РОЛЬ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО УПРОЩЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ОХЛАЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМОТОРОВ

Ф. КОНЕЧНИ

Кафедра Аэро- и Термотехники Будапештского Технического университета

Посступило 3. мая 1977 г.

Представлено проф. д-р Э. Пастор

ОБОЗНАЧЕНИЯ

a_0 — скорость звука $a_0^2 = \varkappa RT_0$
A — поверхность, ограничивающая закрытую систему $A = A(t)$
c — абсолютное значение скорости потока
$\bar{c}$ — вектор скорости потока; $\bar{c} = \bar{c}(\bar{r}, t)$ по Эйлеру
$c_x c_y c_z$ — компоненты скорости потока в системе координат $x\ y\ z$
$c_x = c_x(x, y, z, t)$; $c_y = c_y(x, y, z, t)$; $c_z = c_z(x, y\ z, t)$
c_p — теплоёмкость относящаяся к единице массы при неизменном p
c_v — теплоёмкость относящаяся к единице массы при неизменном ϱ
$\bar{\bar{D}}$ — производная тензора поля скоростей; $\bar{\bar{D}} = \partial\bar{c}/\partial\bar{r}$
$\bar{\bar{D}}_s$ — тензор скорости деформации
$\mathfrak{D}$ — диссипативная функция
e_b — внутренняя энергия единицы массы; для идеального газа $e_b = c_v T$
e_c — кинетическая энергия единицы массы; $e_c = c^2/2$
E — полная энергия закрытой системы
$\bar{\bar{E}}$ — единичный тензор
$\bar{g}$ — массовая сила, действующая на единицу массы $\bar{g} = \bar{g}(\bar{r}\ ; t)$
i — энтальпия единицы массы, для идеального газа $i = c_p T$
$\bar{I}$ — импульс закрытой системы
K — отношение количества тепла трения и тепла вводимого в систему
M — суммарная масса системы
$M(\mu)$ — функция определяемая в уравнении (19)
p — давление; $p = p(\bar{r}, t)$ по Эйлеру
Pr — число Прандтля
$\bar{r}$ — вектор места в системе координат x, y, z
R — газовая постоянная
t — время
T — абсолютная температура; $T = T(\bar{r}, t)$ по Эйлеру
V — объём закрытой системы $V = V(t)$
x, y, z — прямоугольные компоненты вектора места в системе координат x, y, z
δT — падение температуры в термическом пограничном слое
ΔT_{ad} — увеличение температуры при адиабатическом торможении потока
$\varkappa$ — адиабатический показатель; $\varkappa = c_p/c_v$
λ — коэффициент теплопроводности
μ — коэффициент динамической вязкости
$\bar{\bar{\pi}}$ — тензор напряжения
ϱ — плотность движущейся среды; $\varrho = \varrho(\bar{r}, t)$ по Эйлеру; физически: $\varrho = \varrho(p\ T) = \varrho[p(\bar{r}, t), T(\bar{r}, t)]$
∇^2 — оператор Лаплася; при скалярном аргументе $f = f(x, y, z)$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

при векторном аргументе $\bar{f} = \bar{f}(\bar{r})$

$$\nabla^2 \bar{f} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\,\bar{f} - \mathbf{rot}\ \mathrm{rot}\,\bar{f}$$

d/dt — оператор субстанционального дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z}$$

1. Введение

Один из главных направлений развития современного электромоторостроения — увеличение мощности приходящейся на единицу объёма. Одновременно допускаемое тепловое напряжение изоляционных материалов ядляется ограничивающим фактором повышения плотности мощности. При заданной качестве изоляционных материалов желаемая большая плотность мощности осуществима только интенсификацией охлаждения. Этому служит то нередкое конструктивное решение, в котором охлаждающую среду (чаще всего воздух, или водород) подводят как можно ближе к местам освобождения тепла по аксиальным и радиальным каналом ротора и статора. Со стенок каналов тепло передаётся охлаждающей среде конвекцией. Поэтому с точки зрения усовершенствования электромоторов интенсификация теплопередачи имеет огромное значение, и это объясняет то, что научные работники уделяют большое внимание теоретическому и экспериментальному исследованиям процесса теплопередачи во вращающихся полях.

В настоящей работе будем заниматься составлением системы уравнений представляющих собой основу этих исследований, и ролью уравнения энергии в этой системе. Так как в литературе названной темы [4], [7], [8], [10], [11], [12], [13] обычно исходят одной из существующих, готовых форм уравнения энергии, а также из-за несогласованности терминов возможны недоразумения, кажется целесообразным выводить основную систему уравнений из основных законов природы, что одновременно поясняет физическую основу предположений, упрощающих создание математической модели.

2. Система дифференциальных уравнений конвективной теплопередачи

В заданном канале конвективная теплопередача определяется в первую очередь течением охлаждающей среды. Поэтому при рассмотрении этого явления играют большую роль два основных уравнения гидродинамики: уравнение неразрывности и уравнение движения. Первое выражает закон сохранения массы, а второе—закон сохранения импульса для движущих сплошных сред. В этих двух уравнениях кроме коэффициента вязкости сплошной среды встречаются ещё меняющиеся по всей длине канала, в общем случае неустойчивые и во времени скорость, давление и плотность. При несжимаемой среде плотность можем считать заданной и постоянной, и так с помощью имеющихся двух уравнений можем определить неизвестные скорость и давление. В процессе теплопередачи на гидродинамические процессы накладываются ещё и тепловые потоки, вследствие чего течение среды становится неизотермическим. Это существенно осложняет задачу, потому что

— изменяющаяся температура увеличивает на одно число неизвестных,

— плотность движущейся среды теоретически перестаёт быть постоянным, а становится функцией термодинамического состояния,

— Физические величины (коэффициент вязкости, удельная теплоёмкость, коэффициент теплопроводности) характеризующие материал движущейся сплошной среды тоже будут изменяться.

