

VEREINFACHTE TRÄGERROSTBEMESSUNG UNTER ANWENDUNG STATISCH UNBESTIMMTER GRUNDSYSTEME

Von

V. BALOGH

Lehrstuhl für Schienenfahrzeuge,
Technische Universität Budapest

Eingegangen am 4. Juni, 1979

Vorgelegt von Prof. Dr. K. HORVÁTH

I. Einführung

Für die Festigkeitsberechnung von Trägerrosten sind zahlreiche Verfahren bekannt, deren Weiterentwicklung und Verfeinerung heutzutage ziemlich begrenzt ist. Trotzdem hat dieser Themenkreis einen aktuellen Charakter, da die Ausarbeitung der zu den Gewichtsverminderungsansprüchen von Konstruktionen ähnlichen Charakters beitragenden genaueren Berechnungsverfahren durch ökonomische Gesichtspunkte dauernd auf der Tagesordnung erhalten werden.

Unten den Trägerrosten stellt das Untergestell von Schienenfahrzeugen einen speziellen Typ dar. Während des Betriebes des Fahrzeuges wirkt auf diese Konstruktion ein räumliches Kräftesystem. Die Beanspruchung der Untergestellkonstruktion ergibt sich als Summe folgender Komponenten:

- a. in senkrechter Ebene wirken die Kräfte, die sich aus den infolge der dynamischen Einwirkungen vergrößerten Eigengewichten und aus der Nutzlast ergeben;
- b. in horizontaler Ebene wirken die mit der Fahrzeuginnenachse parallelen Zug- und Stoßkräfte, bzw. die auf diese senkrecht auftretenden Seitenkräfte verschiedener Richtung.

Im allgemeinen ergibt sich bei Schienenfahrzeuguntergestellen die größte Beanspruchung aus der Stoßbelastung, da die für die Berechnung vorgeschriebenen Stoßkräfte fast ausnahmslos eine höhere Spannung als die senkrechten dynamischen Kräfte in der Konstruktion hervorrufen. Durch diese Tatsache, ergänzt dadurch, daß heutzutage bei der Berechnung von Schienenfahrzeugen die Untergestellabänderung infolge des Einbaues von Mittelpufferkupplungen eine wichtige Aufgabe ist, wird die Aufmerksamkeit in erhöhtem Maße auf die Untersuchung der infolge von Stoßbelastungen auftretenden Beanspruchungen gerichtet.

Meistens hat das Untergestell sowohl in Längs-, als auch in Querrichtung einen symmetrischen Aufbau. Da die Stoßpufferkräfte ebenfalls symmetrisch, bzw. bei diagonaler Stoßpufferbelastung antimetrisch sind, kann die

Festigkeitsberechnung in bedeutendem Maße vereinfacht werden. Trotz den Vereinfachungen kann es jedoch vorkommen, daß wegen des relativ komplizierten Untergestellträgersystems eine mehrfache statische Unbestimmtheit auftritt. Dadurch kann die Festigkeitsberechnung wegen der begrenzten Rechnerkapazität in konventioneller Weise, also unter Anwendung statisch bestimmter Grundsysteme, nicht durchgeführt werden.

In diesen Fällen, bzw. für die schnelle Festigkeitsberechnung einfacher Untergestellkonstruktionen, kann zweckmäßig das im folgenden gezeigte, auf kongruenter Matrixtransformation basierende und Modelle mit statisch unbestimmten Grundsystemen verwendende — ansonsten bekannte — Bemessungsverfahren angewendet werden (1).

2. Die Anwendungsmöglichkeit von statisch unbestimmten Grundsystemen bei der Bemessung auf Stoßpufferbelastung von Schienenfahrzeuguntergestellen

Im allgemeinen bestehen die Untergestelle von Schienenfahrzeugen aus in einer horizontalen Ebene liegenden Längs- und Querträgern, bzw. aus mit diesen einen gegebenen Winkel einschließenden sog. Diagonalträgern.

Untersucht man die Festigkeitsverhältnisse der Untergestellelemente, so kann festgestellt werden, daß ein bedeutender Teil der Stoßpufferbelastung im wesentlichen durch einen, sich aus den hauptsächlich lasttragenden Untergestellelementen ausgestaltenden, viereckigen, geschlossenen Rahmen aufgenommen wird. Bei zweiachsigen Fahrzeugen wird dieser Rahmen aus den beiden Längsträgern und aus den Querträgern, bei Drehgestellfahrzeugen mit oder ohne Mittelpufferkupplung aus den Hauptquerträgern und aus dem stärksten Längsträgerpaar gebildet.

