# BEÁGYAZÁSI PROBLÉMÁK DESARGUESI SÍKOKON

SZŐNYI Tamás, WETTL Ferenc

Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar
Matematika Tanszék

## Bevezetés

Dolgozatunkban bizonyos illeszkedési struktúrák desarguesi síkba való beágyazhatóságát vizsgáljuk.

Szükségünk lesz néhány alapvető fogalomra.

*1. Definíció:* Az $\mathbb{I} = (\mathbb{P}, \mathbb{B}, \mathbb{R})$ hármast illeszkedési struktúrának nevezzük, ha $\mathbb{P} \cap \mathbb{B} = \emptyset$ és $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{B}$.

$\mathbb{P}$ elemeit pontoknak, $\mathbb{B}$ elemeit blokkoknak nevezzük és $(P, B) \in \mathbb{R}$ esetén azt mondjuk, hogy a $P \in \mathbb{P}$ pont illeszkedik a $B \in \mathbb{B}$ blokkra. $\mathbb{R}$ neve illeszkedési reláció.

Most néhány — a későbbiekben fontos — példát mutatunk illeszkedési struktúrákra. Valamennyi példában a blokkok a pontok bizonyos részhalmazai, az illeszkedési reláció a halmazelméleti $\in$ reláció.

*1. **Példa**:* $\mathbb{I} = (\mathbb{P}, \mathbb{B}, \in)$, ahol $\mathbb{B}$ a $\mathbb{P}$ halmaz rendezetlen elempárjainak halmaza.

*2. **Példa**:* Legyen a $P_1, \ldots, P_r$ pontokból álló $K_n$ teljes gráf éleinek $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ egy olyan $n$ nem üres osztályba való sorolása, hogy az $S_i$-be ($i = 1, \ldots, n$) tartozó élek páronként diszjunktak legyenek. Tekintsük az alábbi $\mathbb{I}^* = (\mathbb{P}, \mathbb{B}, \in)$ illeszkedési struktúrát:

$$\mathbb{P} = \{P_1, \ldots, P_n\} \cup \{S_1, \ldots, S_n\}$$

$$\mathbb{B} = \{\{P_i, P_j, S_k\} \mid \text{ahol a } P_iP_j \text{ él az } S_k\text{-ba tartozik}\} \cup \{\{S_1, \ldots, S_n\}\}$$

*3. **Példa**:* Illeszkedési struktúráknak tekinthető a projektív és affin sík is.

Alapvetően fontos lesz számunkra a beágyazás definíciója:

*2. Definíció:* Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{I} = (\mathbb{P}, \mathbb{B}, \in)$ illeszkedési struktúra beágyazható egy $\mathbb{S}$ projektív vagy affin síkba, ha létezik $\mathbb{P}$-nek $\mathbb{S}$ ponthalmazába történő olyan injektív leképezése, amelynél az egy blokkban levő pontok képei egy egyenesen vannak.

Ha az 1. Példában szereplő illeszkedési struktúrát projektív síkba ágyazzuk, akkor a beágyazott ponthalmazt $k$-ívnek nevezzük ($k = |\mathbf{P}|$). Ha speciálisan $k = q + 1$, ahol $q$ a sík rendje, akkor $k$-ív helyett oválisról, ha $k = q + 2$, akkor hiperoválisról beszélünk.

A beágyazhatósággal kapcsolatos problémák igen fontos szerepet játszanak a véges geometriákban. Oválisok beágyazásával kapcsolatos SEGRE és BUEKENHOUT híres struktúratétele, de beágyazási tételnek tekinthetők a különféle záródási feltételekről szóló tételek, így GLEASON és LÜNEBURG tétele is.

## Az affin szabályos sokszögek problémájának általánosítása

Ebben a fejezetben az alábbi tétel bizonyítását vázoljuk.

*1. Tétel:* Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzék $AG(q)$-ban egy olyan $K$ $k$-ív, ahol $q = p^e$, $p > 2$ prim, $k > 4$ és $K$ szelői az ideális egyenesnek pontosan $k$ pontját fogják le az, hogy $k$ osztója legyen a $q+1, q, q-1$ számok valamelyikének. Ha $k \neq p^s$, ahol $s > 1$, akkor $K$ egyúttal affin szabályos sokszög is. Másként fogalmazva, a 2. példában szereplő $\mathbb{I}^*$ illeszkedési struktúra pontosan akkor ágyazható be $PG(q)$-ba, ha $k$ osztója a $q+1, q, q-1$ számok valamelyikének. ($AG(q)$, ill. $PG(q)$ a $q$-adrendű affin, ill. projektív Galois-síkot jelöli.)