Для определения пяти новых неизвестных величин (T, ϱ, μ, c_v λ) появляющихся как переменные в процессах течения, связанного с теплопередачей, необходимо дополнить два уравнения гидродинамики дополнительными уравнениями. В связи с этим следует подумать о том, что термодинамическое состояние однофазных сред, используемых для охлаждения электромоторов через уравнение термического состояния типа $f(p, T, \varrho) = 0$ однозначно определяется любым двум из трёх параметров термического состояния (p, T, ϱ). Так как при данном охладителе характеристики материала μ, c_v и λ зависят только от термодинамического состояния, их значения выражаются также с помощью названных двух параметров. Так, если к давлению, уже встречающемуся в уравнении движения, вторым независимым параметром термического состояния выбрать температуру, тогда четыре дополнительные уравнения можно записать в виде:

$$\varrho = \varrho(p, T) \tag{1}$$

$$\mu = \mu(p, T) \tag{2}$$

$$c_v = c_v(p, T) \tag{3}$$

$$\lambda = \lambda(p, T) \tag{4}$$

(Уравнение (1) есть уравнение термического состояния охладителя. Уравнения определяющие параметры материала (2), (3) и (4) обычно имеются в виде эмпирических полиномов.) Необходимое ещё пятое дополнительное уравнение должно пояснить распределение в пространстве и во времени температуры выбранной независимым термодинамическим параметром состояния, то есть должно характеризовать *не состояние, а процесс*. Таким уравнением является уравнение энергии, выражающее принцип сохранения энергии, описывающее изменения суммарного энергосодержания толкованного как сумма кинетической и внутренней энергии движущейся среды в аэродинамическом процессе теплопередачи.

Таким образом для вычисления трёх переменных (скорости, давления, и тепературы) определяющих механическое и термодинамическое состояние движущейся среды, имеется три независимых, основных физических принципа: законы сохранения массы, импульса и энергии. Эти принципы сохранения дополненные уравнениями (1)—(4) — образуют закрытую систему уравнений, с помощью которой общая задача конвективной теплопередачи теоретически может быть решена. Так как уравнения (1)—(4) не зависят от процесса, а зависят только от рода охладителя, в дальнейшем будем их считать заданными, и заниматься будем только уравнениями, выражающими принципы сохранения.

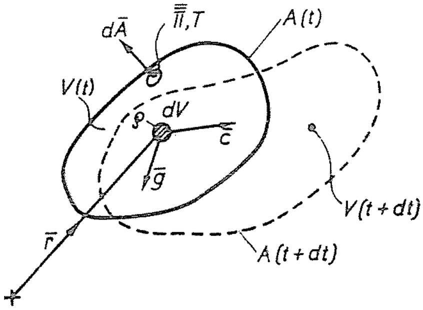

Рис. 1

Масса, импульс, энергия — это три таких физических понятия, носителем которых является сама движущаяся материя. Их принципы сохранения целесообразно математически оформить с помощью представления Лагранжа, который наилучшим образом выражает это установление. Это означает, что нужно изучать судьбу конечного объёма содержащего определённого и неизменяемое количество материала, так называемой закрытой системы, с точки зрения изменения во времени его массы, импульса и энергии. Важно подчеркнуть, что меняющиеся во времени физические параметры (как например, скорость, температура и так далее) в представлении Лагранжа означают всегда параметры (скорость, температуру и т. д.) *одного и того же элемента массы*. Отделим от окружения, по рис. № 1, любую, но содержащую неизменно одни и те же элементы массы, часть движущейся сплошной среды объёмом V, мнимой, закрытой поверхностью A. Этот объём, движущийся вместе с потоком, форма и размеры которого меняются во времени, можем считать закрытой системой, так как по определению не происходит перемена его элементов массы с окружающей средой. Принципы сохранения сформулируются в форме балансовых уравнений этой закрытой системы.

Баланс массы закрытой системы. Так как определение мнимой граничной поверхности A исключает возможность обмена материалом между системой и окружающей средой, масса M закрытой системы не может изменяться во времени:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int\limits_{V(t)} \varrho dV = 0. \tag{5}$$

Это и есть балансовое уравнение, выражающее принцип сохранения массы.

Баланс импульса закрытой системы. Принцип сохранения импульса выражает, что изменение за единицу времени полного импульса закрытой системы $\bar{I}$, полученного как сумма элементарных импульсов $\bar{c}\varrho dV$, равняется ровнодействующим всех сил действующих на систему.

По своему физическому смыслу эти силы возникают или вследствие действия внешних силовых полей в каждом элементарном объёме dV системы как массовые силы (дальнодействие), или вследствие локального напряжённого состояния на элементах dA окружающей поверхности как поверхностные силы (близкодействие). Эти силы можно записать соответственно в форме $\bar{g}\varrho\, dV$ и $\bar{\bar{\pi}} d\bar{A}$. Значит баланс импульса закрытой системы имеет форму:

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \bar{c}\varrho dV = \int\limits_{V(t)} \bar{g}\varrho dV + \int\limits_{A(t)} \bar{\bar{\pi}} d\bar{A} \tag{6}$$

(Нормальный вектор $d\bar{A}$ элемента поверхности dA направлен в сторону окружения. При определении области интегрирования подчеркнём, что объём V и поверхность A являются функциями времени t.)

