

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ (ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА) НЕРАЗРЕЗНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГИХ ОПОРАХ

ЛЕ ВЪЕТ ЗАНГ

Кафедра механики Будапештского Технического Университета

Поступило: 18 октября 1977 г.

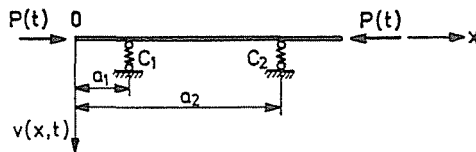
Представлено: проф. д-р П. Михелбергер

В процессе динамического исследования средства передвижения замещаются упрощенными моделями. При продольной нагрузке динамическая модель средств передвижения рассмотрена упругой опорной балкой. В случае, когда вагон-платформа не имеет верхнюю конструкцию и продольная балка (стержень) вагона, является единственной несущей конструкцией, это приближение особенно хорошо применяется. Если кузов вагона имеет сложную конструкцию, то можно рассмотреть эквивалентную балку как простую, или в некоторых случаях отдельно изучать балку, расположенную в нижней конструкции кузова вагона ([1], стр. 109).

Работа неразрезного стержня на упругих опорах при продольных динамических нагрузках пока еще недостаточно изучена. Для определения параметрического колебания средств передвижения при продольных динамических нагрузках необходимо исследовать динамическую устойчивость неразрезного стержня на упругих опорах.

1. Общее уравнение динамической устойчивости

Рассмотрим неразрезную балку на упругих опорах (рис. 1) с постоянным сечением. Балка нагружена осевой силой



$$P(t) = P_0 + P_1 \Phi(t) = \alpha \bar{P}_0 + \beta \bar{P}_1 \Phi(t)$$

где α, β — безразмерные параметры,

$\Phi(t)$ — периодическая функция времени T , о которой предполагаем, что ее можно разложить в сходящийся ряд Фурье.

Внутренние и внешние силы, действующие на элемент стержня при колебании, находятся в динамическом равновесии:

$$EJ \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + [\alpha \bar{P}_0 + \beta \bar{P}_1 \Phi(t)] \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + q^*(x, t) = 0 \quad (1)$$

Это уравнение действительно для элемента в каждом пролете, где $q^*(x, t)$ — эквивалентная распространяемая нагрузка, возникающая из упругих опор.

Кривую прогибов неразрезного стержня представим в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) y_k(x) \quad (2)$$

где $f_k(t)$ — обозначает пока еще неизвестную функцию времени,
 $y_k(x)$ — поперечный прогиб данной неразрезной балки при k -той собственной частоте, следовательно, k -тый вид собственного колебания.

Формы собственных колебаний, как известно, ортогональны:

$$\Sigma \int m y_k(x) y_j(x) dx \begin{cases} = 0, & k \neq j \\ \neq 0, & k = j \end{cases} \quad (3)$$

где интегрирование производится по всей длине пролета, и знак Σ относится ко всем пролетам неразрезной балки. В дальнейшем будем принимать нормированные функции, т. е. такие, для которых

$$\Sigma \int m y_j^2(x) dx = 1 \quad (4)$$

Функции будут нормированы позднее. Подстановкой равенства (2) в уравнение (1) получим уравнение

$$\begin{aligned} L(x, t) = EJ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \frac{d^4 y_k(x)}{dx^4} + P(t) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \frac{d^2 y_k(x)}{dx^2} + \\ + m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} y_k(x) + q^*(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Левая часть уравнения обозначает уравновешенную систему сил. Виртуальная работа уравновешенной системы сил равняется нулю. За виртуальные перемещения будем принимать формы собственных колебаний $y_j(x)$:

$$\Sigma \int L(x, t) y_j(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

Подстановкой уравнения (5) в уравнение (6) получим члены уравнения (6):

$$\sum \int EJ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \frac{d^4 y_k(x)}{dx^4} \cdot y_j(x) dx = f_j(t) \cdot w^2$$

так как

$$\frac{d^4 y_k(x)}{dx^4} = \frac{m w_k^2}{EJ} y_k(x)$$

и w_k — k -тая собственная частота.

