^p (\sigma_{Fnj} \cdot K_{Fj})^q \cdot \Phi'_j} \quad (46)$$

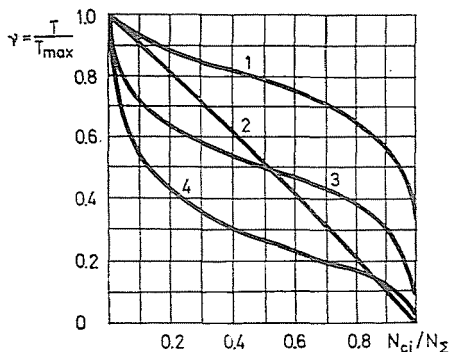
A kifáradási határfeszültség

$$\sigma_{Flimk} = \sigma_{F_0lim} \cdot Y_N \cdot Y_R \cdot Y_X \cdot Y_\delta, \quad (47)$$

amelyben szintén figyelemre méltó az  $Y_N$  élettartamtényező bevezetése. A KGST szabvány számítási módszere sem túlzottan egyszerű, különösen, ha a viszonylag nagyszámú tényező megállapítását nézzük.

### Terhelésképek értékelési lehetősége

A hajtóművek terhelése üzem közben csak a legkritkább esetben állandó, valóságos üzemben valamilyen valószínűségi eloszlás szerint változik. Nagyszámú vizsgálati eredmény alapján a hajtóművek terhelésképe alapvetően három csoportba sorolható (9. ábra).



9. ábra. Terhelésképek osztályozása: nehéz üzemi viszonyokra beta-eloszlás (1); közepes üzemi viszonyokra lineáris (2) vagy normál eloszlás (3); könnyű üzemi viszonyokra gamma eloszlás (4)

A nehéz üzemi viszonyok között működő hajtóművek terhelésképe beta-eloszlással írható le

$$\Phi(v_i) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{v_i} v_i^{a-1} \cdot (1 - v_i)^{b-1} \cdot dv_i, \quad (48)$$

amelynek paraméterei  $a = 6$ ,  $b = 2$  és középértéke  $v_m = 0,75$ .

Közepes üzemi viszonyok között működő hajtóművek terhelésképe lineáris eloszlással

$$\Phi(v_i) = \int_0^{v_i} dv_i, \quad (49)$$

vagy normáloszlással

$$\Phi(v_i) = \frac{1}{S \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{v_i} e^{-\frac{(v_i - v_m)^2}{2 \cdot S^2}} \cdot dv_i \quad (50)$$

írható le. Mindkét eloszlás középértéke  $v_m = 0,5$ , a normáloszlás szórása  $S = 0,167$ .

A könnyű üzemi viszonyok között működő hajtóművek terhelésképe gamma eloszlással írható le

$$\Phi(v_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^2} \int_0^{v_i} v_i^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{v_i}{\beta}} \cdot dv_i, \quad (51)$$

amelynek paraméterei  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0,1$  és középértéke  $v_m = 0,3$ .

A terheléskép eloszlásai a méretezést lényegesen kedvezőbbé tehetik, mert az újabb módszerek (ISO, DIN, GOSZT, KGST) élettartamtényezőivel módot nyújtanak a megengedhető feszültségek növelésére, bár kétségtelen, hogy bizonyos kockázatvállalással is járnak a tervező számára. A terheléskép eloszlását ugyanis a tervezés stádiumában kell megválasztani. Egy esetleges alábecslés gyakori hajtóműhibákhoz, a fölébecslés pedig túlméretezett hajtóműhöz vezethet.

### Összefoglalás

A fogaskerekek szilárdsági méretezése az utóbbi időben gazdasági-műszaki okokból intenzív fejlődés útján kétségen kívül nagyságrendileg bonyolultabbá vált. Az újabb irányok a valóságos viszonyok jobb követelésével az anyag jobb kihasználását teszik lehetővé, javítva ezzel a tervezés színvonalát. Figyelembe véve a fogaskerékhajtás ma még vitathatatlanul nagy ipari jelentőségét, a korszerű módszerek hazai bevezetése időszerűvé válik és számottevő műszaki-gazdasági előnyökkel járhat.

Dr. Kabai Imre egy. adjunktus