Баланс энергии закрытой системы. Суммарная энергия системы выходит из объёмного интеграла суммы кинетической энергии $e_c\varrho dV$ и внутренней энергии $e_b\varrho dV$ элементов массы ϱdV. Так как от поверхности A не требовалось быть жёстким и адиабатическим, эта поверхность даёт возможность на энергетическое взаимодействие системы и окружающей среды. Вследствие этого полное энергосодержание закрытой системы будет функцией времени:

$$E = E(t) = \int\limits_{V(t)} (e_c + e_b)\,\varrho dV.$$

Если исключить радиационную теплопередачу между системой и окружающей средой, и сделать оговорку, чтобы внутри системы никакого источника энергии (химические реакции, освобождение джоулева тепла и т. д.) не было, то причиной изменения полной энергии системы служит с одной стороны работа сил действующих на систему, с другой стороны тепловой поток, осуществляющийся как молекулярная теплопроводность между системой и окружающей средой через граничную поверхность. Эти взаимодействия по соглашению могут считаться позитивными, если они увеличивают энергосодержание системы.

После этого баланс энергии можем сформулировать следующим образом: изменение полной энергии системы за единицу времени равняется алгебраической сумме мощности сил, действующих на систему и теплоты передаваемой через граничную поверхность за единицу времени. Работа за единицу времени над элементом массы ϱdV. Движущегося со скоростью $\bar{c}$ в силовом поле с интенсивностью $\bar{g}$ равняется $\overline{\bar{c}\bar{g}}\varrho dV$, а мощность поверхностной силы $\bar{\bar{\pi}}d\bar{A}$ действующей на элемент поверхности $d\bar{A}$, движущегося со скоростью $\bar{c}$, равняется $\overline{\bar{c}\bar{\bar{\pi}}}d\bar{A}$. Тепловой поток проходящий через элемент поверхности $d\bar{A}$ за единицу времени можно получить по закону теплопроводимости Фурье с правильным знаком и помощью произведения λ grad $Td\bar{A}$. На основе этих соображений можно записать балансовое уравнение, выражающее принцип сохранения энергии в форме:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} (e_c + e_b)\,\varrho dV = \int\limits_{V(t)} \overline{\bar{c}\bar{g}}\varrho dV + \int\limits_{A(t)} \overline{\bar{c}\bar{\bar{\pi}}}d\bar{A} + \int\limits_{A(t)} \lambda \operatorname{grad} Td\bar{A} \tag{7}$$

Интегральные уравнения (5), (6) и (7) сформулированные представлением Лагранжа очень наглядны и с большой верностью передают физическое содержание принципов сохранения. Однако их применение к конкретным случаям сопровождается большими математическими затруднениями. Представление Эйлера дает гораздо проще применяемую математическую модель потока. Это представление связывает физические характеристики не с движущейся средой, а геометрическим пространством, то есть принимает их математически не функцией элемента массы и времени, а функцией места и времени. Теперь мы перепишем балансовые уравнения (5) (6) и (7) в соответствующей представлению Эйлера форме, а именно дифференциальными уравнениями, содержащими утверждение относящееся к одной точке пространства.

Для этой цели в левых частях уравнений переменяется последовательность интегрирования по объёму и дифференцирования по времени, и следует принять во внимание, что масса в элементарном объёме во времени постоянно. После этого стоящие в правых частях поверхностные интегралы преобразуются с помощью теоремы Гаусса-Остроградского в объёмные интегралы. Наконец, исходя из соображения, что уравнения (5) (6) и (7) должны быть верными при любом выбранном объёме V, получаем искомые дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho \operatorname{div} \bar{c}\,, \tag{8}$$

$$\varrho\,\frac{d\bar{c}}{dt} = \varrho\bar{g} + \operatorname{Div} \bar{\bar{\pi}}\,, \tag{9}$$

$$\varrho\,\frac{d}{dt}(e_c + e_b) = \overline{\bar{c}\varrho\bar{g}} + \operatorname{div}(\bar{\bar{\pi}}\bar{c}) + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \tag{10}$$

Субстанциальная производная формой df/dt физических характеристик $f = f(\bar{r}, t)$ данных методом Эйлера в левых частях уравнений производится как сумма локальной и конвективной производной этой же характеристики:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \bar{c}. \qquad (11)$$

Уравнение (8) есть *уравнение неразрывности*. Его значение следующее: в единице объёма считаемой открытой системой прирост массы за единицу времени вследствие локального изменения плотности равняется алгебраической сумме потоков массы через граничную поверхность единицы объёма за единицу времени.

Уравнение (9) есть *уравнение движения*. В левой части стоит произведение массы единицы объёма и субстанциального ускорения, первый член правой части—массовая сила а второй член—поверхностные силы действующие на единицу объёма.

Уравнение (10) есть *уравнение энергии*, по которому субстанциальное изменение полного энергосодержания единицы объёма сплошной среды за единицу времени равняется алгебраической сумме мощности массовых сил (первый член правой части), полной работы за единицу времени поверхностных сил на единицу объёма (второй член правой части) и сообщаемой единицей объёма теплоты за единицу времени (третий член правой части).