$$\begin{aligned} & \sum \int m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 f_k(t)}{dt^2} y_k(x) y_j(x) dx = \frac{d^2 f_j(t)}{dt^2} \\ & \sum \int P(t) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \frac{d^2 y_k(x)}{dx^2} y_j(x) dx = -w_j^2 \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha a_{jk} + \beta \Phi(t) b_{jk}] f_k(t) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{jk} &= \frac{\bar{P}_0}{w_j^2} \left\{ \sum \int \frac{dy_k(x)}{dx} \cdot \frac{dy_j(x)}{dx} dx - \sum \left[\frac{dy_k(x)}{dx} \cdot y_j(x) \right]_0^l \right\} \\ b_{jk} &= \frac{\bar{P}_1}{w_j^2} \left\{ \sum \int \frac{dy_k(x)}{dx} \cdot \frac{dy_j(x)}{dx} dx - \sum \left[\frac{dy_k(x)}{dx} y_j(x) \right]_0^l \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Член

$$\sum \left[P(t) \frac{dy_k(x)}{dx} \cdot y_j(x) \right]_0^l$$

выражает виртуальную работы силы $P(t) \frac{dy_k(x)}{dx}$, которая является поперечной составляющей осевой силы $P(t)$. Эта работа при упругих опорах и концах консолей отличается от нуля, так как точки их приложения при колебании смещаются.

По принципу виртуальной работы:

$$\sum \int q^*(x, t) y_j(x) dx = \sum_{i=1}^n X^{(i)}(a_i, t) \cdot y_j(a_i) \quad (8)$$

где $a_i, X^{(i)}(a_i, t)$ — координата и реактивная сила i -той упругой опоры, $n = 2$ — число упругой опоры (рис. 1).

Динамический поперечный прогиб выражается соотношением:

$$v(a_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) y_k(a_i) \quad (9)$$

где $f_k(t)$ обозначает пока еще неизвестную функцию времени при k -той собственной частоте,

$y_k(a_i)$ — k -тый вид собственного колебания в зависимости от координаты a_i .

$$X^{(i)}(a_i, t) = \frac{1}{C_i} v(a_i, t) \quad (10)$$

или

$$X^{(i)}(a_i, t) = \frac{1}{C_i} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) y_k(a_i) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i)}(a_i, t)$$

где C_i — константа пружины i -той упругой опоры,

$X_k^{(i)}(a_i, t)$ — k -тый компонент реактивной силы i -той упругой опоры:

$$X_k^{(i)}(a_i, t) = \frac{1}{C_i} f_k(t) y_k(a_i) \quad (11)$$

В дальнейшем еще раз будем пользоваться принцип виртуальных работ:

$$\sum_{i=1}^n X_k^{(i)}(a_i, t) \cdot y_j(a_i) = \sum_{i=1}^n X_j^{(i)}(a_i, t) y_k(a_i)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} [f_k(t) - f_j(t)] y_j(a_i) y_k(a_i) = 0$$

так как

$$f_k(t) - f_j(t) \neq 0, \quad k \neq j,$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} y_j(a_i) y_k(a_i) \begin{cases} = 0, & k \neq j \\ \neq 0, & k = j \end{cases} \quad (12)$$

Согласно соотношениям (8), (10) и (12) получим следующий результат:

$$\Sigma \int q^*(x, t) \cdot y_j(x) dx = w_j^2 f_j(t) d_j$$

где

$$d_j = \frac{1}{w_j^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} y_j^2(a_i) \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

Таким образом, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{w^2} \frac{d^2 f_j(t)}{dt^2} + f_j(t) + d_j f_j(t) - \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha a_{jk} + \beta b_{jk} \Phi(t)] f_k(t) = 0$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

Примем обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \dots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1^2} & 0 & 0 \dots \\ 0 & \frac{1}{w_2^2} & 0 \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{w_3^2} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & d_2 & 0 \dots \\ 0 & 0 & d_3 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 1 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

После этого система уравнений (14) примет вид

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E + D - \alpha A - \beta \Phi(t) B] f = 0 \tag{16}$$

2. Свойства уравнения (16)

Рассмотрим уравнение (16), где A, B, C, D — матрицы с постоянными элементами, $\Phi(t)$ — периодическая функция времени периода

$$T = \frac{2\pi}{\theta} \tag{17}$$

$$\Phi(t + T) = \Phi(t), \tag{18}$$

которую мы будем считать представимой в виде ряда Фурье.

