СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И КРИТЕРИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕПЛООТДАЧИ В ВЛАЖНОМ ВОЗДУХЕ

ТРАН ТХЕ СОН

Кафедра аэро- и термотехники Будапештского Технического Университета

Поступила: 8 мая 1979 года

Представлена: Проф. д-р. Э. ПАСТОР

1. Введение

В исследовании процесса теплопереноса мы должны обратить внимание в первую очередь на определение коэффициента теплопереноса и его зависимость от разных факторов процесса. Исследование этого процесса производилось нами как и теоретически, так и экспериментально.

При теоретическом и экспериментальном рассмотрении коэффициента теплопереноса мы использовали систему дифференциальных уравнений для описания этого процесса. Таким образом основной задачей является составление этой системы дифференциальных уравнений.

2. Диффузия

Влажный воздух можно рассматривать как бинарную смесь [7].

В газовой смеси при неодинаковой концентрации ϱ_i имеет местоконцентрационную диффузию, которая обусловлена молекулярным движением (7). Диффузия характеризуется плотностью молекулярного потока вещества i-го компонента — (j_{gi}).

Плотность молекулярного потока вещества i-го компонента [7]:

$$j_{gi} = \varrho_i v_{gi} \tag{2—1}$$

где

ϱ_i — концентрация i-го компонента

v_{gi} — линейная скорость диффузионного потока i-го компонента.

Для бинарной смеси при постоянном давлении и постоянной температуре плотность диффузного потока массы, выражается известным законом Фика:

$$j_{gi} = -D\frac{\partial \varrho_i}{6n} = -\frac{D}{R_i T}\frac{\partial p_i}{\partial n} \tag{2—2}$$

где

ϱ_i, p_i — парциальная плотность и парциальное давление i-го комп.

R_i — газовая постоянная i-го компонента,

n — нормаль к поверхности равной концентрации,

D — коэффициент диффузии в бинарной смеси. единица измерения m^2/s

Значение D для бинарных газовых смесей в зависимости от температуры и давления, при $p = 760$ можно определить по уравнению

$$D = D_0 \left(\frac{T}{273}\right)^n$$

где T — температура °K

Значения D_0 и n для некоторых газовых смесей приведены в табл. Для влажного воздуха D можно вычислить по формуле [5]

$$D = \frac{2{,}28 \cdot 10^{-5}}{p} \left(\frac{T}{273}\right)^{1{,}8}$$

где T — температура влажного воздуха, °K

P — давление влажного воздуха, N/m^2

Для бинарной смеси ($i = 1, 2$)

$$j_{g1} = -\frac{D}{R_1 T} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial n} \tag{2—3а}$$

$$j_{g2} = -\frac{D}{R_2 T} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial n}. \tag{2—3б}$$

Общее давление смеси считается постоянным и равным $P = p_1 + p_p$, при этом

$$\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{\partial p_2}{\partial n}.$$

Из выражений (2—3а) и (2—3б) можно получить соотношение между плотностями диффузных потоков компонентов смеси:

$$\frac{j_{g1}}{j_{g2}} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{M_1}{M_2} \tag{2—4}$$

$$j_{g2} = -\frac{M_2}{M_1} j_1 \tag{2—5}$$

где M_1, M_2 молекулярные массы I и 2-го компонентов.

3. Система дифференицальных уровнений и критериальное уравнение для описания теплоотдачи в влажном воздухе

3.1 *Системы дифференциальных уравнений*

Рассмотрим пограничный слой стационарного плоского потока бинарной смеси, компоненты которой подчиняются уравнению состояния идеальных газов.

Общее давление смеси $p = p_1 + p_2$, можно принимать постоянным по толщине стационарного пограничного слоя (в направлении оси y), а диффузией вдоль потока (в направлении x) будем пренебрегать [11].

Обозначим через v среднюю молекулярную скорость смеси, v_i скорость полного потока i-го компонента смеси и v_{gi} линейную скорость диффузного потока i-го компонента. Тогда будем иметь следующие соотношения:

$$v_{gi} = \vartheta_i - v \,. \tag{3—1}$$

3.1.1 *Уравнение непрерывности*

Для i-го компонента смеси уравнение непрерывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\varrho_i u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_i \vartheta_i)}{\partial y} = 0 \tag{3—2}$$

где

u, v скорость в направлении оси x и y.