Az $\mathbb{I}^*$ illeszkedési struktúra beágyazhatóságának kérdése könnyen látható módon általánosítása az affin szabályos sokszögek létezése kérdésének. Ezt a kérdést Kárteszi Ferenc vetette föl és tanítványai Korchmáros Gábor [5], valamint Nguyen Mong Hy [4] oldották meg egymástól függetlenül.

Mindenekelőtt megemlítjük A. Bichara és Korchmáros G. egy tételét amelyhez az alábbi definíció szükséges:

*Definíció:* Legyen $K \subseteq PG(q)$ egy ponthalmaz. Egy $P \in K$ pontot a továbbiakban akkor nevezünk jó pontnak, ha a $P$-n átmenő minden $l$ egyenesre $|l \cap K| \leq$ $\leq 2$. A jó pontok halmazát $J(K)$ fogja jelölni.

*2. Tétel:* (l. [1]) Legyen $K \subseteq PG(2^e)$, $|K| = q + 2$ egy ponthalmaz. Ekkor vagy $|J(K)| = q + 2$ (azaz $K$ hiperovális), vagy $|J(K)| \leq q/2$, s e becslés nem élesíthető, mert létezik olyan $K$ halmaz, hogy $|J(K)| = q/2$.

E tétel analogonja páratlan karakterisztika esetén is bizonyítható:

3. *Tétel:* Ha $K \subseteq PG(q)$, $q$ páratlan, $|K| = q + 1$ és $|J(K)| > \frac{q+1}{2}$, akkor $|J(K)| = q + 1$ és $K$ ovális.

A bizonyítás két lépésben történik. Először bebizonyítjuk, hogy ha $K \subseteq PG(q)$, $q$ páratlan, $|K| = q + 1$, akkor létezik egy olyan $C_2$ irreducibilis másodrendű görbe, hogy $J(K) \subseteq C_2$. Ezt SEGRE lemmájával bizonyíthatjuk. (l. [7])

Ezután megvizsgáljuk $K$ nem jó pontjait. Legyen $C$ a $J(K)$-t tartalmazó ovális és $R = K - J(K)$. Ha van $P \in K - C$, $C$-re nézve belső pont, akkor a rajta átmenő $(q+1)/2$, $C$-t szelő egyenes mindegyikén legfeljebb egy $J(K)$-beli pont lehet és mivel minden $J(K)$-beli pont rajta van valamely szelőn, így $|J(K)| \leq (q+1)/2$. Ha minden $P \in K - C$ pont külső, akkor hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy $|J(K)| \leq (q+3)/2$. A $|J(K)| = (q+3)/2$ eset azonban nem fordulhat elő. Ugyanis ekkor $C \cap R = \emptyset$ és $|R| = (q-1)/2$, és ha egy $R$-beli ponthoz hozzárendeljük a rajta átmenő két érintőn levő $J(K)$-beli pontot, akkor különböző pontokhoz nem rendelünk azonos pontot, vagyis $|J(K)| \geq 2 \cdot ((q-1)/2)$, ami $q > 5$ esetén ellentmondás. A $q \leq 5$ esetek triviálisak.

A geometria nyelvéről ezután áttérhetünk az algebráéra, ugyanis a másodrendű görbék pontjai indexelhetők egy $G$ Abel-csoport elemeivel úgy, hogy ha $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$, akkor $P_{g_1}P_{g_2} \| P_{g_3}P_{g_4}$ pontosan akkor teljesül, ha $g_1 + g_2 = g_3 + g_4$. Nevezetesen, ha a másodrendű görbe ellipszis, akkor $G = C_{q+1}$, ha hiperbola, akkor $G = C_{q-1}$, ha pedig parabola, akkor $G$ a $GF(q)$ test additív csoportjával izomorf. ($C_i$ az $i$-edrendű ciklikus csoportot jelöli.)

*Definíció:* Legyen $A, B \subseteq G$ a $G$ (additivan írt) véges Abel-csoport két komp lexusa. Definiáljuk a „$\circ$" komplexusműveletet a következőképpen:

$$A \circ B = \{a + b \mid a \in A, b \in B, a \neq b\}$$

Az $a \neq b$ feltétel miatt $A \circ B$ általában különbözik $(A + B)$-től.

*4. Tétel:* Ha $G$ egy véges additív Abel-csoport, $K \subseteq G$ komplexus, $S = K \circ K$ és $|K| = |S| = k > 4$, akkor van olyan $g \in G$ elem, hogy a $K + g$ komplexusra teljesül az alábbi állítások valamelyike:

(i) $K + g$ részcsoport $G$-ben

(ii) $K + g$ minden eleme másodrendű és $(K + g) \cup \{0\}$ részcsoport $G$-ben ($0$ a $G$ zéruseleme).

