СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ АВАРИЙНЫХ СИСТЕМ СКЛАДИРОВАНИЯ

П. ВАРЛАКИ

Институт техники и организации транспорта
Будапештского Технического Университета

Поступила: 5. апреля 1979 г.

Представлена: д-р. проф. Э. Боротваш

1. Введение

Тема данной работы: изучение стохастической модели, для оценки поведения так называемых «аварийных» систем складирования.

«Аварийной» называется та система складирования в функционировании которой можно различать по времени два периода. В периоде «покоя» работа склада по сути дела не отличается от работы обыкновенной системы складирования при «обычных условиях». Это состояние аварийной системы складирования называется *нормальным состоянием функционирования.*

В другом периоде работы поведение склада — независимо от его задачи — характеризуется различными необыкновенными положениями, которые совместно называются *особым состоянием функционирования.*

Соответственно нынешней и «исторической» складской деятельности складирование имело двойную функцию: с одной стороны выравнивание смещения фаз потребления и производства (закупки) по времени (нормальная функция), а с другой стороны — подготовка к появлению аварийного положения (которое можно предвидеть, но появляется оно редко и случайно) (особая функция).

В случае этого состояния функционирования наши «требования» к работе системы складирования[1] обычно очень строгие, значит нужно как можно точнее выполнять ряды требований, предписанных для особого состояния функционирования. Соответственно этому при описании поведения системы имеет особую роль определение того, с какой точностью может система достичь заданных целей, то есть с какой точностью может система удовлетворять ряду требований, определенных заранее и относящихся к различным ситуациям чрезвычайного характера.

Изучение нормального состояния функционирования аварийных систем складирования можно проводить с помощью стохастических моделей, кото-

[1] Поведение (функционирование) системы явно имеет стохастический характер, так как с одной стороны начальный момент особого состояния неопределён, и с другой стороны пропускающая способность системы обслуживания склада является случайной величиной.

рые годны для оценки поведения системы и о которых подробно говорилось в работах [13, 14, 15]. Поведение системы в особом состоянии функционирования можно моделировать используя теорию стохастических автоматов.

С помощью стохастической модели и алгоритма описанных в нынешней работе базируясь на оценке основных параметров системы-склада (вместимость, мощность системы обслуживания, стратегия регулирования запасов и т. д.) создаётся возможность оценки поведения систем складирования, работающих в необыкновенных ситуациях. Опубликованный метод можно выгодно использовать при планировании системы управления с помощью ЭВМ, которая обеспечивает непрерывное и адаптивное развитие системы аварийных складов.

2. Общая характеристика аварийных систем складирования

Понятие и характеристики поведения системы складирования как комплексной системы человек — машина и основные проблемы моделирования подробно изучались в работах [13, 14, 15]. Поэтому в этой работе будем заниматься особенностями аварийных систем складирования.

В особом состоянии функционирование аварийной системы складирования определяет ряд условий, определенных обычно заранее. Соответствующий элемент ряда указаний в каждом такте времени чётко фиксирует величину выдачи товаров какого-либо вида.

Особое состояние функционирования в зависимости от задач склада и от характера особого положения может получать различные практические интерпретации. Такие положения могут возникать, например:

— в складах, работу которых определяют особые заказы, требующие точного выполнения (склады, работающие на экспорт и т. д.), в случае появления ряда заказов, которое можно предвидеть, но нельзя знать, когда оно наступает,
— в складах лекарств в случае наступления эпидемий,
— в складах пищевых продуктов и продуктов, удовлетворяющих основные потребности, в складах сырья (например, силосное зернохранилище, склад строительных материалов) при наступлении предвидимых но появляющихся в незапно стихийных бедствий (наводнение, засуха и т. д.),
— в водохранилищах в случае засухи,
— в складах производительных систем в критических ситуациях,
— в торговых и сельскохозяйственных складах при особых рыночных положениях или при особых метеорологических и аграрных условиях,

— в системах хранения различных носителей энергии (нефть, уголь и т. д.) в случае затруднений энергоснабжения,
— в некоторых складах запчастей в случае затруднения работы систем, обеспечивающие коммунальные услуги, (напр., электроснабжение),
— в системах складирования, служащих для военных целей, у которых особое состояние практически может означать различные действительные военные положения, например: манёвры различного типа, учебная мобилизация, действительная мобилизация, боевая готовность различного уровня.

Перечисленные типы аварийных систем складирования в основном характеризуются тем, что в предвидимых и наступающих случайно и неожиданно ситуациях известен ряд требований по отношению к количеству и времени, которые надо выполнять в данном такте времени. В случае, например, военных складов это надо понять так, что для ситуаций различного типа имеются заранее разработанные ряды требований (приказов). (Например, ряд приказов содержится в закрытом конверте, который имеет соответствующий код).[2]

После прекращения особой «аварийной ситуации» система складирования вернётся к нормальному состоянию функционирования.

Аварийные системы складирования в нормальном состоянии функционирования должны удовлетворять следующим условиям: они должны удовлетворять обыкновенным условиям работы складов, а в особом состоянии функционирования они с некоторой надёжностью должны удовлетворять соответствующим рядам требований.

Описанное таким образом понятие аварийной системы складирования обширнее, чем обыкновенное понятие склада. Нормальное состояние функционирования аварийной системы складировании соответствует функционированию обыкновенных складов, значит другое состояние их функционирования можно считать за особенность, за предельный случай функционирования аварийных складов.

(Другой предельный случай аварийных систем складирования — когда система обладает лишь особым состоянием функционирования. Примером такого случая служат некоторые особые военные склады.)

3. Особенности поведения и изучения аварийной системы складирования

При моделировании поведения аварийной системы складирования, её особенности появляются в первую очередь при переходе от особого состояния функционирования к нормальным состояниям функционирования. Если

[2] Военный склад вступит в особое состояние функционирования, если раскрывается указанный конверт.

