ÜBER DAS ELASTIZITÄTSGESETZ UND DIE POISSONSCHE ZAHL VON GUMMIELASTISCHEN WERKSTOFFEN

Von

Ö. PÓSFALVI

Lehrstuhl für Mechanik, Fakultät für Verkehrswesen, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 14. Januar 1982

Vorgelegt von Prof. Dr. P. MICHELBERGER

Gummiartige Stoffe haben infolge ihrer sehr guten mechanischen Eigenschaften in der Industrie besonders bei Kraftfahrzeugen besondere Bedeutung. Diese Körper zeichnen sich durch ihre Volumkonstanz aus bei Einwirkung von verhältnismäßig kleinen Spannungen die elastische Verformung verursachen.

Bei der Behandlung gummiartiger Körper nach der linearen Elastizitätstheorie finden mehrere Materialkenngrößen Anwendung, darunter die Poissonsche Zahl. Definitionsgemäß ist die Poissonsche Zahl der Quotient der spezifischen Dehnungen in Quer- und Längsrichtung im einachsigen Spannungszustand eines linear-elastischen Stoffes.

Es ist bekannt, daß bei Berücksichtigung des vollen Formänderungsbereichs sich der homogene isotrope Gummi als ein nichtlinearer elastischer Körper verhält, weshalb das lineare Materialgesetz für gummiartige Körper nur im anfänglichen Formänderungsbereich der als linear betrachtet werden darf, Geltung hat. Es stellt sich also die Frage, wie die klassische Poissonsche Zahl im Falle von Gummi außerhalb der Anfangszone der Formänderung interpretiert werden kann? Wir haben versucht diese Frage durch die im weiteren beschriebenen Untersuchungen zu beantworten.

Das geradlinige rechtwinklige Koordinatensystem $K(OX_1X_2X_3)$ sei das Bezugssystem der Formänderungs — Hauptachsen, dessen Achsen durch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_a$ angegeben sind ($a = 1, 2, 3$). In dem genannten Koordinatensystem werden die Poissonschen Zahlen nach folgenden Gleichungen interpretiert

$$\sigma_a \neq 0 \tag{1}$$

$$\sigma_b = \sigma_c = 0 \tag{2}$$

$$\nu_{ab} = \left| \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} \right| \tag{3}$$

$$\nu_{ac} = \left| \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_a} \right| \tag{4}$$

$(a \neq b \neq c)$

$(a, b, c = 1, 2, 3)$

Die Kontinuummechanik lehrt, daß die Poissonsche Zahl eines homogenen isotropen inkompressiblen und linear elastischen Körpers $\nu = 0{,}5$ beträgt [1, 2].

$$\nu_{ab} = \nu_{ac} = \nu = 0{,}5 \tag{5}$$

Bei der Prüfung natürlichen Weichgummis wurde von Wood und Martin für die Poissonsche Zahl der Wert festgestellt, der den theoretischen Wert von Toth [3] gut annähert (Tabelle 1, Zeile 2). Bei der Prüfung verschiedener Gummis wurden von Frye für die Poissonsche Zahl die in Tab. 1 Zeilen 3—7 angegebenen Werte festgestellt [4]. Da jedoch die experimentelle Ermittlung der Poissonschen Zahl ν umständlich ist, berechnet man diesen Wert in Kenntnis der einfacher messbaren Moduln E und G [5].

Tabelle I

Die geprüften Werte der P. Zahl der Gummis

Werkstoff	Poissonsche-Zahl	Bemerkung
Weicher Gummi	$\nu = 0{,}49989$	Nach Wood und Martin [3]
Natürlicher Gummi	$\nu = 0{,}49935$	Nach Frye [4]
Butadien und Styren	$\nu = 0{,}49894$	
Butil Gummi	$\nu = 0{,}49691$	
Neopren	$\nu = 0{,}49950$	
Nitril Gummi	$\nu = 0{,}49712$	

1. Physikalische Gleichung des Gummis

Die genaue Gleichung der Volumenkonstanz eines Festkörpers lautet bei homogener endlicher Formänderung:

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = 1 \tag{6}$$

wo

$$\lambda_a = 1 + \varepsilon_a$$

$$\lambda_b = 1 + \varepsilon_b$$

$$\lambda_c = 1 + \varepsilon_c$$

Ausdrücke der Dehnungsverhältnisse sind

$(a \neq b \neq c)$

$(a, b, c = 1, 2, 3)$

Die Poissonsche Zahl ν eines gummiartigen Körpers kann auch nach Cauchy-Green aufgrund der skalaren Invarianten des Formänderungstensors angegeben werden. Diese Invarianten beziehen sich auf einen, nichtlinear elastischen gummiartigen Stoff [6], [2]:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\lambda) &= \lambda_a^2 + \lambda_b^2 + \lambda_c^2 \\ \mathrm{II}(\lambda) &= \lambda_a^2 \lambda_b^2 + \lambda_b^2 \lambda_c^2 + \lambda_c^2 \lambda_a^2 \\ \mathrm{III}(\lambda) &= (\lambda_a \lambda_b \lambda_c)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

(a $\neq$ b $\neq$ c)
(a, b, c = 1, 2, 3)

Die Formänderungsenergie-Dichtefunktion w eines gummiartigen Körpers wird nach Kawabate [7] mit den Invarianten (7) wie folgt angegeben:

$$w = w\,[\mathrm{I}(\lambda), \mathrm{II}(\lambda), \mathrm{III}(\lambda)] \tag{8}$$

Schreiben wir z. B. den Ausdruck der relativen Spannung σ_a nach Gl. (8) auf

$$\sigma_a = \frac{\partial w}{\partial \lambda_a} = \frac{\partial w}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial w}{\partial II}\frac{\partial II}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial w}{\partial III}\frac{\partial III}{\partial \lambda_a} \tag{9}$$

(a = 1, 2, 3)

Unter Berücksichtigung von (7) ergibt sich die symbolische Form der physikalischen Gleichung eines gummiartigen Körpers zu:

$$\sigma_a = 2\lambda_a\left[\frac{\partial w}{\partial I} + (\lambda_b^2 + \lambda_c^2)\frac{\partial w}{\partial II} + \lambda_b^2\lambda_c^2\frac{\partial w}{\partial III}\right] \tag{10}$$

(a $\neq$ b $\neq$ c)
(a, b, c = 1, 2, 3)

Das physikalische Gleichungssystem des Gummis lautet nach Elimination von λ_3

$$\sigma_1 = 2\lambda_1\left[\frac{\partial w}{\partial I} + \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\frac{\partial w}{\partial II}\right] \tag{11}$$

$$\sigma_2 = 2\lambda_2\left[\frac{\partial w}{\partial I} + \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\frac{\partial w}{\partial II}\right] \tag{12}$$

$$\sigma_3 = \frac{2}{\lambda_1\lambda_2}\left[\frac{\partial w}{\partial I} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\frac{\partial w}{\partial II}\right] \tag{13}$$

Durch das Gleichungssystem (11) (12) (13) des Gummis wird also das mechanische Verhalten eines elastischen Körpers bei dreiachsigem Spannungszustand beschrieben.

Die allgemeinste Form der physikalischen Gleichung gummiartiger Stoffe ist nach *Halász* [2]:

$$\sigma_a = \frac{\partial w}{\partial \lambda_a} + \frac{p}{\lambda_a} \tag{14}$$

(a = 1, 2, 3)

wo p die für den hydrostatischen Druck kennzeichnende Konstante ist.

2. Die Poissonsche Zahl für gummiartige Stoffe

Bestimmt man die Poissonsche Zahl im einachsigen Spannungszustand $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, so erhält man aus (12) (13) für die Dehnungsverhältnisse den Ausdruck

$$(\lambda_1 \lambda_2^2 - 1)(\lambda_1 \lambda_2^2 + 1) = 0 \tag{15}$$

Wird Gleichung (14) unter der Bedingung nach den Hauptspannungen $\sigma_1 > 0$ und $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ gelöst, so gelangt man im Prinzip auf einem anderen Weg zu den Ausdruck (15).

Unter Berücksichtigung von (1) (3) (15) ergibt sich die Gleichung der Poissonschen Zahl zu

$$\nu(\lambda_1) = \left| \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}(\sqrt{\lambda_1} + 1)} \tag{16}$$

wo $\lambda_1 \geq 1$

Das Ergebnis (16) lenkt die Aufmerksamkeit darauf, daß die Poissonsche Zahl eines gummiartigen Körpers eine formänderungsabhängige Materialkenngröße ist. Nach (16) wird die Poissonsche Zahl $\nu(\lambda_1)$ bei Formänderung durch eine monoton abnehmende Funktion beschrieben (Abb. 1).