A bizonyítás az $A = \{a + a \mid a \in K\}$ komplexus leírásának segítségével történik. Megmutatható, hogy az $A \nsubseteq S$ feltevés páratlan $k$ esetén (ii)-t implikálja, míg páros $k$ esetén ellentmondásra vezet. $A \subseteq S$ esetén csak (i) valósulhat meg. A részletes bizonyítást mellőzzük.

Végezetül mutatunk egy olyan példát, amely megmutatja, hogy az 1. Tételben valóban nem csak az affin szabályos sokszögek jöhetnek számításba.

Tekintsük a $PG(p^4)$ síkot és annak $PG(p^2)$ részsíkját, amely tartalmazza az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat. Legyen $x_3 = 0$ az ideális egyenes és tekintsük az $x_1^2 = x_2x_3$ egyenletű kúpszeletet, mely $AG(p^4)$-ben az $y = x^2$ egyenletű parabola. Ennek $AG(p^2)$-be eső $p^2$ pontjának szelői az ideális egyenes $(0, 1, 0)$-tól különböző $PG(p^2)$-be eső $p^2$ pontját fogják le, affin szabályos $p^2$ szög pedig $p^4$-rendű síkon nincsen.

## Affin síkok és konfigurációk beágyazása projektív síkba

Ebben a szakaszban az affin síkok és konfigurációk desarguesi projektív síkba való beágyazhatóságáról szóló Korchmáros [6] és Bichara—Korchmáros [2] tételek elemi bizonyításával foglalkozunk. Tegyük föl, hogy a beágyazás már megtörtént, azaz az **A** affin sík pontjai a **P** desarguesi projektív sík egy ponthalmazát alkotják. Nem fogjuk megkülönböztetni **A** egyeneseit és az őket tartalmazó **P**-beli egyeneseket, mert ez nem vezet félreértéshez.

*Tétel:* Desarguesi projektív síkba ágyazott legalább negyedrendű affin sík kiegészíthető projektív részsíkká.

*Bizonyítás*

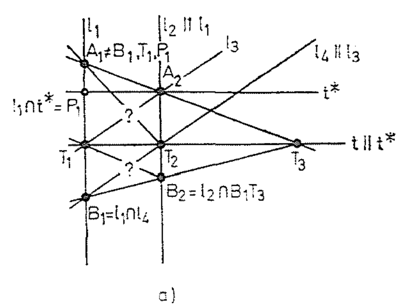
*1. lépés:* Megmutatjuk, hogy az $A$-ban egy párhuzamossereghez tartozó egyenesek $P$-ben egy ponton mennek át. Alapvetően fontos az alábbi észrevétel: (*) Minden olyan Desargues-konfiguráció, melynek pontjai $A$-beliek, záródik.

Rajzoljuk meg az 1/a. ábrán látható konfigurációt. Az 1/a. ábrán ?-lel jelölt metszéspontok léteznek, mert $T_1A_1 || B_1T_2$ miatt $T_1A_2 \nparallel A_1T_2$ és $T_1B_2 \nparallel B_1T_2$. (Itt $XY$ az $X$ és $Y$ pontokon átmenő egyenest jelöli, $||$ a párhuzamosságot.) Az 1/b. ábrán ezeket rendre $A_3$-mal és $B_3$-mal jelöltük. Így $l_1 || l^*$ kell legyen, mert különben $A_1$, $A_2$, $A_3$ és $B_1$, $B_2$, $B_3$, $l_1 \cap l^*$ centrumú $T_1$, $T_2$, $T_3$ tengelypontú Desargues-konfigurációt alkotna, amiből (*) miatt $l_1 \cap l^* \in l_2$ következne, ellentmondva $l_1 || l_2$-nek.

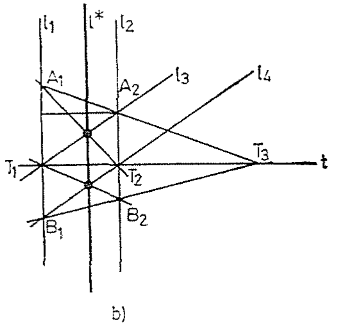
Mivel $T_1$-et $T_2$-t és $B_1$-et fixen tartva, ha $T_3$ befutja $t - \{T_1, T_2\}$ pontjait, akkor $B_2$ és így $B_3$-ra $q - 3$ lehetőség adódik, így $l_3$-ra szintén ennyi. Kapjuk tehát, hogy az $l_1$-gyel párhuzamos egyenesek közül legfeljebb egy nem megy át $l_1$ és $l_2$ (**P**-beli) metszéspontján. Ebből az 1. lépés triviálisan következik.