склад начнёт функционировать нормально, то исходя из распределения начального запаса на основе стохастической модели поведения систем складирования, взятых в общем смысле (смотри [13, 14]) можно следить за поведением данной системы по тактам времени. Особое состояние функционирования можно описывать таким образом, что распределение уровня запаса в данном такте времени считается начальным распределением уровня запаса особого состояния функционирования.

Кроме двух хорошо отличаемых этапов функционирования возможен ещё один — переходный этап функционирования (его можно было бы назвать подготовительным или пополняющим состоянием функционирования). В этом этапе уже известно, что наступит особое состояние, поэтому система увеличивает уровень запасов или сокращает удовлетворение спроса на основе какой-либо стратегии накопления или обслуживания как бы «подготавливается» к особому состоянию функционирования. При изучении *неизменного состояния* системы предполагаем, что с начала работы системы складирования прошло достаточно много времени. Это означает, что в таком случае к изучению поведения системы можно подходить определяя функционирование системы (в особой стуации) по неименному состоянию нормальной работы склада. Определенное таким образом предельное распределение уровня запасов — относящееся нормальной работе склада — является начальным распределением уровня запасов в особом состоянии функционирования.

Особенностью поведения системы является ещё и то, что у аварийных систем складирования параметры стратегии регулирования запасов могут различаться в зависимости от состояния функционирования. Модель системы можно дальше уточнять с учётом вспоминающих моделей, с включением различных стратегий обслуживания на основе системы управления общей производительностью и т. д. [13, 14, 15].

4. Стохастическая модель, описывающая поведение аварийных систем складирования

4.1 *Условия моделирования поведения системы*

Особенности модели аварийной системы складирования можно подытоживать следующим образом.

1. Поведение системы изучается в дискретных моментах времени.

2. В нормальном состоянии функционирования — в заданном стратегией регулирования запасов времени и количестве — к системе приходит поставка от производящей системы. (Отсутствие поставки означает приход поставки, у которой количество поставленного материала равно нулю.)

3. Система выдает заказы в начале такта времени по уровню, относящемуся к началу такта времени запасов, который определяется стратегией

складского хозяйства. Эти заказы выполняются производящей системой до конца такта времени.[3]

4. В нормальном состоянии функционирования от ситемы-потребителя в каждом такте времени приходит заказ (требование). Отсутствие заказа считается заказом, у которого количество заказываемого материала равно нулю.

5. В особом состоянии функционирования система стремится в каждом такте времени удовлетворять спросы, соответствующие рядам требований, определенным заранее.

6. Предположим, что система складирования по мере своих возможностей (т. е. если это разрешается уровнем запасов и вместимостью склада) сначала принимает привезённое количество материалов, а затем до конца такта времени удовлетворяет суммарный спрос, относящийся к данной единице времени. Выполнения этого условия можно достичь целесообразным выбором тактов времени. (Суммарный спрос — это действительный спрос данного такта плюс неудовлетворённый спрос за предыдущие такты.)

7. Система складирования не отправляет больше материала, чем заказано. Количество материала превышающее вместимость склада, или то количество, которое на основе вместимости и уровня запасов складов нельзя принимать, задерживается (в нормальном состоянии функционирования).

8. Поведение системы складирования такое, что в t-том такте времени количество доставляемого материала и уровень запасов не зависят от размеров неудовлетворённого спроса и объёма поставок t- 2, t- 3 и т. д. тактах времени.

9. Если спрос превышает уровень запасов в данном такте времени, то склад отправляет все имеющиеся запасы.

4.2 *Определение параметров системы в особом состоянии функционирования*

Общие параметры (технические, внешние, реагирующие) систем складирования были подробно рассмотрены в работах [13, 14]. Далее будем ограничиваться определением важнейших параметров системы, характерных для особого состояния функционирования.

Ряд требований как основной параметр системы в овобом состоянии функционирования. i-е особое состояние функционирования характеризуем детерминистическим рядом требований, охватывающим i_n тактов времени, именно: $x^{(2)}$

[3] Проблему можно изучать и в случае так называемой поставки «промежуточного» типа [6, 14]. Учёт статистических характеристик мощности ограничивающих «выпуск» или «поток» материалов производящей и принимающей систем обеспечивает возможность значительного и очень интересного расширения модели. Так возникла бы возможность конструирования моделей комплексного логистического характера, охватывающих большие сложные системы, процессов.

$$x^{(i)} = x^{(i)}(1),\ x^{(i)}(2),\ \ldots,\ x^{(i)}(i_m),$$

Предположим, что число особых состояний функционирования равно «т», а совокупность рядов требований заданных для всех особых состояний, будем обозначать символом $\mathbb{I}(\mathrm{x})$

$$\mathbb{I}(\mathrm{x}) = \{x^{(i)}\} \qquad i = 1, \ldots, n)$$

Если символ $F(x)$ означает совокупность всех возможных рядов требований (они очевидно образуют свободную полугруппу) то $I(x) \subseteq F(x)$ и соответствует понятию «события», в теории стохастических автоматов.

Стохастические пределы функциональной надёжности, заданные на особое состояние функционирования.

Эти параметры характеризуют надёжность, с которой система, имеющая в основном стохастический характер, в особом состоянии функционирования приближает (апроксимирует) «детерминистическую цель», то есть точное удовлетворение ряда требований.

Заданный уровень вероятности выполнения i-го ряда требований будем обозначать символом p_i,

$$0 < p_i \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Перечисленные и имеющиеся в работах [13, 14] параметры систем складирования сведены в таблицу 1. Параметры системы указаны и на рисунке 1, на котором изображена работа склада.

4.3. *Поведение аварийных систем складирования в нормальном состоянии функционирования*

Поведение аварийной системы складирования в нормальном состоянии функционирования соответствует обычному системы складирования. Поэтому для оценки и описания системы в нормальном состоянии можно использовать стохастические модели, подробно рассмотренные в работах [13, 14].