«Полученная система, строго говоря, является бесконечной. Однако в дальнейшем мы ограничимся конечным числом уравнений, выбирая каждый раз это число в зависимости от требуемой точности вычислений» ([2], стр. 255).

Представим уравнение (16) в виде

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + \sum_{k=1}^m \Phi_{ik}(t) f_k = 0 \tag{19}$$

где

$$[\Phi_{ik}] = C^{-1}[E + D - \alpha A - \beta \Phi(t) B]$$

Введем далее новые переменные

$$\left. \begin{aligned} x_j &= f_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ x_j &= \frac{df_{j-m}}{dt} \quad (j = m+1, m+2, \dots, 2m) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из уравнений (19) и (20) следует, что уравнение (16) выражается в виде

$$\frac{dX}{dt} + A(t)X = 0 \quad (21)$$

здесь $X^* = [x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, \dots, x_{2m}]$

$A(t)$ — матрица порядка $2m$, из (18) следует, что

$$A(t+T) = A(t) \quad (22)$$

Согласно свойству (22), если матрица $X(t)$ является решением уравнения (21), то матрица $X(t+T)$ также является его решением и может быть получена из $X(t)$ с помощью некоторого неособенного линейного преобразования с постоянными коэффициентами:

$$X(t+T) = RX(t) \quad (23)$$

где $R = [r_{ik}]$, r_{ik} — координаты матрицы $X(t+T)$ в фундаментальной системе $X(t)$. Таким образом, можно находить такую фундаментальную систему, которая при добавлении к t периода преобразуется в векторной записи

$$x_k(t+T) = \varrho_k x_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, 2m) \quad (24)$$

здесь x_k — вектор k -го решения уравнения (21), т. е. (16),

ϱ_k — k -тая характеристическая корень линейного преобразования (23).

Из формулы (24) следует, что решения системы (21) могут быть представлены в виде

$$x_k(t) = e^{\frac{t}{T} \ln \varrho_k} \cdot \varphi_k(t) \quad (25)$$

где $\varphi_k(t)$ — периодический вектор с периодом T .

Учитывая, что

$$\ln \varrho_k = \ln |\varrho_k| + i \arg \varrho_k \quad (26)$$

приходим к следующему выводу:

Если $\ln |\rho_k| < 0$, $|\rho_k| < 1$, то общее решение уравнения (16) устойчивое; если $\ln |\rho_k| > 0$, $|\rho_k| > 1$, то общее решение уравнения (16) неустойчивое. Если $\ln |\rho_k| = 0$, $\rho_k = \pm 1$, то это предельный случай. В интервале между корнями $\rho_k = 1$ и $\rho_k = -1$ лежала бы вещественная корень, следовательно, $\rho_k = 0$, это невозможно ввиду неособенности преобразования (23). Корни $\rho_k = 1$ и $\rho_k = -1$ ограничивают область комплексных корней (устойчивую область). В случае, когда $\rho_k = 1$, решение уравнения (16) будет периодическим с периодом T , и когда $\rho_k = -1$, с периодом $2T$.

Отсюда следует, что на границах областей неустойчивости дифференциальная система имеет периодические решения с периодом T или $2T$. Точнее говоря, области динамической неустойчивости ограничены решениями с одинаковыми периодами и области динамической устойчивости — решениями с разными периодами T или $2T$ ([2], стр. 305).

3. Вывод уравнений критических частот

Отыскиваем решение уравнения (16) с периодом $2T$ в виде ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) \quad (27)$$

где $f(t)$ является вектором с компонентами $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots$ и a_k, b_k являются векторами с компонентами $a_{1k}, a_{2k}, \dots, b_{1k}, b_{2k}, \dots$. В случае нагружения, когда $\Phi(t) = \cos \theta t$, при подстановке (27) в уравнение (16) и при приравнении коэффициентов, стоящих при синусах и косинусах одинаковых аргументов, нулю, получим две системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(E + D - \alpha A + \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right) a_1 - \frac{1}{2} \beta B a_3 &= 0 \\ \left(E + D - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C \right) a_k - \frac{1}{2} \beta B (a_{k-2} + a_{k+2}) &= 0 \\ &(k = 3, 5, 7, \dots) \\ \left(E + D - \alpha A - \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right) b_1 - \frac{1}{2} \beta B b_3 &= 0 \\ \left(E + D - \alpha A - \frac{1}{4} k^2 \theta^2 C \right) b_k - \frac{1}{2} \beta B (b_{k-2} + b_{k+2}) &= 0 \\ &(k = 3, 5, 7, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Если эти две системы должны иметь решения, отличающиеся от нуля, то их детерминанты должны равняться нулю. Таким образом, получим урав-

нение критических частот:

$$\begin{vmatrix} E + D - \alpha A \pm \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 \\ -\frac{1}{2} \beta B & E + D - \alpha A - \frac{9}{4} \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B \\ 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E + D - \alpha A - \frac{25}{4} \theta^2 C \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

В уравнении (29) содержатся оба случая (\pm).