Diese — als Grundrahmen bezeichnbare — Konstruktion wird durch weitere Längs-, Quer- und Diagonalträger des Untergestells versteift.

Wird während der Festigkeitsberechnung die belastungstragende Rolle der Träger nach der aufgeführten Betrachtungsweise berücksichtigt, so können für die Berechnung Modelle mit statisch unbestimmten Grundsystemen angewendet werden.

Das zusammengesetzte Untergestellssystem kann mit Hilfe der statisch unbestimmten Grundsysteme in Teilsysteme zerlegt werden, wodurch komplizierte Berechnungen wesentlich vereinfacht werden.

Gemäß dem darzulegenden Verfahren ist die Aufnahme dreier Teilsysteme vorteilhaft.

Der die äußere Belastung aufnehmende Grundrahmen bildet das erste Teilsystem, das zweite wird durch den mit den Quer- oder Längsträgern versteiften Grundrahmen und das dritte durch den mit Quer- und Längsträgern versteiften Grundrahmen gebildet.

Die Zerlegung des Untergestells in Teilsysteme ist der kongruenten Matrixtransformation des bei der Festigkeitsberechnung mit statisch bestimmten Grundsystemen auftretenden Formänderungs-Gleichungssystems gleichwertig (1). Nach diesem Verfahren zerfällt die Kompatibilitätsgleichung des in Abb. 1a gezeigten Untergestellmodells mit $p = 2n + t + 1$ Unbekannten entsprechend den Teilsystemen in Gleichungssysteme mit 1, $2n$ und t Unbekannten.

Das in Abb. 2a gezeigte Untergestellmodell besteht aus n Querträgern, die Anzahl der äußeren und inneren Längsträgerabschnitte zwischen den Querträgern beträgt t . Die Längsträger nehmen gemäß der Abbildung nur Druck- und Zugbelastungen auf.

3. Die Grundtypen von Schienenfahrzeuguntergestellen und die für die allgemeine Festigkeitsberechnung erforderlichen Untergestellkenngrößen

Die bei der Festigkeitsberechnung von Schienenfahrzeuguntergestellen verwendeten Modelle können in zwei Haupttypen eingereiht werden.

Beim ersten Typ verbinden relativ starke Querträger die mit der Fahrzeuginnenachse parallelen Hauptträger miteinander, und die Steifigkeit der weiteren Längsträger ist wesentlich kleiner als die der Hauptlängsträger (Abb. 1a). Für den zweiten Typ ist kennzeichnend, daß die Steifigkeit der Hauptlängsträger und die der weiteren Längsträger ähnlich sind, und relativ schwache Querträger die Längsträger miteinander verbinden (Abb. 1b).

Um die Steifigkeitsunterschiede zu betonen, werden in den Abbildungen die Träger kleiner Steifigkeit durch Gelenkstäbe modelliert.

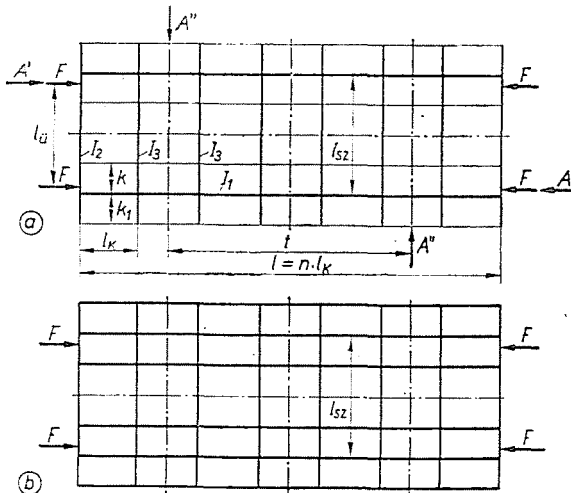


Abb. 1. Die bei der Festigkeitsberechnung von Schienenfahrzeuguntergestellen angewendeten Modelle

Aus den Querschnittsdaten der Trägerelemente und aus den geometrischen Daten des Untergestells können dimensionslose Verhältniszahlen abgeleitet werden. Mit ihrer Hilfe werden die allgemeingültigen Zusammenhänge der Festigkeitsberechnung mit statisch unbestimmten Grundsystemen aufgestellt.