Если поставим в уравнение (3—2) выражение для скорости полного потока (v_i) i-го компонента смеси то будем иметь:

$$\frac{\partial(\varrho_i u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_i v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho_i \vartheta_{gi})}{\partial y} = 0\,.$$

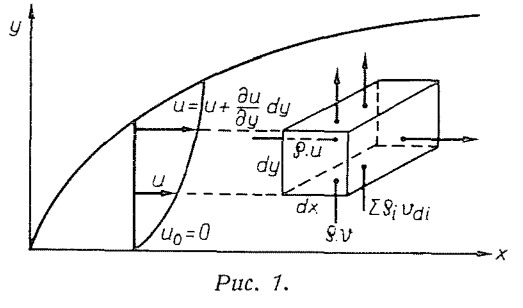

Рис. 1.

Суммируя почленно уравнения непрерывности для обоих компонентов смеси приходим к уравнению непрерывности для всей смеси.

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho_1 v_{g1}+\varrho_2 v_{g2})}{\partial y}=0\,. \tag{3—3}$$

Если поставим в уравнение (3—3) выражение

$$\varrho_1 v_{g1}+\varrho_2 v_{g2}=j_{g1}+j_{g2}=j_{g1}\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)$$

то будем иметь

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{\partial}{\partial y}(j_{g1})=0$$

или

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}+\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(-D\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)=0\,. \tag{3—4}$$

3.1.2 *Уравнение движения*

Для i-го компонента смеси, обратив внимание на $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ll\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ уравнение движения имеет следующий вид

$$(\varrho_i u)\frac{\partial u}{\partial x}+(\varrho_i\vartheta_i)\frac{\partial u}{\partial y}=\varrho_i g-\frac{\partial p_i}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$(\varrho_i u)\frac{\partial u}{\partial x}+(\varrho_i v_i)\frac{\partial u}{\partial y}+(\varrho_i v_{gi})\frac{\partial u}{\partial y}=\varrho_i g-\frac{\partial p_i}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Суммируя почленно уравнения движения для обоих компонентов смеси приходим к уравнению движения для всей смеси.

$$\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial u}{\partial y}+\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)j_{g2}\frac{\partial u}{\partial y}=\varrho g-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

или

$$\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial u}{\partial y}+\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\left(-D\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)=\varrho g-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{3—5}$$

Уравнение непрерывности (3—4) и уравнение движения (3—5) отличаются от соответствующих уравнений для однородной по составу газа добавочными членами, учитывающими влияние диффузионных потоков.

Добавочные члены уравнений непрерывности и движения обращаются в нуль только при равных молекулярных массах компонентов смеси, т. е. при $M_1=M_2$.

3.1.3 *Уравнение энергии (энталпии)*

Для i-го компонента смеси уравнение энергии имеет следующий вид $\left(\text{обратив внимание на } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$

$$(\varrho_i C_{p_i} u)\frac{\partial T}{\partial x} + (\varrho_i C_{p_i} \vartheta_i)\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$(\varrho_i C_{p_i} u)\frac{\partial T}{\partial x} + (\varrho_i C_{p_i} v)\frac{\partial T}{\partial y} + (\varrho_i C_{p_i} \vartheta_{gi})\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

суммируя почленно уравнения энергии для обоих компонентов смеси приходим к уравнению энергии для всей смеси

$$\varrho u C_p \frac{\partial T}{\partial x} + \varrho v C_p \frac{\partial T}{\partial y} + \left(1 - \frac{M_2}{M_1}\frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}\right) C_{p_1} j_{g_1} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

или

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \left(1 - \frac{M_2}{M_1}\frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}\right)\frac{C_{p_1}}{\varrho C_p}\frac{\partial T}{\partial y}\left(-D\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right). \qquad (3-6)$$

Уравнение энергии (3—6) содержит добавочный член, учитывающий изменение энтальпии диффузионных потоков. Это добавочный член равен нулью, если $C_{p_1} M_2 = C_{p_2} M_2$

3.1.4 *Уравнение диффузии*

Для решения уравнений (3—4, 5, 6) необходимо знать распределение концентраций i-го компонента смеси.