Система этих трёх дифференциальных уравнений является основой гидро- и термодинамического исследования движения сплошной среды. Уравнения в данном виде могут быть использованы при крайне общих условиях. Движущаяся среда может быть ньютоновской или не-ньютоновской, сжимаемой или несжимаемой, вязкостной или идеальной, каплевидной или газообразной. Физические характеристики её материала могут быть неизменными или функциями температуры и давления. Сам поток может быть стационарным или нестационарным, ламинарным или турбулентным. (В последнем случае нужно подставить в уравнение мгновенные, то есть содержащие и компонент пульсации, значения величин имеющих турбулентные пульсации.) Наружные силовые поля могут быть потенциальными или вихревыми. Ограничения имеются только при использовании уравнения энергии: здесь необходимо исключить радиационную теплопередачу, и внутренние тепловые источники.

Исследования явлений течения и теплопередачи в охлаждающих каналах ротора электромоторов целесообразно производить в системе координат вращающихся вместе с ротором. Решение проблемы значит найти такие $f = f(\bar{r}, t)$ функции, с помощью которых можно в любой момент определить пространственное распределение скорости, давления и температуры. Из силовых полей действующих на движущуюся среду гравитационное и центробежное силовое поле могут считаться известными, но поле Кориолиса также не означает новую неизвестную, так как определяется относительной скоростью и угловой скоростью ротора. Теплота — определённая электрическими и магнитными процессами и переданная за единицу времени охладителю тоже может считаться заданной. Геометрические размеры мотора и изучаемые режимы работы (пуск, стационарный режим, изменения нагрузки, остановка) дают начальные и граничные условия проблемы. Если мы имеем данные о материале охладителя (смотри дополнительные уравнения (1)—(4)) и уравнение его напряжённого состояния (смотри ниже), то с помощью системы дифференциальных уравнений (8) (9) и (10) можем однозначно определить три искомые функции распределения.

3. Анализ роли уравнения энергии

В дальнейшем обратим внимание на уравнение энергии.

Уравнение (10) связывает частичные процессы стоящие в сложной связи друг с другом. Одна часть этих процессов является совсем механической, другая непосредственно привлёкает за собой изменение внутренней энергии, а третья связана со взаимным или необратимым превращением друг в друга кинетической и внутренней энергии.

С энергетической точки зрения наиболее простым видом течения является изотермическое движение сплошной среды как твёрдого тела. В этом случае работа поверхностных сил целиком используется чисто механически: для изменения кинетической энергии системы и/или для перемещения системы против наружных полей. В этом случае для выражения принципа сохранения энергии нужно было бы лишь составить баланс кинетической энергии. Но при течени деформируемой среды часть работы поверхностных сил расходуется на упругое изменение объёма системы, другая часть необратимо превращается в теплоту трения (рассеивается), и только оставшаяся часть может быть использована в чисто механических целях. Важно подчеркнуть, что в отличие от работы изменения объёма процесс рассеивания возникает и при движении несжимаемой среды, когда деформация выражается только изменением *формы* системы, но *величина объёма* не меняется. Работа изменения объёма и рассеивание происходят с изменением термодинамического состояния, то есть выходят за рамки понятия механической энергии. Поэтому в общем случае движения сжимаемой среды принцип сохранения энергии нужно выразить балансовым уравнением формой (10) относящимся к полной энергии. Наконец, можно понять и то, что при движении несжимаемой среды как нетвёрдого тела баланс внутренней энергии движущейся среды однозначно определяется вводимой снаружу теплотой и рассеянной вследствие внутренней трении мощностью, так как в такой среде нет возможности *взаимного* превращения кинетической и внутренней энергии.

Помимо уравнения (10) относящегося к изменению полной энергии, можно отдельно написать балансовые уравнения как для кинетической так и для внутренней энергии. Эти три уравнения должны удовлетворить тому условию, что сумма двух последних равняется с первым. Возникает вопрос: можно ли заменить уравнение полной энергии одним из последних в системе дифференциальных уравнений (8) (9) (10)?

Прежде всего подчёркиваем, что постановка вопроса без ссылки на систему дифференциальных уравнений не имеет смысла. Ибо по вышесказанным очевидно, что с чисто физической точки зрения балансы кинетической или внутренней энергии имеют более узкое содержание чем уравнение полной энергии, и могут заменить его лишь в особенно простых частных случаях. При исследовании потоков с преобразованием энергии, а также при исследовании теплопередачи *с физической точки зрения* вынуждены дать отрицательный ответ на вопрос. Но ответ с точки зрения *математической роли* уравнения полной энергии (10) в системе дифференциальных уравнений уже не такой однозначный.

Баланс кинетической энергии — хотя с физической точки зрения он имеет самостоятельное значение — можно выводить математическим путём из уравнения движения. Так как скалярное произведение $\bar{c}\dfrac{d\bar{c}}{dt}$ равнозначно с субстанциальной производной кинетиечской энергии элемента массы $e_c = \bar{c}^2/2$, то скалярно умножая все члены уравнения движения (9) получаем баланс кинетической энергии

$$\varrho \frac{de_c}{dt} = \bar{c}\varrho\bar{g} + \bar{c}\,\mathrm{Div}\,\bar{\bar{\pi}}\,. \tag{12}$$

Первый член правой части представляет собой мощность силовых полей на элементе объёма и равняется первому члену правой части уравнения полной энергии (10). А член $\bar{c}\,\mathrm{Div}\,\bar{\bar{\pi}}$ представляет собой только ту часть полной работы $\mathrm{div}(\bar{\bar{\pi}}\bar{c})$ за единицу времени поверхностных сил на элементе объёма, которая расходуется на изменение кинетической энергии.