Ha $l$ egyenese **A**-nak, akkor jelöljük $i(l)$-lel azt a **P**-beli pontot, amelyre $l || l^*$ esetén $i(l) \in l \cap l^*$ (ideális pont).

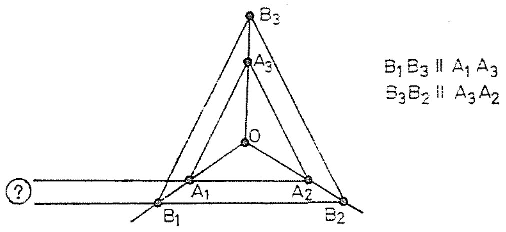
*2. lépés:* Ha $l_1 \nparallel l_2$, akkor $i(l_1)$ és $i(l_2)$ összekötő egyenesének nincs **A**-hoz tartozó pontja.




*1/a. ábra*




*1/b. ábra*




*2. ábra*

A 2. lépés csaknem nyilvánvaló, így nem bizonyítjuk.

*3. lépés:* Az $i(l)$ „ideális pontok" $\mathbf{P}$-ben egy egyenesre illeszkednek. Ugyanis a 2. ábrán szereplő ?-es metszéspont nem lehet $\mathbf{A}$-beli, így $\mathbf{P}$ desarguesi volta miatt és $A_1$, $A_2$, $A_3$ tetszőleges választása miatt kész vagyunk.

*Definíció:* Legyen $\mathbf{P}$ projektív sík $l$ egyenese $\mathbf{P}$-nek $A_1 \in l$, $A_2 \notin l$ két pont. A $(\mathbf{P}^* = ((\mathbf{P} \setminus l) \cup \{A_1\}) \setminus \{A_2\}$, $\mathbf{B}^* = \{B \subset \mathbf{P}^* | \exists r$ egyenese $\mathbf{P}$-nek, hogy $B = r \cap \mathbf{P}^*\}, \in)$ illeszkedési struktúrát affin konfigurációnak nevezzük.

Érdekes tény, hogy az affin síkok és affin konfigurációk éppen azok az $n^2$-pontú halmazok, amelyek $n^2 + n$ egyenest feszítenek ki (l. Bruen [3]).

Az 1. Tétel bizonyításának módszerével megkaphatjuk Korchmáros és Bichara affin konfigurációk beágyazásáról szóló tételének egy elemi bizonyítását is.

Másodrendű affin sík beágyazásáról semmit nem lehet mondani, minden négyszög az, harmadrendű síkokról szól Korchmáros és Bichara alábbi tétele:

*2. Tétel:* (l. [2], Lemma 1.): Papposzi (a $K$ kommutatív testre épített) projektív síkba kétféleképpen ágyazható harmadrendű affin sík:

(I) Kiegészíthető projektív részsíkká.

(II) $K$ karakterisztikája $\neq 3$, $x^2 - x + 1$ reducibilis $K$ felett és a beágyazott affin sík az $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ harmadrendű görbe kilenc inflexiós pontja.

A bizonyítás koordináta-geometriai, most elhagyjuk. Megjegyezzük, hogy a 2. Tételből a beágyazás egyértelműsége is következik. A 2. Tétel (II) esete leghamarabb $PG(4)$-ben fordul elő, ekkor a beágyazott $AG(3)$ pontjai egy unitárius polaritás autokonjugált pontjai.

## Irodalom

1. Bichara, A.—Korchmáros, G.: Note on $(q + 2)$-sets in a Galois Plane of Order q. Annals of Discrete Math. *14*, 1 (1982)
2. Bichara, A.—Korchmáros, G.: $n^2$-sets in a Projective Plane which Determine Exactly $n^2 + n$ Lines. Journal of Geom. *15*, 73 (1980)
3. Bruen, A. A.: The number of lines determined by $n^2$ points. JCT. *15*, 225 (1973)

4. Hy, N. M.: Páratlan rendű affin Galois-síkok ellipszise, mint affin szabályos sokszög. Mat. Lapok. *23*, 303 (1973)
5. Korchmáros, G.: Poligoni affin-regolari nei piani di Galois d'ordine dispari. Rend. Acc. Naz. Lincei. *56*, 690 (1974)
6. Korchmáros G.: On $n^2$-sets of Type (0,1, n) in Projective Planes, Journal of Geom. *15*, 175 (1980)
7. Segre, B.: Ovals in a finite projective plane. Canad. J. of Math. *7*, 414 (1954)

Szőnyi Tamás tudományos segédmunkatárs
Wettl Ferenc tudományos ösztöndíjas