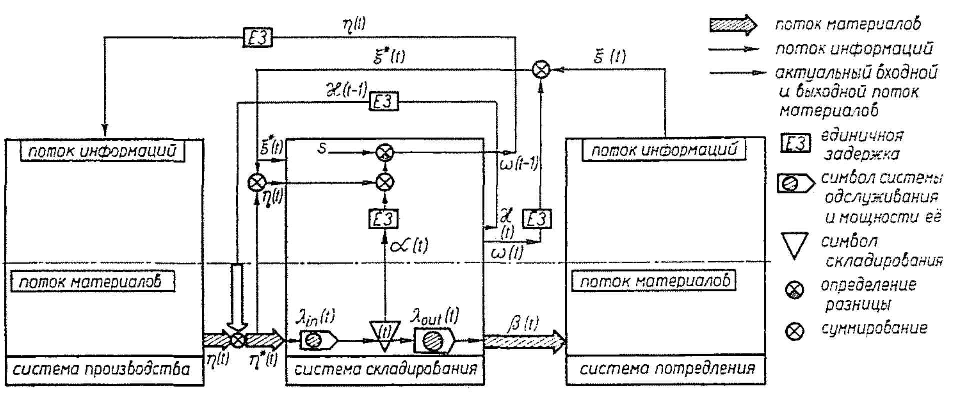

Рис. 1. Параметры системы и схема модели

Для иллюстрации моделей, описанных в [13, 14], на рисунке 2 показана схема модели с указанием векторов распределения вероятностей параметров системы (заданных и вычисленных). Некоторые праметры, оценивающие поведение системы показаны в таблице 2.

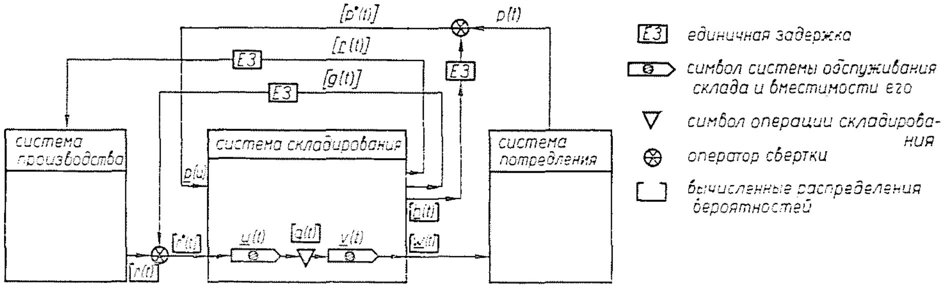

Рис. 2. Схема модели системы в нормальном состоянии функционирования с указанием заданных и вычисленных векторов распределения вероятностей

4.4 *Поведение аварийной системы складирования в особом состоянии функционирования*

4.4.1 *Описание поведения системы с помощью переходных и выходных функций стохастического автомата*

Поведение системы складирования в особом состоянии функционирования можно характеризовать функциями состояния и выходными функциями стохастического автомата.

Стохастический автомат, соответствующий системе складирования задаётся математической системой:

$$R_{SA} = [\alpha, \xi, \beta, \mathfrak{q}_0, F, G]$$

где

$$\mathfrak{q}_0 = [q_0, q_1, \ldots, q_i]$$

начальное распределение состояний стохастического автомата, то есть распределение вероятностей начального запаса в особом состоянии функционирования, при непрерывном изучении системы это соответствует предельному распределению уровня запасов в нормальном состоянии функционирования,

$\alpha = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ — множество состояний автомата, то есть совокупность значений уровня запаса.

$\xi = \{x_0, x_1, \ldots x_l\}$ – множество входных сигналов автомата, то есть совокупность значений требований, имеющихся среди элементов ряда требований.

Таблица 1. *Задание и характеристика параметров системы*

Характер параметров системы	Данные параметры системы						
Классы параметров	Параметры внешней среды			Технические параметры системы			Стратегические параметры
Стохастический процесс	Требуемое количество материала в t-такте времени в нормальном состоянии функционирования	Детерминистический ряд требований предписанный на данное (i-тое) состояние функционирования	Принимаемое количество материала в t-такте времени	Предел мощности приёма материалов в t-такте времени	Предел мощности, относящейся к поставке материалов в t-такте времени	Вместимость склада	Параметры стратегии регулирования запасов (в зависимости от типа стратегии) S: пароговый уровень заказов S: уровень запасов до которого определяется заказ T: промежуток времени между заказами
Обозначение	$\xi(t)$ дискретная случайная величина	$X^{(i)}$ $x^{(i)} = x^{(i)}(1)\dots$ $\dots x^{(i)}(i_n)$	$\eta(t)$ дискретная случайная величина	$\lambda_{in}(t)$ дискретная случайная величина	$\lambda_{out}(t)$ дискретная случайная величина	C положительное целое число	s, S, T положительное целое число
Множество значений	$0, 1, 2, \dots$	положительные целые числа $0, 1, 2\dots$	$0, 1, 2\dots$	$0, 1, 2\dots$	$0, 1, 2\dots$	$0, 1, 2\dots$	$0, 1, 2\dots$
Распределение	$P_l(t) = r[\xi(t) = l]$ $l = 0, 1, 2\dots$ $t = 0, 1, 2\dots$	—	$r_k(t) = P[\eta(t) = k]$ $k = 0, 1, 2\dots$ $t = 0, 1, 2, \dots$	$u_n(t) = P[\lambda_{be}(t) = n]$ $n = 0, 1, 2\dots$ $t = 0, 1, 2\dots$	$v_z(t) = P[\lambda_{ki}(t) = z]$ $z = 0, 1, 2\dots$ $t = 0, 1, 2\dots$	—	—
Вектор распределения вероятности	$p(t)$	—	$r(t)$	$u(t)$	$v(t)$	—	—