Уравнение баланса кинетической энергии и уравнение движения с разных точек зрения освещают механическую сторону комплексного гидро- и термодинамического механизма теплопередачи. Однако эти уравнения математически зависят друг от друга. Вследствие скалярного произведения содержание математических информаций уравнения движения уменьшилось. В то время как уравнение движения (как векторное уравнение) даёт возможность определить три скалярных неизвестных (иапример три компонента скорости), то уравнение баланса кинетической энергии даёт возможность определить лишь одно скалярное неизвестное (например абсолютное значение скорости).

В охлаждающих каналах роторов электромоторов из-за силовых полей и неравномерного нагревания могут возникать вторичные течения, то есть геометрическая форма калана не определяет направление скорости. Поэтому при решении проблемы во всяком случае необходимо уравнение движения содержащее больше информаций. Помимо этого уравнение баланса кинетической энергии не содержит дальейших математических информаций, поэтому этот уравнение в системе дифференциальных уравнений ни с математической точки зрения не может заменять уравнения полной энергии.

Баланс внутренней энергии выходит из разности уравнения полной энергии (10) и уравнения баланса кинетической энергии (12):

$$\varrho \frac{de_b}{dt} = \mathrm{div}(\overline{\overline{\pi}}\bar{c}) - \bar{c}\,\mathrm{Div}\,\overline{\overline{\pi}} + \mathrm{div}(\lambda\,\mathrm{grad}\,T) \tag{13}$$

Очевидно это уравнение носит независимую от уравнения движения математическую информацию. Таким образом баланс внутренней энергии вместе с уравнениями неразрывности и движения составляет для решения проблемы конвективной теплопередачи так же закрытую систему дифференциальных уравнений как система (8) (9) (10). Значит в связи с уравнением баланса внутренней энергии на вышеназванный вопрос можно дать утвердительный ответ.

Однако не должны забыть, что из-за математически безупречной замены уравнения полной энергии уравнением баланса вынутренней энергии физическое содержание прежней системы дифферениальных уравнений уменьшилось. Эту подмену должны воспринимать как одну из тех целесообразных способов, которые приводят к математическому упрощению основной системы дифференциальных уравнений. Речь идёт здесь не о том, что система уравнений более простой формы была бы применима лишь при менее общих физических условиях, а о том, что физические выводы, непосредственно делаемые из неё сужаются на меньшую область. Нельзя ожидать, чтобы на основе системы уравнений (8), (9), (13) можно было толковать такие явления, в которых имеется взаимное превращение кинетической энергии во внутреннюю и обратно. (Например, нагревание газов при адиабатическом торможении, или остывание при ускорении. Смотри дальше!) В таких случаях — конечно уже не для определения одной из искомых функций распределения, а для энергетического толкования связи между ними — нуждаются в уравнении полной энергии. Только при знании всего этого допустимо назвать уравнение баланса внутренней энергии (13) уравнением энергии, что довольно часто встречается в литературе теплопередачи.

4. Конкретные формы балансов энергии

Случай ньютоновских сред. Раньше уже заметили, что для решения системы дифференциальных уравнений необходимо знать конкретную форму уравнения выражающего напряжённое состояние движущейся сплошной среды. Обычные охладители электромоторов являются ньютоновскими средами, у которых тензор напряжения линейно зависящий от скорости деформации выражается уравнением:

$$\bar{\bar{\pi}} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\bar{c}\right)\bar{\bar{E}} + 2\mu\bar{\bar{D}}_s. \tag{14}$$

Тензор скорости деформации $\bar{\bar{D}}_s$ — симметрическая часть производного тензора $\bar{\bar{D}} = \partial\bar{c}/\partial\bar{r}$ поля скорости. (Если матрица $\bar{\bar{D}}$ равняется $[D_{ij}]$, то матрица $\bar{\bar{D}}_s$ равняется $1/2\,([D_{ij}] + [D_{ji}])$.) Если выражение (14) подставить в уравнения (10), (12), (13) и вводить функцию:

$$\mathfrak{D} = 2\left[\left(\frac{\partial c_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\bar{c})^2 \tag{15}$$

то после некоторых промежуточных подсчётов получим

$$\varrho\frac{d}{dt}(e_c + e_b) = \bar{c}\varrho\bar{g} - \operatorname{div}(\bar{c}p) + M(\mu) + \mu\mathfrak{D} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \tag{16}$$

$$\varrho\frac{de_c}{dt} = \bar{c}\varrho\bar{g} - \bar{c}\operatorname{grad} p + M(\mu) \tag{17}$$

$$\varrho\frac{de_b}{dt} = -p\operatorname{div}\bar{c} + \mu\mathfrak{D} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \tag{18}$$

где:

$$M(\mu) = \frac{1}{3}\mu\bar{c}\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{c} + \mu\bar{c}\nabla^2\bar{c} + \left(2\bar{\bar{D}}_s\bar{c} - \frac{2}{3}\bar{c}\operatorname{div}\bar{c}\right)\operatorname{grad}\mu \tag{19}$$

Уравнения (16) (17) и (18) выражают балансы полной, кинетической и внутренней энергии при раннее указанных, очень общих условиях, но только для ньютоновских сред. Каждый член уравнений относится к единице времени и единице объёма.