для i-го компонента смеси уравнение непрерывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\varrho_i u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_i \vartheta_i)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\varrho_i u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_i \vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho_i \vartheta_{gi})}{\partial y} = 0$$

или

$$\frac{\partial(\varrho_i u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_i \vartheta)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right). \qquad (3-7)$$

Это уравнение выражает распределение концентрации i-го компонента смеси, и называется уравнением Фика.

3.2 *Критерии подобия и критериальное уравнение*

3.2.1 *Критерия и зависимости подобия*

Критерии и зависимости подобия получаются из системы дифференциальных уравнений, описывающей теплоперенос.

Процесс теплопереноса в влажном воздухе описывается системой уравнений в частных производных:

Уравнение энергии:

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{C_{p_1}}{C_p}\left(1-\frac{M_2}{M_1}\frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}\right)\frac{\partial T}{\partial y}\left(D\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)$$

Уравнение движения:

$$\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho\vartheta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\left(-D\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)=\varrho\cdot g-\frac{\partial p}{\partial x}+M\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Уравнение непрерывности:

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(-D\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)=0$$

Уравнение диффузии:

$$u\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right).$$

Анализ уравнений энергии, движения, непрерывности, диффузии методом подобия позволяет получить следующие критерии и зависимости подобия:

Из уравнений энергии можно получить:

Критерии подобия:

$P_e=\dfrac{u\cdot l}{a}=\mathrm{Re}\,Pr$, критерий Пекле, где $Pr=\dfrac{\nu}{a}$ критерий Прандтля.

Зависимости подобия:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}\cdot\frac{C_{p_1}}{C_p}\left(1-\frac{M_2}{M_1}\frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}\right)\frac{D}{u\cdot l}=$$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}\cdot\frac{C_{p_1}}{C_p}\left(1-\frac{M_2}{M_1}\frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}\right)\frac{D/\nu}{u\cdot l/\nu}=\frac{\varrho_1}{\varrho}\cdot\frac{C_{p_1}}{C_p}\left(1-\frac{M_2}{M_1}\frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}\right)\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot Pr_D}\qquad(3\text{—}8)$$

где $Rr_D=\dfrac{\nu}{D}$, диффузионный критерий Прандтля.

Обозначаем:

$$K_\varrho = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{p_1}{p} K_p .$$

$K_p(k_\varrho)$ — отношение парциального давления пара к давлению смеси.

$$K_M = \frac{M_2}{M_1}; \; K_{cp} = \frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}; \; K_c = \frac{C_{p_1}}{C_p}.$$

Параметрический критерий K_C для влажного воздуха может быть заменен двумя критериями $K_M = \dfrac{M_2}{M_1}$ и $K_x = x$ (влагосодержание)

$$K_c = f(K_M, K_x).$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что изобарная теплоёмкости влажного воздуха зависит от молекулярных массов компонентов смеси влагосодержания.

$$C_p = C_{p_2} + C_{p_1} \cdot x.$$

Критерий K_x может быть заменен критериями K_p, так как влагосодержание x есть функция K_p.

$$x = 0{,}622 \frac{p_1}{p - p_1} = 0{,}622 \frac{p_1/p}{1 - p_1/p} = 0{,}622 \frac{k_p}{1 - k_p}.$$

Таким образом, зависимость (3—8) может быть описан следующим выражением:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} \cdot \frac{C_{p_1}}{C_p} \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}\right) \frac{1}{\mathrm{Re} \cdot Pr_D} = f(K_p, K_M, K_{cp}, \mathrm{Re}, Pr_D).$$

Из уравнения движения можно получить следующий критерий подобия:

$$Eu = \frac{p}{\varrho \cdot u^2}$$, критерий Эйлера.

$$Fr = \frac{g \cdot l}{u^2}$$, критерий Фруда.