Характер параметров системы	Данные параметры системы		Вычисленные параметры				
Классы параметров	Параметры поведения						
Стохастический процесс	Начальная величина запасов, то есть количество материала, имеющегося на складе в 0-такте времени	Величина запасов имеющихся в складе в t-такте времени	Поставленное из склада количество материала в t-такте времени	Длина очереди на выходе, то есть величина неудовлетворённого спроса в t-такте времени	Величина суммарных спросов, то есть сумма истинного спроса и неудовлетворённого спроса в предыдущем такте времени, в t-такте времени	Длина очереди на входе, то есть число товарных единиц ожидаемых на приём в t-том такте времени	Количество материалов которое надо принять, то есть сумма ожидающего количества предыдущего такта и поступающего количества в t-том такте времени
Обозначение	$\alpha(0)$ дискретная случайная величина	$\alpha(t)$ дискретная случайная величина	$\beta(t)$ дискретная случайная величина	$\omega(t)$ дискретная случайная величина	$\xi^*(t)$ дискретная случайная величина	$\alpha(t)$ дискретная случайная величина	$\eta^*(t)$ дискретная случайная величина
Множество значений	$0, 1, 2\ldots$	$0, 1, 2\ldots$	$0, 1, 2\ldots$	$0, 1, 2\ldots$	$0, 1, 2\ldots$	$0, 1, 2\ldots$	$0, 1, 2\ldots$
Распределение	$q_h(0) = P[\alpha(0) = h]$ $h = 0, 1, 2\ldots$ $t = 0, 1, 2\ldots$	$q_h(t) = P[\alpha(t)] = h]$ $h = 0, 1, 2\ldots$ $t = 0, 1, 2\ldots$	$w_s(t) = P[\beta(t) = s]$ $s = 0, 1, 2\ldots$ $t = 0, 1, 2\ldots$	$h_a(t) = P[\omega(t) = a]$ $a = 0, 1, 2\ldots$ $t = 0, 1, 2\ldots$	$p_l^*(t) = P[\xi^*(t) = l]$ $l = 0, 1, 2\ldots$ $t = 0, 1, 2\ldots$	$g_b(t) = P[\alpha(t) = b]$ $b = 0, 1, 2\ldots$ $t = 0, 1, 2\ldots$	$r_k^*(t) = P[\eta^*(t) = k]$ $k = 0, 1, 2\ldots$ $t = 0, 1, 2\ldots$
Вектор распределения вероятн.	$q(0)$	$q(t)$	$w(t)$	$h(t)$	$p(t)$	$g(t)$	$r^*(t)$

Таблица 2. *Некоторые показатели, служащие для оценки поведения системы*

Наименование	Обозначение	Зависимость
Функциональная надёжность, связанная с удовлетворением спроса	$FM_{out}(t)$	$\dfrac{E[\beta(t)]}{E[\xi(t)]}$ $\qquad$ $\dfrac{E[\beta(t)]}{E[\xi^*(t)]}$
Функциональная надёжность, связанная с приёмом	$FM_{in}(t)$	$\dfrac{E[\xi^*(t)]-E[\varkappa(t)]}{E[\eta^*(t)]}$ $\qquad$ $\dfrac{E[\eta^*(t)]-E[\varkappa(t)]}{E[\eta(t)]}$
Показатель степени использования вместительности склада	$R_k(t)$	$\dfrac{E[\alpha(t)]}{C}$
Ожидаемое значение количества материала, которое не поместится в склад	$E[R(t)]$	$\sum\limits_{n=0}^{C}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{q_n(t)\,r^*_{c-n+k}(t)\,[c-n+k]\}$
Стохастическая функция надёжности системы	$Pq_0(x\,\|\,x)$	$\mathbf{q}_0^T\,\mathbf{M}(\mathbf{x}\,\|\,\mathbf{x})\,\mathbf{e}$

$\beta = \{y_0, y_1, \dots y_l\}$ — множество выходных сигналов, т. е. совокупность значений удовлетворённого спроса заданного для какого-то вида товара и относящихся к заданным рядам требований.

$F = F(a_j/a_i, x_l)$ — переходная функция стохастического автомата, то есть условная вероятность того, что автомат находящийся в состоянии a_i под действием входного сигнала x_l в следующем такте переходит в состояние a_j, соответствует той системе условных вероятностей, что при значении уровня запаса i и значении спроса в следующем такте уровень запаса изменится до j.

$G = G(y_s/a_i, x_l)$ — выходная функция стохастического автомата, что соответствует условной вероятности того, что автомат в состоянии a_i в случае входного сигнала x_l имеет выходной сигнал y_s или иначе, система условных вероятностей того, что если в данном такте времени уровень запаса i и величина спроса l, то в этом же такте времени величина удовлетворённого спроса (количество отправленного материала) будет равна s.

Функции F и G стохастического автомата по вышеописанному толкованию их, они могут быть просто выведены из выражений, заданные в работах [13, 14]

(2) $$F(a_j \mid a_i, x_l) = m_{ij}(l).$$

(3) $$G(y_j \mid a_i, x_l) = n_{ij}(l).$$

В данной зависимости $m_{ij}(l)$-условная вероятность того, что если спрос равен l, то уровень запасов системы в одном такте времени изменяется от i до j, а $n_{ij}(l)$ — условная вероятность того, что в данном такте времени система выпускает материал в количесте j, если уровень запасов равен i и от системы потребителя придёт требование на количество материала l.

Условные вероятности $m_{ij}(l)$ и $n_{ij}(l)$ при заданном значении вместимости склада C определяют стохастические матрицы $\mathbf{M}(l)$ и $\mathbf{N}(l)$.

Матрица вероятности перехода $\mathbf{M}(l)$, характеризует изменение запаса; элементом её является и $m_{ij}(l)$. Данный элемент можно определять из выражений:[4]

$$m_{ij}(l) = \sum_{z=0}^{l-1} v_z(t)\, d(i, j \mid z) + d(i, j \mid l) \left(1 - \sum_{z=0}^{l-1} v_z\right)$$

[4,5] Доказательства зависимостей смотри в трудах [13, 14] .