При толковании отдельных членов, членами $\bar{c}\varrho\bar{g}$ и $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$ уже не будем заниматься. Член $\operatorname{div}(\bar{c}\,p)$ означает полную работу поверхностных сил происходящих от давления. Так как значение $\operatorname{div}\bar{c}$ — изменение единичного объёма среды за единицу времени, то член $-p\operatorname{div}\bar{c}$ можно представить как работу изменения объёма сил давления, выполненная на единице объёма за единицу времени. (Если $\operatorname{div}\bar{c} > 0$, то имеет место расширение (экспансия), а если $\operatorname{div}\bar{c} < 0$, то компрессия. Таким образом — включая и отрицательный знак — этот член задаёт мощность изменения объёма согласно нашей договорённости о знаке взаимодействия.) На основе этого очевидно, что член $\bar{c}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{div}\,(\bar{c}\,p) - p\,\mathrm{div}\,\bar{c}$ представляет собой ту долю работы поверхностных сил происходящих от давления, которая расходуется в механических целях.

Структура выражения (14) задающего напряжённое состояние ньютоновских сред показывает, что вязкость вызывает не только касательные но и нормальные напряжения в движущейся сплошной среде. В отличие от полной работы сил давления есть у полной работы вязких сил такая часть, которая ни посредственно — то есть ни через превращение измененной работой изменения объёма внутренней энергии в механическую — не может содействовать изменению механического состояния. Это и есть та часть, на которую выше ссылались как на рассеивание. Эту часть работы вязкостных сил невозвратимо превращающуюся в теплоту трения, то есть часть даже в балансе кинетической энергии не появляющуюся составляет член $\mu\mathfrak{D}$. Определённая уравнением (15) функция $\mathfrak{D}$ называется функцией рассеивания. Её произведение с вязкостью μ даёт теплоту трения выделенную в единице объёма за единицу времени. Символом $M(\mu)$ вводимым в уравнении (19) означаем часть мощности вязкостных сил над единицей объёма, не потерянную с точки зрения механики. В выражении $M(\mu)$ стоит отдельным членом работа изменения объёма вязкостных сил, которая при несжимаемой среде ($\mathrm{div}\,\bar{c} = 0$) исчезает, (но даже при сжимаемой среде обычно ничтожная по сравнению с работой изменения объёма сил давления); а также и избыточная мощность вследствие изменения вязкости. При неизменной вязкости ($\mathrm{grad}\,\mu = 0$) этот член равняется нулю.

В литературе обычно используют балансы энергии в форме заданной одним из уравнений (15) (16) (17), может быть с некоторыми изменениями не касающимися сущности. В одной части фундаментальных общих работ (как например, в работах [2], [15] подробно изучают, или используют исходной точкой (как например, в работах [1], [16]) уравнение полной энергии, в другой части исходят из уравнения внутренней энергии (как например, в работах [2], [14]), или из уравнения кинетической энергии (как например, в работе [9]). В специальных статьях занимающихся теплопередачей во вращающих системах (как например работы [4], [7], [10], [11], [12]), почти без исключения заменяют уравнение полной энергии уравнением баланса внутренней энергии. (Имеется и исключение, например работа [5], в которой пользуются уравнением полной энергии.) По прежним выкладкам это корректный поступок, так как в этих работах для достижения своей цели авторы используют и уравнение движения. На этом же основании в дальнейшем будем заниматься только балансом внутренней энергии.

Баланс внутренней энергии единосущен с первым законом термодинамики, и выражает, что алгебраическая сумма снаружу введённой тепла, тепла выделенного вследствии внутреннего трения, а также работы изменения объёма увеличивает внутренюю энергию. Баланс внутренней энергии подобно первому закону термодинамики можно переписать в форме содержащей энтальпию. В литературе распространённо используют эту форму. (Смотри например работы [3], [4], [12].)

Так как энтальпия — сумма внутренней энергии и работы продвижения, поэтому прибавляя член $d/dt(p/\varrho)$ (где p/ϱ представляет собой работу и продвижения единицы массы) к обеим сторонам уравнения (18) легко получается уравнение баланса энтальпии. Можно написать:

$$\varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\varrho}\right) = \varrho\left(\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dt} - \frac{p}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt}\right) = \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt},$$

или используя уравнение неразрывности (8):

$$\varrho \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\varrho}\right) = \frac{dp}{dt} + p \operatorname{div} \bar{c}$$

Прибавляя это наше уравнение к уравнению (18) получим

$$\varrho \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \mu\mathfrak{D} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \tag{20}$$

Это и есть уравнение баланса энтальпии, которому часто дают название уравнение энергии.

В случае термодинамически идеальных газов наши уравнения дальше конкретизируются. При исследовании охлаждения электромоторов такое предположение не означает существенных ограничений, так как состояние использованных газообразных охлаждающих сред далеко от превращения в жидкое состояние. В случае идеальных газов уравнение термического состояния (1) можно написать в форме $p = \varrho RT$, а внутреннюю энергию в форме $e_b = c_v T$. Так как далее $c_p = c_v + R$, энтальпию идеального газа можно считать с помощью уравнения $i = c_p T$. Баланс внутренней энергии и энтальпии для идеальных газов получается в формах:

$$\varrho \frac{d}{dt}(c_v T) = -p \operatorname{div} \bar{c} + \mu\mathfrak{D} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \tag{18a}$$

и

$$\varrho \frac{d}{dt}(c_p T) = \frac{dp}{dt} + \mu\mathfrak{D} + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) \tag{20a}$$

5. Упрощающие допущения

Если свойства движущейся среды дальше ограничивать, то наши уравнения ещё больше упрощаются, но действовать будут приближенно. Таким ограничением может быть применение следующих предположений:

1) свойства материала среды μ, c_v, c_p, λ постоянны,

2) среда несжимаемая.