или $G_a = Fr \cdot \mathrm{Re}^2 = \dfrac{g \cdot l^3}{\nu^2}$, критерий Галилея

или $Ar = G_a \cdot \dfrac{\varrho - \varrho_0}{\varrho} = \dfrac{g \cdot l^3}{\nu^2} \cdot \dfrac{\varrho - \varrho_0}{\varrho}$, критерий Архимеда и параметрический критерий:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} \left(1 - \frac{M_2}{M_1}\right) \cdot \frac{D}{u \cdot l} = f(K_p, K_M, \mathrm{Re}, Pr_D).$$

Из уравнения непрерывности можно получить следующий параметр

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}\left(1-\frac{M_2}{M_1}\right)\frac{D}{u\cdot l}=f(K_P, K_M, \mathrm{Re}, Pr_D.$$

Из уравнения диффузии:

$$\frac{u\cdot l}{D}=\mathrm{Re}\cdot Pr_D.$$

Из дифференциального уравнения теплопереноса

$$\alpha\cdot\Delta t=-\lambda\frac{\partial t}{\partial y}$$

получаем критерий Nu

$$Nu=\frac{\alpha\cdot l}{\lambda}, \quad \text{критерий Нуссельта}$$

3.2.2 *Критериальные уравнения*

При изучении теплообмена искомой величиной является коэффициент теплообмена α.

Таким образом обработка экспериментальных данных по теплообмену обычно производится в виде соотношения между критериям подобия.

$$Nu=f(\mathrm{Re}, Ar, Pr, Pr_D, K_P, K_M, K_{C_p}\ldots). \tag{3—9}$$

В применении к отдельным задачам критериальные соотношения (3—9) могут быть упрощены. Для данной смеси $K_M=\frac{M_2}{M_1}=\mathrm{const}$;

$$K_{C_p}=\frac{C_{p_2}}{C_{p_1}}=\mathrm{const}$$

например для влажного воздуха имеем: $K_M=\frac{29}{18}=1{,}611$

$$K_{C_p}=\frac{1}{1{,}965}=0{,}510.$$

При вынужденном движении обычно можно пренебречь влиянием свободного движения, вследствие чего выпадает критерий Ar.

Тогда критериальное уравнение принимает вид

$$Nu=f(\mathrm{Re}, Pr, Pr_D, K_p). \tag{3—10}$$

Уравнение (3—10) обычно выражается в степенной форме

$$Nu = C \cdot \mathrm{Re}^m Pr^n Pr_D^o K_p^p \qquad (3\text{—}11)$$

где

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}; \ \mathrm{Re} = \frac{u \cdot l}{\nu}; \ Pr = \frac{\nu}{a}; \ Pr_D = \frac{\nu}{D}; \ K_p = \frac{p_1}{p},$$

C, m, n, o, p — постоянные.

Уравнение (3—11) может быть применено в целях обработки экспериментальных данных в исследовании процесса теплообмена.

Резюме

В работе рассматривается система дифференицальных уравнений, описывающая процесс теплообмена в влажном воздухе. Она включает в себя уравнения энергии, движения, непрерывности и диффузии.

Путем обработки этих уравнений методами теории подобия были получены критерии, зависимости подобия и критериальные уравнения.

Критериальные уравнения могут использоваться в целях обработки экспериментальных данных в исследовании теплообмена в влажном воздухе.

Литература

1. Берман Л. Д.: О критериях подобия для совместно протекающих прогрессов тепло- и массообмена в гетерогенных системах. Журнал Технической физики 1958 — №— 11.
2. Brauer, H.—Muhle, J.: Stoffübergang bei laminaler Grenzschichtströmung an ebenen Platten. Chemie-Ing-Techn. 1967. № 1.
3. Гухман А. А.: Применение теорий подобия к исследованию процессов тепло- и массообмена. Изд. во. Высшая школа, Москва, 1967.
4. Harmatha A.: Transport folyamatok hasonlósága. Energia és atomtechnika 1973 — № 10 és 1974 — № 1.
5. Исаченко В. П.—Осипова В. А.—Сукомен А. С.: Теплопередача. Энергия, Москва, 1965.
6. Jászay T.: Műszaki hőtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
7. Лыков А. В.—Михайлов Ю. А.: Теория тепло- и массопереноса. Госэнергиздат, 1963.
8. Михеев М.: Основы теплопередачи. Энергия, 1968.
9. Spalding: Konvektív tömegátadás. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1968.
10. Szücs E.: Hasonlóság és modell. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1970.
11. Берман Л. Д.: Об особенностях переноса тепла и вещества в движущихся двухкомпонентных смесях. Теплоэнергетика, 1962, №—1.

Tran The Son H-1521 Budapest