Die Bedeutung der in den Abb. 1a und 1b verwendeten Kurzbezeichnungen:

- l Länge der Hauptlängsträger
- l_{sz} Abstand zwischen den Hauptlängsträgern
- $l_{\ddot{u}}$ Mittellinienabstand der Stoßpuffer = 1,75 m
- t Achs- oder Drehzapfenabstand (bei zweiachsigen oder bei Fahrzeugen mit Drehgestellen)
- l_k Teilung der Querträger
- k Abstand zwischen dem inneren Längs- und dem Hauptlängsträger
- k_1 Abstand zwischen dem äußeren Längs- und dem Hauptlängsträger
- F Belastung pro Stoßpuffer (1000 oder 1250 kN)
- A Diagonalbelastung pro Stoßpuffer (500 kN)
- $A' = A \frac{l_{\ddot{u}}}{t}$ = die aus der Diagonalbelastung in der Achslinie entstehende Reaktionskraft
- I_1 Trägheitsmoment der Hauptlängsträger
- I_2 Trägheitsmoment der Stirnwandträger
- I_3 Trägheitsmoment der Querträger

Die aus den geometrischen Maßen des Untergestells und aus den Querschnittsdaten abgeleiteten Verhältnißzahlen sind: (2)

$$a = \frac{t}{l_{sz}}; \quad k = \frac{1,75}{l_{sz}}; \quad c = \frac{1}{l_{sz}}; \quad d = \frac{I_2}{I_1}$$

$$e = \frac{I_2}{I_3}; \quad f = \frac{l_k}{l_{sz}}; \quad g = \frac{k}{l_{sz}} \left(g_1 = \frac{k_1}{l_{sz}}, \dots, g_n = \frac{k_n}{l_{sz}} \right).$$

4. Die Teilsysteme mit statisch unbestimmten Grundsystemen der Untergestelle

4.1 Das erste Teilsystem der Untergestellkonstruktion

Das erste Teilsystem wird bei der Festigkeitsberechnung mit statisch unbestimmten Grundsystemen durch den statisch unbestimmte Grundrahmen gebildet, der die auf das Untergestell wirkenden Stoßpufferkräfte aufnimmt.

Gemäß den Bemessungsvorschriften können die Schienenfahrzeuguntergestelle mit dreierlei Stoßpufferkräften belastet werden. Bei den konventionellen, mit Seitenstoßpuffern ausgerüsteten Fahrzeugen soll pro Stoßpuffer

mit einer symmetrischen Stoßpufferkraft von 1000—1000 kN, bzw. bei Lokomotiven und bei Güterwagen mit großen Traglasten von 1250—1250 kN, oder aber mit einer diagonalen Stoßpufferkraft von 500—500 kN Größe gerechnet werden. Den Vorschriften gemäß sollen bei den Fahrzeugen mit Mittelpufferkupplung in der Linie der Untergestellachsachse 2000 kN. bzw. 2500 kN wirken.

Abb. 2 zeigt die infolge der dreierlei Stoßpufferbelastungen des Grundrahmens entstehenden Momentenverläufe in Abhängigkeit von der drehgestellspezifischen Verhältniszahlen. Abb. 2a zeigt den Einfluß der äußeren, Abb. 2b den der zentralen und Abb. 2c den der diagonalen Stoßpufferkräfte.