где

$$(4)\ d(i,j|l)=\begin{cases}\sum_{v=0}^{l-i}(r_v+u_v)+\left(\sum_{v=0}^{l-i}r_v\right)\left(\sum_{v=0}^{l-i}u_v\right) \\ \qquad \text{если}\quad j=0,\ 0\le i\le C,\ l-i\ge 0 \\ u_{j+l-i}+r_{j+l-i}-r_{j+l-i}\cdot u_{j+l-i}-\sum_{v=0}^{j+l-i-1}(u_{j+l-i}\cdot r_v+r_{j+l-i}\cdot u_v) \\ \qquad \text{если}\quad 0<j<C,\ 0\le i\le C,\ j-i+l\ge 0 \\ 1-\sum_{j=0}^{C-1}\Big[u_{j+l-i}+r_{j+l-i}-r_{j+l-i}\cdot u_{j+l-i}- \\ \qquad -\sum_{v=0}^{j+l-i-1}(u_{j+l-i}\cdot r_v+r_{j+l-i}\cdot u_v)\Big] \\ \qquad \text{если}\quad j=C,\ 0\le i\le C,\ C-i+l\ge 0 \\ 0 \text{ в остальном}\end{cases}$$

Матрица вероятности выхода $\mathrm{N}(l)$ даёт статистическую связь данного уровня запасов и отправленного количества материалов. Любой элемент этой матрицы можно вычислять по следующей формуле:[5]

$$n_{ij}(l)=\sum_{z=0}^{\infty}v_z(t)\cdot d(i,j\,|\,l,z)$$

где

$$(5)\qquad d(i,j\,|\,l,z)\begin{cases}u_{j-i}\cdot r_{j-i}+\sum_{k=j-i+1}^{\infty}(u_{j-i}\cdot r_k+r_{j-i}\cdot u_k) \\ \qquad \text{если } j-i\ge 0 \text{ и } j<l,\ l\le z \\ \qquad\quad j-i\ge 0 \text{ и } j<z,\ z<l<C \\ \left(\sum_{k=j-i}^{\infty}r_k\right)\left(\sum_{k=j-i}^{\infty}u_k\right) \\ \qquad \text{если } j-i\ge 0,\ j=l,\ l\le z\le C \\ \sum_{v=z}^{l-1}\left[u_{v-i}+r_{v-i}+\sum_{k=v-i+1}^{\infty}(u_{v-i}\cdot r_k+r_{v-i}\cdot u_k)\right]+ \\ \qquad +\left(\sum_{k=l-i}^{\infty}r_k\right)\left(\sum_{k=l-i}^{\infty}u_k\right) \\ \qquad \text{если } j-i\ge 0,\ j=z<l \\ 1 \quad \text{если } j-i\le 0,\ j=l\le z\le C \\ \qquad\quad j-i\le 0,\ j=z<l \\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Мы рассматриваем тот простейший и в особом состоянии функционирования самый естественный случай, когда отсутствуют (или отвергнуты) единицы, ожидающие приёма или требований, которые ждут удовлетворения.[6] Если нет приёма в особом состоянии работы, то значение r_k (см. таблицу 1), которое содержится в формулах (2) и (3) можно определять по следующей формуле:

$$r_k = \begin{cases} 1 & \text{если } k = 0 \\ 0 & \text{в остальных случях.} \end{cases}$$

С помощью вышеописанных стохастических функций состояния и выходных функций распределение вероятностей функций состояния (действительный уровень запасов склада) и выходных функций, (выпускаемое количество материала) можно определять по тактам времени следующими рекурсивными формулами.

Пусть $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ означает заданный ряд требований и $\mathbf{q}(x_1)$, $\mathbf{q}(x_1\, x_2) \ldots \mathbf{q}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{w}(x_1)$, $\mathbf{w}(x_1\, x_2) \ldots \mathbf{w}(\mathbf{x})$ означают векторы условных вероятностей уровни запаса и удовлетворённого спроса в такте времени, относящийся к ряду требований, то определяющие формулы с помощью выражений (2), (3) приобретают вид:

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}(x_1) &&= \mathbf{q}_0\, \mathbf{M}(x_1) \\ (6) \qquad &\mathbf{q}(x_1\, x_2) &&= \mathbf{q}_0\, \mathbf{M}(x_1)\, \mathbf{M}(x_2) \\ &\quad\vdots \\ &\mathbf{q}(\mathbf{x}) &&= \mathbf{q}_0\, \mathbf{M}(x_1)\, \mathbf{M}(x_2) \ldots \mathbf{M}(x_m) = \mathbf{q}_0 \prod_{l=1}^{m} \mathbf{M}(x_l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}(x_1) &&= \mathbf{q}_0\, \mathbf{N}(x_1) \\ (7) \qquad &\mathbf{w}(x_1\, x_2) &&= \mathbf{q}(x_1)\, \mathbf{N}(x_2) \\ &\quad\vdots \\ &\mathbf{w}(\mathbf{x}) &&= \mathbf{q}(x_1\, x_2 \ldots x_{m-1})\, \mathbf{N}(x_m)\,. \end{aligned}$$

С помощью распределений легко вычислять условные математические ожидания, среднеквадратичные отклонения, и прочие характеристики, которые характеризуют действие рядов требований.

Поведение системы в особом состоянии функционирования изображается на рисунке 3.

[6] Зависимости (2), (3) можно распространять и на случай ожидающих (неудовлетворённых) поставок и спроса, тогда соответственно можно применять зависимости, заданные в источниках [14, 15].

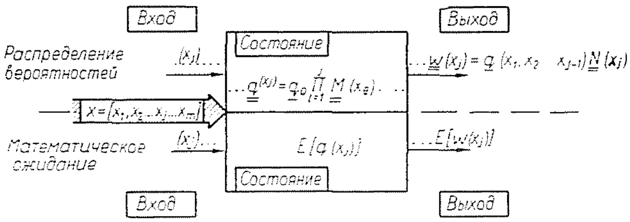

Рис. 3. Схема модели системы в особом состоянии функционирования

4.4.2 *Связь надёжности поведения системы и последовательных функций стохастического автомата*

В особом состоянии функционирования поведение аварийной системы складирования в соответствии со строгими требованиями, вытекающими из особенностей системы должно быть почти детерминированным. Поэтому имеют огромное значение те исследования, которые направлены именно на вопросы надёжности.