Um die Beziehung zwischen (5) und (16) zu untersuchen, bestimmen wir den auf den Formänderungsbeginn bezogenen Grenzwert ($\lambda_1 = 1$) des Ausdrucks (16)

$$\lim_{\lambda_1 \to 1} \nu(\lambda_1) = \nu(1) = 0{,}5 \tag{17}$$

Aus den Ergebnissen (5) (17) ist zu erkennen, daß die Poissonschen Zahlen für einen linear elastischen Körper und für einen gummiartigen Körper zu Beginn der Formänderung gleich sind.

In den Zeilen 1 und 2 von Tabelle II. sind die berechneten diskreten Werte von λ_1 sowie der Funktion (16) $\nu(\lambda_1)$ im Dehnungsbereich $1 \leq \lambda_1 \leq 1{,}5$ zusammengefaßt.

Nach dem Schrifttum wurde die Poissonsche Zahl $\nu(\lambda_1)$ inkompressibler gummiartiger Stoffe von Freudenthal [8] experimentell untersucht. Die von ihm erhaltenen Ergebnisse beziehen sich auf das Dehnungsverhältnis $\lambda_1 = 1{,}5$

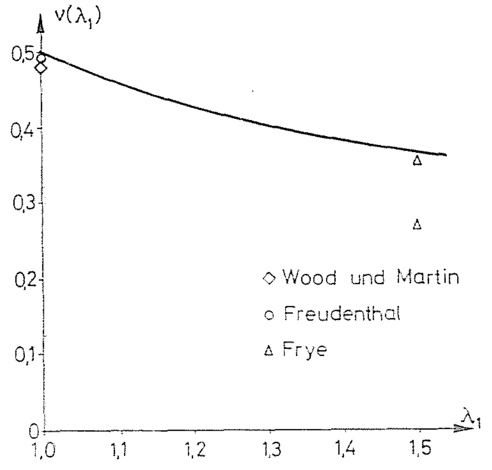

Abb. 1. Die Funktion der Poissonschen Zahl des Gummis $\nu(\lambda_1)$

(Tabelle II. Zeilen 3 und 4). Die mechanischen Eigenschaften des Gummis werden im Bereich der Kristallisierung verändert. Das Ergebnis in Zeile 4. bezieht sich auf einen solchen Sonderfall.

Tabelle II

Werte der Poissonschen Zahl $\nu(\lambda_1)$

λ_1	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\nu(\lambda_1)$	0,5000	0,4653	0,4356	0,4098	0,3871	0,3670
$\nu(\lambda_1)$	Nach Freudenthal [8]					0,3650
$\nu(\lambda_1)$						0,2671

Zusammenfassung

Eine der klassischen Materialkenngrößen der linearen Elastizitätslehre ist die Poissonsche Zahl. Betrachtet man den vollen Formänderungsbereich, so verhalten sich die gummiartigen Körper als nichtlinear elastische Stoffe, und es stellt sich die Frage, wie in diesem Falle die Poissonsche Zahl zu interpretieren sei? In einachsigem Spannungszustand wurde das physikalische Gleichungssystem des Gummis untersucht und aufgrund der Beziehung zwischen den Dehnungsverhältnissen die für Gummi kennzeichnende Poissonsche Zahl ermittelt. Der Zahlenwert einer solchen Materialkenngröße ist von der Formänderung abhängig, ihre Tendenz wird im Laufe der Deformation durch eine monoton abnehmende Funktion beschrieben.

Literatur

[1] MUTTNYÁNSZKY, Á.: Festigkeitslehre.* Műszaki Kiadó, Budapest, 1981.
[2] HALÁSZ, L.—MOLNÁR, I.—MONDVAI, I.: Rheologische Grundlagen der Verarbeitung von Polymeren.* Műszaki Kiadó, Budapest, 1978.
[3] TÓTH, L.: Építés-Építészettudomány *61*, (1974) 165.
[4] HARRIS, C. M.—CREDE, CH. E.: Schock and Vibration Handbook. McGraw-Hill Book Company, New York, 1976.
[5] KALISZKY, S.: Plastizitätslehre.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
[6] GREEN, A. E.—ADKINS, J. E.: Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics. Clarendon Press, Oxford, 1960.
[7] KAWABATA, S.—KAWAY, H.: Advances in Polymer Science, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1977.
[8] FREUDENTHAL, A. M.: Introduction to the Mechanics of Solids. John Wiley and Sons, New York, 1966.
[9] PÓSFALVI, Ö.: Kautschuk und Gummi. Kunststoffe. *28*, (1975) 580.

Dr. Ödön PÓSFALVI H-1521 Budapest

* In ungarischer Sprache.