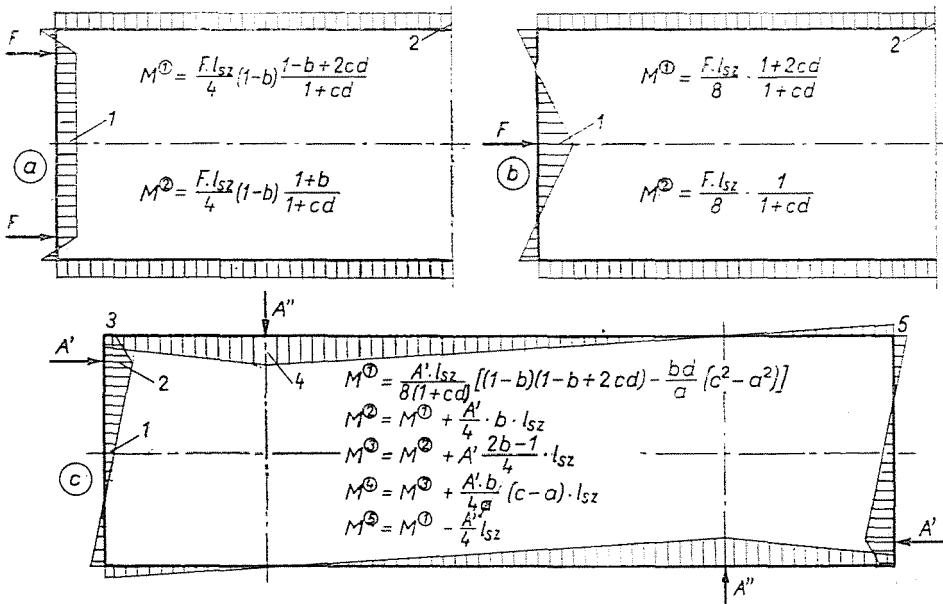


Abb. 2. Die Beanspruchungsdiagramme aus verschiedenen Stoßpufferbelastungen des Grundrahmens

Die Zusammenhänge setzen Grundrahmenseiten mit abschnittsweise konstanten Trägheitsmomenten voraus, die im allgemeinen der Wirklichkeit entsprechen.

Die Beanspruchungsdiagramme des ersten Teilsystems der beiden Untergestellgrundtype sind in gleicher Weise verwendbar, gleichzeitig weichen aber die Beanspruchungsdiagramme des zweiten und des dritten Teilsystems der beiden Untergestelltypen wesentlich voneinander ab.

4.2 Das zweite Teilsystem der Untergestellkonstruktion

Dieses Teilsystem berücksichtigt den Einfluß der sich an den Grundrahmen anschließenden biegesteifen Träger. Dementsprechend werden die Momentendiagramme beider Untergestellgrundtypen einen unterschiedlichen Aufbau haben.

4.21 Das zweite Teilsystem der Untergestelle mit starken Querträgern und schwachen Längsträgern

Die Untergestelle mit dem genannten Aufbau sind bei symmetrischer Stoßpufferbelastung je Querträger statisch zweifach, bei diagonaler Stoßpufferbelastung aber statisch dreifach unbestimmt. Der letztere Belastungsfall wird hier nicht behandelt.

In Abhängigkeit von den untergestellspezifischen Kennzahlen zeigt Abb. 3 den Einfluß der auf die Querträger wirkenden inneren Einheitsbelastungen auf den Grundrahmen. Die Zusammenhänge setzen konstante Querträgererteilung voraus, die der Wirklichkeit auch nahezu entspricht. Wegen der Längs- und Quersymmetrie der Untergestellkonstruktion und der Belastungen genügt die Darstellung nur eines Viertels des Modells.

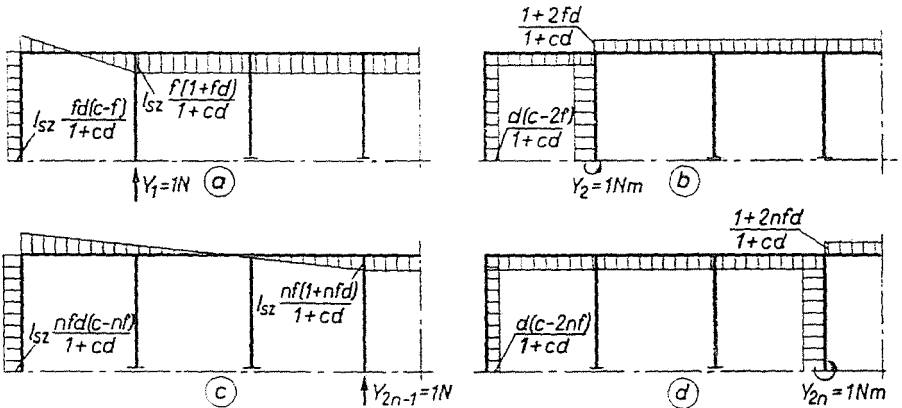


Abb. 3. Die am Grundrahmen infolge der auf die Querträger wirkenden inneren Einheitsbelastungen auftretenden Momente

In Abhängigkeit von den untergestellspezifischen Verhältniszahlen zeigen die Abb. 3a und b, bzw. 3c und d die Momentenverläufe, hervorgerufen durch die an der Stelle des ersten, bzw. des n -ten Querträgers wirkenden inneren Belastungen.