Основной проблемой в этом является то, что аварийная система складирования будучи не полностью надёжной системой, каким образом и в каком масштабе может отражать своим поведением, своей работой «детерминистическую цель», то есть с какой точностью выполняет заданные ряды требований.

Ответы на эти вопросы можно получать с помощью так называемых последовательных функций стохастического автомата, который описывает поведение системы. Стохастические последовательные функции характеризуют меру осуществления детерминистических целей, т. е. вероятность того, что ряд выполнений, относящийся к данному ряду требований в какой степени соответствует ряду требований, который возбудил его: они дают вероятность того, что система на ряд требований **y** отвечат рядом выполнений **y**. Выберём из возможной совокупности рядов требований **F**(**x**) ряд требований **x**. Тогда вероятность того, что ряд требований (**x**) совпадает с рядом выполнений (**y**) и в то же время в особом состоянии функционирования начальное распределение запаса равно $\mathbf{q}_0$ определяют вероятности:

$$P_{q_0}(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x})\,. \tag{8}$$

Вероятность того, что вектор распределения вероятностей начального запаса $\mathbf{q}_3$, и на ряд требований **x** система отвечает рядом выполнений **y**, обозначаем выражением:

$$P_{q_c}(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})\,. \tag{9}$$

С целью определения вероятностей (8) и (9), описывающих поведение системы в особом состоянии функционирования, сначала задаём матрицы перехода $\mathbf{M}(y_s|x_l)$ (они являются не стохастическими матрицами), произвольный элемент $m_{ij}(y_s|x_l)$– вероятность того, что в данном такте времени величина спроса x_e, величина удовлетворённого спроса y_s, когда уровень запаса склада изменится от a_i до a_j.

Теорема: Предполагается, что выполняются перечисленные в § 3.1 условия от (1.—9.) первого до девятого. Тогда матрица перехода $\mathbf{M}(y_s|x_l)$ и элемент её $m_{ij}(y_s|x_l)$ (который зависит только от распределения вероятностей $\eta(t)$. $\lambda_{in}(t)$. $\lambda_{out}(t)$ и от вместимости склада C) определяется если $s \neq l$:

(10)
$$m_{ij}(y_s|x_l) = \begin{cases} \sum\limits_{v=s-i+1}^{\infty} u_v r_{s-i} \sum\limits_{z=s}^{\infty} v_z + u_{s-i}\left(\sum\limits_{z=s}^{\infty} v_z\right)\left(\sum\limits_{k=s-i}^{\infty} r_k\right) \\ \qquad \text{при } s<l,\ j=0,\ s-i\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ r_{s-i+j}\cdot v_s \sum\limits_{v=s-i+j+1}^{\infty} u_v + u_{s-i+j} v_s \sum\limits_{k=s-i+j}^{\infty} r_k \\ \qquad \text{при } s<l,\ 0<j<C,\ s-i+j\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ \sum\limits_{j=C}^{\infty}\left[r_{s-i+j} v_s \sum\limits_{v=s-i+j+1}^{\infty} u_v + u_{s-i+j} v_s \sum\limits_{k=s-i+j}^{\infty} r_k\right] \\ \qquad \text{при } s<l,\ j=C,\ s-i+C\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ 0 \ \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

также если $s=l$:

(11)
$$m_{ij}(y_l|x_l) = \begin{cases} r_{l-i}\left(\sum\limits_{v=l-i+1}^{\infty} u_v\right)\left(\sum\limits_{z=l}^{\infty} v_z\right) + u_{l-i}\left(\sum\limits_{z=l}^{\infty} v_z\right)\left(\sum\limits_{k=l-i}^{\infty} r_k\right) \\ \qquad \text{при } j=0,\ s-i\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ r_{l-i+j}\left(\sum\limits_{v=l-i+j+1}^{\infty} u_v\right)\left(\sum\limits_{z=l}^{\infty} v_z\right) + u_{l-i+j}\left(\sum\limits_{z=l}^{\infty} v_z\right)\left(\sum\limits_{k=l-i+j}^{\infty} r_k\right) \\ \qquad \text{при } 0<j<C,\ l-i+j\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ \sum\limits_{j=C}^{\infty}\left[r_{l-i+j}\left(\sum\limits_{v=l-i+j+1}^{\infty} u_v\right)\left(\sum\limits_{z=l}^{\infty} v_z\right) + u_{l-i+j}\left(\sum\limits_{z=l}^{\infty} v_z\right)\left(\sum\limits_{k=l-i+j}^{\infty} r_k\right)\right] \\ \qquad \text{при } j=C,\ l-i+C\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ 0 \ \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Доказательство:

Предположим, что условия, перечисленные в пункте 3.1 выполняются. Обозначим через P_{ij} $(s|l, n, z)$ вероятность того, что удовлетворение спроса равно s, когда уровень запаса изменяется от i до j, при таком условии, что в систему пришло требование величиной l, мощность приёма n и мощность выпуска z. Тогда на основе простейших вероятностных соотношений:

(12) в случае $j = 0$

$$P_{ij}(s \mid l, n, z) = \begin{cases} r_{s-i} & \text{при } s-i<n,\ s-i\geq 0,\ z\geq s,\ 0\leq i\leq l \\ \sum\limits_{k=s-i}^{\infty} r_k & \text{при } s-i=n,\ s-i\geq 0,\ z\geq s,\ 0\leq i\leq l \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

(13) в случае $0 < j < c$

$$P_{ij}(s \mid l, n, z) = \begin{cases} r_{s-i+j} & \text{при } s-i+j<n,\ s-i+j\geq 0,\ z\geq s,\ 0\leq i\leq l \\ \sum\limits_{k=s-i+j}^{\infty} r_k & \text{при } s-i+j=n,\ s-i+j\geq 0,\ z\geq s,\ 0\leq i\leq l \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