В конкретных случаях применения этих допущений — в отличие от гипотеза, относящегося к ньютоновской среде или идеальному газу, всегда верным в случае электромоторов — необходимо всегда взвешивать их правомерность.

Постоянство свойств материала. Зависимости (2) (3) и (4) выражают то общее установление, что свойства материала сплошных сред зависят от термодинамического состояния. Но в случае газов далёких от превращения в жидкое состояние свойства материала практически независимы от давления, а зависят только от температуры $\mu = \mu(T)$, $c_v = c_v(T)$, $c_p = c_p(T)$, $\lambda = \lambda(T)$. Если предположить, что воздействие температуры слабое, то свойства могут считаться приблизительно постоянными. Это предположение приведёт уравнения балансов внутренней энергии и энтальпии к форме:

$$\varrho c_v \frac{dT}{dt} = -p \operatorname{div} \bar{c} + \mu\mathfrak{D} + \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T \tag{18b}$$

$$\varrho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \mu\mathfrak{D} + \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T \tag{20b}$$

Сравнивая уравнения (18a) и (20a) с только что полученными, можно было подумать, что в этих уравнениях не играет роли приблизительное предположение постоянства коэффициента вязкости. Наоборот, в действительности одним из необходимых условий наибольшего математического упрощения системы дифференциальных уравнений конвективной теплопередачи являются как раз эти допущения. Для признания этого запишем уравнение движения (9) и уравнение внутренней энергии (18*b*) с разделением полных производных, стоящих в левых частях на локальные и конвективные части (см. уравнение (11)) на ньютоновскую среду, — точнее на идеальный газ свойствами $c_v =$ постоянная, $\lambda =$ постоянная, $\mu = \mu(T)$. Так как $\operatorname{grad} \mu = \frac{d\mu}{dT} \operatorname{grad} T$ то получаем:

$$\varrho\left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}}\bar{c}\right) = \varrho\bar{g} - \operatorname{grad} p + \mu(T)\left(\frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{c} + \nabla^2\bar{c}\right) + \frac{d\mu}{dT}\left(2\bar{\bar{D}}_s - \frac{2}{3}\operatorname{div}\bar{c}\bar{\bar{E}}\right)\operatorname{grad} T \tag{21}$$

и

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{c} \operatorname{grad} T\right) = -p \operatorname{div} \bar{c} + \mu(T)\,\mathfrak{D} + \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T\,.$$

Скорость и температура в обоих уравнениях являются взаимно зависящими друг от друга неизвестными переменными. Очевидно, оба уравнения нелинейные, и с уравнением неразрывности (8) образуют связанную систему дифференциальных уравнений, у которой имеются только симультанные решения.

Но если допустимо приближение: $\mu =$ постоянная и *помимо этого* среда может считаться и несжимаемой ($\varrho =$ постоянная, $\operatorname{div} \bar{c} = 0$) тогда упрощенное до формы

$$\varrho c_v \left(\frac{dT}{dt} + \bar{c} \operatorname{grad} T\right) = \mu\mathfrak{D} + \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T \tag{18c}$$

уравнение баланса внутренней энергии больше не образует связанную систему с уравнениями неразрывности и движения, ведь форма этих уравнений действительная при таких условиях $\operatorname{div} \bar{c} = 0$

$$\varrho \left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}}\,\bar{c}\right) = \varrho\bar{g} - \operatorname{grad} p + \mu\nabla^2\bar{c}$$

даже в неявной форме не содержит температуру. Это обстоятельство упрощает математическое решение проблемы с двух сторон. С одной стороны уравнения неразрывности и движения решаются независимо от уравнения баланса внутренней энергии. С другой стороны баланс энергии (18с) определяющий распределение температуры после подстановки уже известного распределения скорости становится линейным дифференциальным уравнением. (Конечно при $c_v = f(T)$ и/или $\lambda = f(T)$ последнее последствие предположения $\mu =$ постоянная и $\varrho =$ постоянная уже не существует.)

Рассмотрим сейчас, в какой степени в системах охлаждения электромоторов позволительны приближённые допущения постоянства свойств материала. Изменения удельной теплоёмкости, коэффициента динамической вязкости, коэффициента теплопроводности воздуха в пределах от 0 °С до 160 °С, покрывающих интервал изменения температуры охлаждающих сред электромоторов даже в самых суровых режимах равняются соответственно 0,5%, 37%, 46%. В случае водорода эти значения равняются соответственно 1%, 37% и 43%. На основе этого мы вправе можем считать удельную теплоёмкость постоянной. Что касается коэффициентов вязкости и теплопередачи, мы должны выражаться тоньше.

По структуре уравнений (16) (17) (18) (19) и (21) видно, что в уравнениях движения и баланса энергии из-за температурозависимости этих свойств появляются члены формой $\operatorname{grad}\mu = \dfrac{d\mu}{dT}\operatorname{grad} T$ и $\operatorname{grad}\lambda = \dfrac{d\lambda}{dT}\operatorname{grad} T$, где множители $\operatorname{grad} T$ очень маленькие величины. Относительно воздуха и водорода порядок множителей $\dfrac{d\mu}{dT}$ и $\dfrac{d\lambda}{dT}$ соответственно $10^{-4}-10^{-8}$ единица МКС (ГОСТ 9867-61), поэтому предположение постоянства коэффициентов вязкости и теплопроводности означает хорошее приближение, если в потоке не возникают значительные температурные градиенты. Так как они возникают вследствие взаимного превращения друг в друга кинетической и внутренней энергии, работы изменения объёма, и теплоты перетекающей через стенки каналов, поэтому в случае сжимаемой среды и в термическом пограничном слое значения μ и λ и обычно нужно считать переменными.