4.22 Das zweite Teilsystem der Untergestelle mit starken Längsträgern und schwachen Querträgern

Die Untergestelle diesen Typs sind bei symmetrischer Stoßpufferbelastung je Längsträger statisch zweifach, bei diagonaler Stoßpufferbelastung statisch dreifach unbestimmt.

Die letztere Belastungsart wird hier auch nicht untersucht.

Die Beanspruchungsdiagramme der auf die Längsträger wirkenden inneren Einheitsbelastungen zeigt Abb. 4. Bei übereinstimmenden Längs-

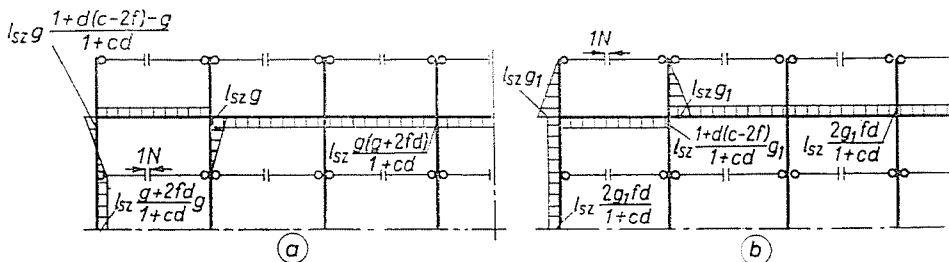


Abb. 4. Die am Grundrahmen infolge der auf die Längsträger wirkenden inneren Einheitsbelastungen auftretenden Momente

hauptträgerträgheitsmomenten hängt die Größe der Momente je Längsträgerpaar nur von den Abständen zwischen den Längshauptträgern und den inneren und äußeren Längsträgern ab.

Den Einfluß der inneren Belastungen zeigt Abb. 4a in einem Aufschnitt eines inneren Längsträgers. Abb. 4b zeigt denselben in einem Aufschnitt eines äußeren Längsträgers. Wegen der Längs- und Quersymmetrie der Konstruktion wurde hier nur ein Viertel des Untergestells dargestellt.

4.3 Das dritte Teilsystem der Untergestellkonstruktion

Dieses Teilsystem berücksichtigt den Einfluß der zug- und druckbelastungsaufnahmefähigen Träger kleiner Biegesteifigkeit, die zwischen dem Grundrahmen und den biegesteifen Trägern liegen. Dieses Teilsystem hat bei beiden Untergestelltypen ebenfalls unterschiedlichen Charakter.

4.31. Das dritte Teilsystem der Untergestelle mit starken Querträgern und schwachen Längsträgern

Bei diesem Untergestelltyp zeigt das dritte Teilsystem den auf den Grundrahmen ausgeübten Einfluß der an den Stellen der zwischen den Querträgern liegenden Längsträgerabschnitte wirkenden Einheitskräfte.

Abb. 5. zeigt die Beanspruchungsdiagramme des Untergestellviertels. Die Abbildungen zeigen auch den Einfluß der an den Längsträgerabschnitten innerhalb und außerhalb des Grundrahmens auftretenden Einheitsbelastungen.

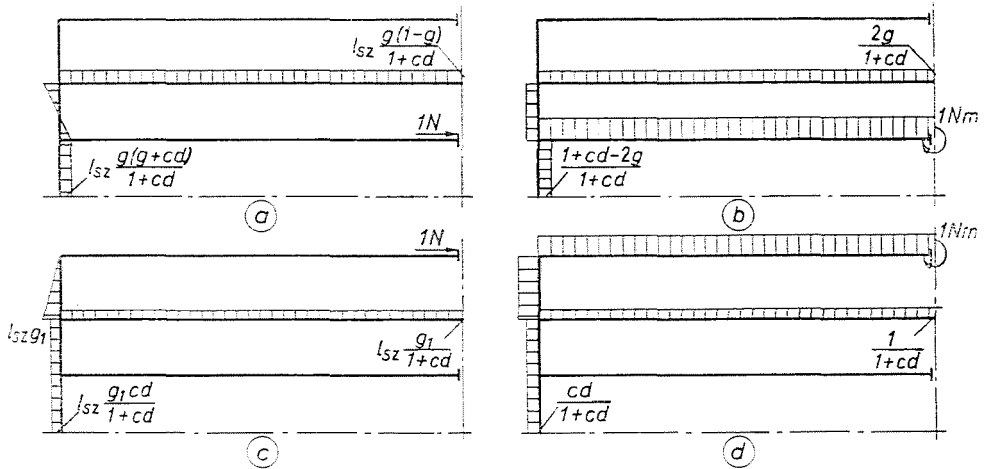


Abb. 5. Die am Grundrahmen infolge der an den Stellen der Längsträgerabschnitte zwischen den Querträgern wirkenden Einheitskräfte auftretenden Momente