(14) в случае $j = C$

$$P_{iC}(s \mid l, n, z) = \sum_{j=C}^{\infty} P_{ij}(s \mid l, n, z)\,.$$

Пусть обозначает $P_{ij}(s \mid l, z)$ вероятность того, что система переходит из состояния i в состояние j при условии, что поставляемое количество материала l и величина выполнения спроса s в данном такте времени учитывая то, что величина мощности приёма z. Используя теорему полной вероятности и распределение вероятностей u_n

$$P_{ij}(s \mid l, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n P_{ij}(s \mid l, n, z)$$

получим следующее выражение

(15)

$$P_{ij}(s \mid l, z) = \begin{cases} r_{s-i} \sum\limits_{v=s-i+1}^{\infty} u_v + u_{s-i} \sum\limits_{k=s-i}^{\infty} r_k \\ \qquad \text{при } j=0,\ s-i\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ r_{s-i+j} \sum\limits_{v=s-i+j+1}^{\infty} u_v + u_{s-i+j} \sum\limits_{k=s-i+j}^{\infty} r_k \\ \qquad \text{при } 0<j<C,\ s-i+j\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ \sum\limits_{i=C}^{\infty} \left[r_{s-i+j} \sum\limits_{v=s-i+j+1}^{\infty} u_v + u_{s-i+j} \sum\limits_{k=s-i+j}^{\infty} r_k \right] \\ \qquad \text{при } j=C,\ s-i+C\geq 0,\ 0\leq i\leq C \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Если ν_z-распределение вероятностей мощности выпуска, то учитывая случаи $s \neq l$ и $s = l$ у отдельно также снова применяя теорему полной вероятности, получим выражение, которое требовалось доказать.

С помощью доказанной теоремы алгоритм определения стохастических последовательных функций $P_{q_0}(y_s|x_l)$ можем определить, исходя из теории стохастических автоматов с помощью уже хорошо известного матричного формализма [10].

Если задан ряд требований $\mathbf{x} = x_1 x_2 \ldots x_n$ и ряд выполнений, относящихся к нему $\mathbf{y} = y_1 y_2 \ldots y_n$ и определены матрицы перехода $\mathbf{M}(y_s|y_l)$, относящиеся к отдельным значениям y_l и y_s, то вычисление стохастических последовательных функций $P_{q_0}(y_s|x_l)$ можно провести следующим образом.

Так как зависимости

(16) $$\mathbf{M}(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \mathbf{M}(x_1|x_1)\,\mathbf{M}(x_2|x_2)\ldots\mathbf{M}(x_n|x_n)$$

(17) $$\mathbf{M}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathbf{M}(y_1|x_1)\,\mathbf{M}(y_n|x_2)\ldots\mathbf{M}(y_n|x_n)$$

вида выполняются и если $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ означает вектор-столбец, состоящий исключительно из единиц, то

(18) $$\mathbf{h}(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{x}|\mathbf{x})\,\mathbf{e}$$

(19) $$\mathbf{h}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{y}|\mathbf{x})\,\mathbf{e}$$

где i-й компонент векторов-столбцов условная вероятность того, что исходя из уровня запасов i система выполняет заданный ряд требований X(10), то есть отвечает рядом выполнений (11).

Если в начале особого состояния функционирования аварийной системы складирования вектор вероятностей уровня запаса $\mathbf{q}_0$, то система ряд требований выполняет с вероятностью:

(20) $$P_{q_0}(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0^T\,\mathbf{h}(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{C} q_i(0)\,\mathbf{h}_i(\mathbf{x}|\mathbf{x}).$$

Обычно вероятность того, что ряд требований $\mathbf{x}$ системы вызывает ряд выполнений $\mathbf{y}$ можно определять следующей формулой, подобной (20):

(21) $$P_{q_0}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0^T\,\mathbf{h}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{C} q_i(0)\,\mathbf{h}_i(\mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

На основе описанных выше формул и методов поведение аварийной системы складирования в различных состояниях функционирования с точки зрения надёжности можно однозначно характеризовать с помощью функции надёжности.

Особенности поведения аварийной системы складирования в особом состоянии функционирования подытоживает — в первую очередь с точки зрения надёжности — рисунок 4.

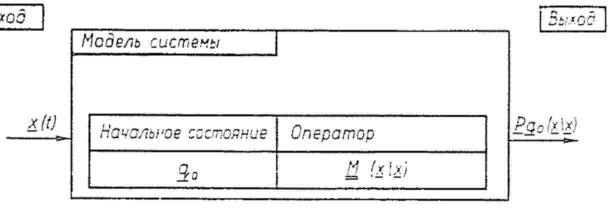

Рис. 4. Схема модели системы в особом состоянии функционирования со стохастической функцией надёжности системы

5. Некоторые теоретические вопросы и возможности изучения аварийных систем складирования

5.1. *Дальнейшие возможности анализа систем с использованием теории стохастических автоматов*

Стохастическую функцию надёжности системы $P_{q_0}(\mathrm{x} \mid \mathrm{x})$, которая даёт важнейшую информацию, характеризующую работу системы, определили на рядах требований, заданных в особом состоянии. Множество рядов требований $\mathrm{x} \in I(\mathrm{x}) \subseteq \mathrm{F}(\mathrm{x})$ соответствует понятию события (абстрактной-) теории автоматов. Поэтому теоретическое изучение аварийных складов соответствует анализу стохастических автоматов. Проведением анализа системы можно получить ответ на вопрос, с какой вероятностью событие, соответствующее возможным рядам требований создаёт стохастический автомат, соответствующий особому состоянию системы.

Теоретическое планирование аварийных систем складирования на основе модели можно решать как задачу синтеза стохастического автомата. Это означает создание такого стохастического автомата, который создаёт событие, соответствующее заданной совокупности рядов требований на заданном уровне надёжности.

Вышесказанное, конечно, является рассуждениями чисто теоретического характера, так как в нашем случае анализ и синтез стохастического автомата представляет очень сложную проблему. (Трудности повышает и то, что функции состояния и выходные функции стохастического автомата, имеющегося в модели системы складирования, теоретически зависят от возможного числа состояний, то есть от вместимости склада.)