Подобным образом будем отыскивать решение с периодом T в форме ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) \quad (30)$$

Если подставим выражение (30) в уравнение (16), то аналогично предыдущему случаю, получим детерминанты:

$$\begin{vmatrix} E + D - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 \\ -\frac{1}{2} \beta B & E + D - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B \\ 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E + D - \alpha A - 9\theta^2 C \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

и

$$\begin{vmatrix} E + D - \alpha A & -\beta B & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \beta B & E + D - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E + D - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2} \beta B \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \beta B & E + D - \alpha A - 9\theta^2 C \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

4. Границы области динамической неустойчивости

В случае, когда $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, из уравнения (16) получим уравнение собственного колебания нагруженной балки:

$$C \frac{d^2 f}{dt^2} + [E + D - \alpha A] f = 0. \quad (33)$$

Предполагаем, что колебание гармоническое, и отыскиваем решение уравнения (33) в виде

$$f(t) = a \sin (\Omega t + \alpha) \quad (34)$$

где a — вектор амплитуды,

Ω — частота собственных колебаний балки, нагруженной статическими осевыми силами.

Подстановкой выражения (34) в уравнения (33) получим уравнение для определения частот собственных колебаний нагруженной балки:

$$|E + D - \alpha A - \Omega^2 C| = 0 \quad (35)$$

В случае, когда $\alpha \neq 0$, $\beta \rightarrow 0$, из уравнений (29), (31) и (32) получим уравнение критических частот:

$$\left| E + D - \alpha A - \frac{k^2 \theta^2}{4} C \right| = 0 \quad (36)$$

Сравнивая уравнение (36) с уравнением (35), легко получаем, что

$$\theta_* = \frac{2\Omega}{k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (37)$$

где θ_* — критическая частота внешней силы.

Формула (37) дает те соотношения между частотой внешней силы и частотой собственных колебаний стержня, вблизи которых возможно возникновение неограниченно возрастающих колебаний. Область неустойчивости, лежащая вблизи $\theta_* = 2\Omega$, будем называть главной областью динамической неустойчивости.

Приближенное решение для границы главных областей неустойчивости получим, приравняв нулю определитель верхнего диагонального элемента матрицы (29):

$$\left| E + D - \alpha A \pm \frac{1}{2} \beta B - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0 \quad (38)$$

В случае, когда $\bar{P}_0 = \bar{P}_1$, уравнение (38) примет вид:

$$\left| E + D - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) A - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0 \quad (39)$$

В случае, когда $A = [a_{11}]$, $D = [d_1]$, $C = \left[\frac{1}{w_1^2} \right]$, из (39) получим формулу для определения границы главной области неустойчивости:

$$\frac{\theta_*}{2w_1} = \sqrt{1 + d_1 - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) a_{11}} \quad (40)$$

где w_1 — основная частота балки.

5. Из вышеприведенных получим следующие результаты

а) В случае неразрезного стержня на упругих опорах при динамических продольных нагрузках $D \neq 0$; однако в случае неподвижных опор $D = 0$ ([3], стр. 430).

б) В первом случае ширина областей динамической неустойчивости меньше, чем в случае неподвижных опор ([3], стр. 429).

Резюме

Приводится методика исследования динамической устойчивости стержня на упругих опорах. Определяются границы области динамической устойчивости.

Литература

1. MICHELBERGER, P.—RUDNAI G.: Könyvszerkezetek tervezése és méretezése. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
2. Болотин, В. В.: Динамическая устойчивость упругих систем. Гос. издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956
3. Колоушек, В.: Динамика строительных конструкций. Изд-во литературы по строительству, Москва, 1965.

Ле Вьет Занг

Будапештский Технический Университет
H-1521 Будапешт