4.32. Das dritte Teilsystem der Untergestelle mit starken Längsträgern und schwachen Querträgern

Die dritten Teilsysteme der Untergestelle mit dem angegebenen Aufbau zeigen den Einfluß der an den Stellen der zwischen den Längsträgern liegenden schwachen Querträgerabschnitten auftretenden Einheitsbelastungen.

Abb. 6 zeigt die Beanspruchungsdiagramme der entsprechenden Belastungen.

5. Die Verbindung von Untergestellteilsystemen mit statisch unbestimmtem Grundsystem

Die endgültige Beanspruchung der ursprünglichen Untergestellkonstruktion wird mit Hilfe der Verbindung der Teilsysteme bestimmt. Aus der Verbindung des zweiten und des dritten Teilsystems kann mit Hilfe der an den Stellen der schwachen Längs- bzw. Querträger wirkenden Einheitsbelastungen die Beanspruchung des mit starken Quer- und Längsträgern versteiften Grundrahmens bestimmt werden.

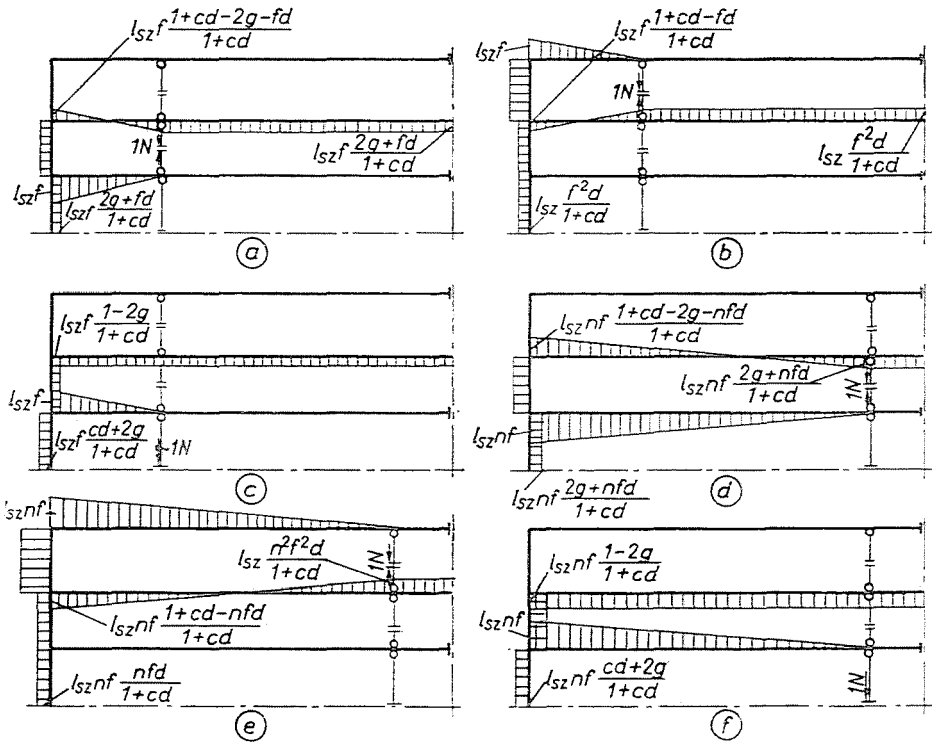


Abb. 6. Die am Grundrahmen infolge der an den Stellen der Querträgerabschnitte zwischen den Längsträgern wirkenden Einheitskräfte auftretenden Momente

Die so erhaltenen Beanspruchungsdiagramme können schon im nächsten Schritt als die Beanspruchungsdiagramme des Grundrahmens verwendet werden. Die äußeren Belastungsdiagramme des Grundrahmens stimmen mit den Beanspruchungsdiagrammen des ersten Teilsystems überein.