Моделирование особого состояния функционирования аварийных систем складирования стохастическими автоматами имеет большое значение именно потому, что теоретические исследования, проведённые с использованием теории автоматов (эквивалентность, гомоморфизм, понятие отличаемости и т. д.) можно выгодно использовать при планировании комплексных аварийных систем складирования, в оптимизации их и вообще в непрерывном развитии систем.

5.2 *Возможности идентификации систем*

В модели до сих пор предполагалось, что заданные в таблице 1 распределения вероятностей, которые необходимы для наших вычислений и которые в основном определяют функционирование системы (распределения пределов мощности приёма и выпуска и начального запаса в особом состоянии функционирования), известны.

В практике анализа и планирования систем обычно дело в том, что:

(1) в случае планирования используются теоретические распределения, которые выбраны в соответствии с распределениями и параметрами на основании полученных и обработанных данных для уже функционирующих подобных складов (учитывая особенности планируемой системы),

(2) в случае изучения уже функционирующей системы складирования, когда целью анализа системы служит повышение эффективности работы склада, и не известны соответствующие (относящиеся к данному такту времени) теоретические распределения, *используются методы и подходы теории идентификации систем.*[7]

В последнем случае нужно описать поведение системы с помощью информации, полученной путём измерений и наблюдений, и соотнести нашу модель с функционированием естественной системы. Задача идентификации функционирования системы соответствует идентификации, взятой в так называемом широком смысле.

Тогда первая задача идентификации системы (идентификация структуры)[8] означает в нашем случае заданное приближение моделирования (с распределениями и параметрами неизвестного типа).

[7] Идентификация аварийных систем складирования в связи с функцией и характером системы является значительной задачей моделирования. В случае уже функционирующихся аварийных складов этого можно достичь идентификацией поведения системы, работающей в нормальном состоянии, то есть оценкой соответствующих параметров и «переносом» полученных результатов на особое состояние функционирования. Значит, принципиальной особенностью идентификации аварийных систем складирования является то, что на основе проведённых в нормальном состоянии функционирования наблюдений и построения модели нужно — с помощью соответствующих поправок — угадать, оценить реакции системы на различные возможные ряды требований в особом состоянии функционирования.

[8] Из двухступенчатой задачи познания функционирующей системы идентификация структуры означает определение общего типа модели системы.

Вторую задачу идентификации,[9] определение параметров, распределений, оценку их — надо решить с помощью имеющихся измерений, наблюдений и их обработки (если они отсутствуют, то на основании априорной информации), и со временем непрерывно исправлять с применением известных методов идентификации (оценка типа Байеса, оценка наибольшей вероятности, обучающиеся алгоритмы идентификации и т. д.) [1, 9].

Применяя информацию, полученную путём постепенно исправленных оценок основных параметров и распределений, описанных выше в заданной модели можем провести идентификацию (прогноз) поведения аварийной системы складирования в особом состоянии функционирования.

Резюме

Так называемые аварийные системы складирования выполняют чрезвычайные требования спросы, появляющиеся в особых ситуациях на высоком уровне надёжности. С помощью их стохастической модели, описанной в работе—базируясь на оценке основных параметров системы (склада)—возможно описание поведения системы и его оценка. Описанный метод можно выгодно использовать при планировании системы и при разработке системы управления с помощью вычислительной машины; которая обеспечивает непрерывное и адаптивное развитие системы аварийных складов.

Литература

1. Eykhoff, P.: System Identification (Parameter and State Estimation) J. Wiley, London, New York, 1974.
2. Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Wiley, New York. 1966.
3. Ghosal, J.: Some aspects of Queues and Storage System. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
4. Lewis, A.: Scientific Inventory Control, London, 1970.
5. Prabhu: Queues and Inventories, New York—Sydney—London J. Wiley, 1965.
6. Prékopa, A.: Az „S szintre való felrendelés" elnevezésű sztochasztikus készletmodell és annak kiterjesztése intervallumszerű érkezések esetére. Számológép, 1970. 9. pp. 34—45.
7. Prezenszki, J.—Várlaki P.: A raktári anyagmozgatási rendszerek megbízhatósági és kapacitásvizsgálata, Gép, 1978. 9. sz.
8. Prezenszki J.—Várlaki P.: Raktározási rendszerek viselkedésének számítógépes modellezése, Gép. 1978. 6. sz.

[9] Идентификацию системы, взятую в узком смысле—когда идентифицирование начнём не созданием модели поведения системы, а выбором известного метода идентифицирования — можем приближать, например, с предположением линейности входных и выходных параметров (если это допустимо). Конкретные вычисления можно провести методами регрессивного анализа или с помощью обучающихся алгоритмов идентификации [1, 9]. Если предположение линейности оказывается слишком грубым приближением, то надо выбрать один из методов идентификации нелинейных систем. С этой целью можем использовать например дисперсионный метод Райбмана.

9. Райбман, Н. С.: Построение моделей процессов производства, Энергия, Москва, 1975.
10. Saloma, A.: Theory of Automata, New York, 1968.
11. Starke, P. H.: Abstrakte Automaten, Deutsche W. Verlag Berlin 1969.
12. Várlaki P.—Budai A.: A Stochastic Model for the Description and Evaluation of Storage System Behaviour. Periodica Polytechnica Transp. Eng. Vol. 4. 1976. No. 1. pp. 75—99.
13. Várlaki P.—Budai A.: A Stochastic Model of Inhestory Control Storage System Behaviour with Respect to Queues. Periodica Polytechnica, Transp. Eng. Vol. 5. 1977. No. 2. pp. 127—153.
14. Várlaki, P.—Budai A.: Készletszabályozással működő raktározási rendszerek, Automatizálás, 1977. 6. sz.
15. Várlaki P.: Riasztható raktározási rendszerek, Automatizálás, 1978. 9. sz.

Dr. Péter Várlaki H-1521 Budapest