Mit Hilfe der äußeren und der Einheitsbelastungen kann die Größe der in den schwachen Längs- bzw. Querträgern auftretenden tatsächlichen Zug- und Druckbelastungen ermittelt werden, wodurch die Beanspruchung des ursprünglichen Untergestells berechnet werden kann.

6. Das Aufstellen in Matrizenform der Untergestellberechnung mit statisch unbestimmten Grundsystemen

Die Matrixdarstellung ermöglicht die allgemeine Formulierung der im vorigen gezeigten Methode, wodurch die Festigkeitsberechnung mit Hilfe von Rechenanlagen durchgeführt werden kann. Die Daten der Untergestell-teilsysteme können in den folgenden Matrizen zusammengefaßt werden:

- A** Die dem ersten Teilsystem entsprechende, die sich aus den auf den Grundrahmen wirkenden äußeren Belastungen ergebenden Beanspruchungen beinhaltende Matrix.
- C** Diese Matrix faßt die Daten der Einheitsbelastung des ersten Teilsystems zusammen. Sie beinhaltet bei Untergestellen mit starken Querträgern die aus bei den Durchschneidungen der Querträger wirkenden Einheitsbelastungen entstehenden Beanspruchungen, und bei Untergestellen mit starken Längsträgern die Beanspruchungen aus an den Aufsnitten der Längsträger wirkenden Einheitsbelastungen.
- D** Diese Matrix beinhaltet die Einheitsbelastungsdaten des dritten Teilsystems. Sie beinhaltet bei Untergestellen mit starken Querträgern die aus an den Stellen der schwachen Längsträgerabschnitte wirkenden Einheitsbelastungen entstehenden Beanspruchungen; bei den Untergestellen mit starken Längsträgern die Beanspruchungen aus an den Stellen der schwachen Querträger wirkenden Einheitsbelastungen.
- R** Die Längs- und Steifigkeitsdaten des vollständigen Untergestellmodells beinhaltende Federmatrix.

In allen Matrizen ist die Anzahl der Zeilen gleich, hängt also von der Anzahl der Trägerabschnitte ab. Natürlich bedeutet die Längs- und Quersymmetrie des Untergestells eine Vereinfachung der Matrizen.

Die Anzahl der Spalten der einzelnen Matrizen ist verschieden:

- die Spaltenanzahl der Matrix **A** stimmt mit der Anzahl der Stoßpufferbelastungsarten überein;
- bei symmetrischer Stoßpufferbelastung ist die Spaltenanzahl der Matrix **C** bei den Untergestellen mit starken Querträgern doppelt so groß wie die Anzahl der durchgeschnittenen Querträger. Bei Untergestellen mit starken Längsträgern ist die Spaltenanzahl der Matrix **C** das Doppelte der durchgeschnittenen Längsträger.
- Die Spaltenanzahl der Matrix **D** hängt bei den Untergestellen mit starken Querträgern von der Anzahl der schwachen Längsträgerabschnitte bei denen mit starken Längsträgern aber von der Anzahl der schwachen Querträgerabschnitte ab.
- Die Federmatrix **R** ist eine Diagonalmatrix, ihre Zeilen- und Spaltenanzahlen stimmen also überein.

Die nachstehenden Gleichungen beschreiben die Verbindung der Teilsysteme miteinander:

Aus der Beziehung zwischen dem zweiten und dritten Teilsystem folgt:

$$\mathbf{C}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{C}^* \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

wobei die Elemente der Matrix **Y** die im zweiten Teilsystem unter dem Einfluß der Einheitsbelastungen im dritten Teilsystem entstehenden Belastungen sind.

Für Y gilt:

$$Y = - (C^* \cdot R \cdot C)^{-1} \cdot C^* \cdot R \cdot D$$

Da die Spaltenanzahl von D von der Anzahl der schwachen Untergestell-trägerabschnitte anhängt, ergibt sich für Y eine Anzahl von Lösungen, die jener der berücksichtigten »schwachen« Trägerabschnitte entspricht.

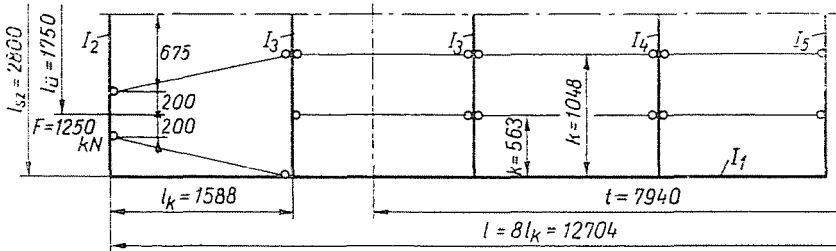
In die Matrix Y bekannt, können die resultierenden Belastungsdiagramme der Beziehung zwischen beiden Teilsystemen ermittelt werden. Ihre Werte beinhaltet die Matrix T . Für Matrix T gilt:

$$T = D + C \cdot Y = D - C (C^* \cdot R \cdot C)^{-1} \cdot C^* \cdot R \cdot D$$

Das Kompatibilitätsgleichungssystem des ursprünglichen Untergestells kann in Kenntnis der Matrix T aufgeschrieben werden:

$$T^* \cdot R \cdot T \cdot X + T^* \cdot R \cdot A = 0$$

$$X = - (T^* \cdot R \cdot T)^{-1} \cdot T^* \cdot R \cdot A$$



$I_1 = 5200 \text{ cm}^4$; $I_2 = 700 \text{ cm}^4$; $I_3 = 2060 \text{ cm}^4$; $I_4 = 314 \text{ cm}^4$; $I_5 = 288 \text{ cm}^4$
 $a = 2.84$; $b = 0.625$; $c = 4.54$; $d = 0.135$; $e_1 = 0.34$; $e_2 = 2.23$; $e_3 = 2.43$;
 $f = 0.567$; $g_1 = 0.116$; $g_2 = 0.2$; $g_3 = 0.259$; $g_4 = 0.374$

Abb. 7. Das Modell und die untergestellspezifischen Verhältniszahlen des zu berechnenden Untergestells

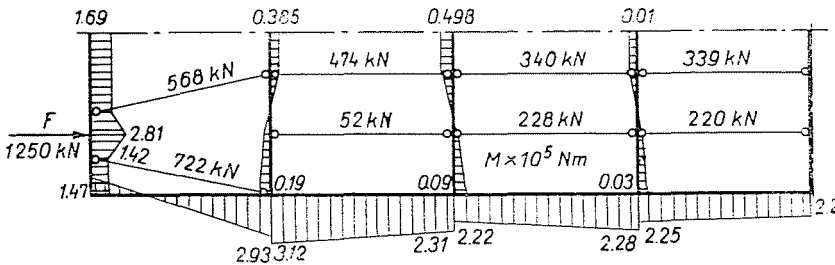


Abb. 8. Die endgültige Beanspruchung des untersuchten Untergestells

Die Elemente der Matrix X werden durch die in den schwachen Längs- und Querträgern des Untergestells auftretenden, tatsächlichen Zug- und Druckkräfte gebildet. In Kenntnis dieser ergibt sich die endgültige Beanspruchung des Trägersystems zu:

$$M = [E - T(T^* \cdot R \cdot T)^{-1} \cdot T^* \cdot R] \cdot A$$

7. Rechenbeispiel

Als Anwendungsbeispiel der besprochenen Methode wird die Festigkeitsberechnung eines vierachsigen Güterwagenuntergestells gezeigt. Abb. 7 zeigt das Untergestellmodell und die untergestellspezifischen Verhältniszahlen. Die endgültige Beanspruchung der Konstruktion wurde in Abb. 8 dargestellt.

Zusammenfassung

Die Untergestellberechnungsmethode mit statisch unbestimmten Grundsystemen ermöglicht die Zerlegung der zusammengesetzten Konstruktion in Teilsysteme. Die Zerlegung in Teilsysteme ist der kongruenten Matrixtransformation des bei der Festigkeitsberechnung nach dem Kräfteverfahren entstehenden Kompatibilitätsgleichungssystems des vollständigen Untergestellsystems gleichwertig.

Die Anwendung der gezeigten Methoden ermöglicht die Festigkeitsberechnung von Untergestellen mit kompliziertem Aufbau auch mit Hilfe eines Kleinrechners.

Literatur

1. RUDNAI, G.: (Herausgeber) Leichtbaukonstruktionen in der Fahrzeug- und Maschinenindustrie (in ungarischer Sprache), Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
2. BALOGH, V.: Járűvek. Mezűgazdasági Gűpek **26**, 60 (1979)

Dr. Vilmos BALOGH H-1521 Budapest