Случай несжимаемой среды. Несжимаемость среды была одним из необходимых условий вышерассказанного большого математического упрощения определяющей системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим сейчас, в каких условиях можно считать движущие газообразные охлаждающие среды несжимаемыми.

Только для ориентировочного расчета возьмём невязкий газ с плотностью ϱ_0, температурой T_0, движущийся со скоростью c. При близко изентропическом торможении потока увеличением внутренней энергии и давления за счет кинетической энергии последует увеличение температуры и плотности газа. И так в состоянии после торможения $T = T_0 + \Delta T_{ad}$ и $\varrho = \varrho_0 + \Delta\varrho$. Наиболшее нагревание при полном торможении можно вывести из уравнения (16) и равняется $\Delta T_{ad} = c^2/2c_p$. (Вот один из результатов, к которым не могли бы прийти используя исключительно уравнения баланса внутренней энергии или энтальпии!) Принадлежашее к нему значение $\Delta\varrho$ показывает порядок изменений плотности в потоке. Очевидно, что среду можно считать близким приближением несжимаемой, если относительное изменение плотности маленькое: $\Delta\varrho/\varrho \ll 1$. Используя зависимости $\varrho/\varrho_0 = (T/T_0)^{1/(\varkappa-1)}$ и $T = T_0 + \Delta T_{ad}$, с помощью разложения в биноминальный ряд получаем:

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \frac{1}{\varkappa - 1}\left(\frac{\Delta T_{ad}}{T_0}\right) \tag{22}$$

С использованием зависимости скорости звука $a_0^2 = \varkappa R T_0$ и прежним значением ΔT_{ad}, наконец получаем зависимость относительного изменения плотности

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a_0}\right)^2,$$

по которой допустимо предположение несжимаемости, если скорость потока мала по отношению скорости звука принадлежающей температуре движущегося газа. Например, скорость звука в воздухе и водороде при температуре 27 °C соответственно 343 м/с и 1321 м/с, таким образом плотность может считаться постоянным с точностью до 1% если скорость потока в воздухе не повышает 49 м/с а в водороде 186 м/с. Из всего этого видно, что предположение несжимаемости среды в системах охлаждения электромоторов правильно.

С мерой сжимаемости тесно связана роль диссипации механической мощности в балансе энергии потока. Оценим порядок отношения теплоты трения возникающей за единицу времени и тепла вводимого снаружу за единицу времени то есть порядок отношения $K = \mu\mathfrak{D}/\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T$.

Порядок функции диссипации $\mathfrak{D}$ определяется перпендикулярным на стенку канала градиентом параллельного оси канала компонента скорости. Если в канале сечением круга радиусом r_0 средняя скорость c, тогда это градиент-порядка c/r_0 и так порядок диссипационной мощности равняется $\mu(c/r_0)^2$. А если разница между температурой стенки канала и охлаждающей среды движущейся вдоль оси канала равняется δT, тогда порядок grad T равняется $\delta T/r_0$. Так как градиент температуры почти перпендикулярен стенке канала, то порядок λ div grad T равняется $\lambda \delta T/r_0^2$. Следовательно отношение двух членов стоящих в правой части балансов энергий следующего порядка

$$K = \frac{\mu c^2}{r_0^2} \frac{r_0^2}{\lambda \delta T} = \frac{\mu c^2}{\lambda \delta T}$$

Словами выражая: в балансе энергии потока диссипация играет тем меньшую роль по отношению вводимого тепла, чем меньше скорость потока и чем больше разница между температурой движущейся среды и стенки канала.

Если в выражение K подставить значение $c^2 = 2c_p\, \Delta T_{ad}$, то непосредственно можно понять связь между мерой сжимаемости и относительной важностью диссипации мощности

$$K = 2Pr \frac{\Delta T_{ad}}{\delta T}$$

где $P_r = \mu c_p/\lambda$ критерий Прандтля зависящий от свойств материала охлаждающей среды (при воздухе и водороде $P_r \approx 0{,}7$). Так в балансах энергии диссипационное тепло ничтожно по отношению ко вводимому теплу, если предписанная разница температур стенки канала и среды мало в сравнении с нагреванием возникающим при адиабатическом торможении потока по зависимости (22). В знании этого можно допустить то приближение встречающееся в литературе, у которого баланс внутренней энергии выражается без тепла трения ([7], [11], [12]).

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим генератор, в прямоугольном охлаждающем канале шириной в 10 мм и высотой в 20 мм полого медного провода которого движется воздух со скоростью 30 м/сек. Предпишем температуру стенки канала 90 °С а среднюю температуру охлаждающей среды в канале 50 °С. В этом случае $\delta T = 40$ °С и $\Delta T_{ad} = 0{,}9$ °С. Этими данными диссипационное тепло оказывается всего лишь 3% вводимого тепла. Если при этих же условиях вместо воздуха в канале движется водород, то $\Delta T_{ad} = 0{,}003$ °С и доля диссипации снижается на 0,1%.

В конечном итоге можно установить, что наибольшее упрощение балансов энергии возможно тогда, когда скорость охлаждающей среды мало по отношению скорости звука. В таких условиях среду можно считать почти несжимаемой, чему, как следствие, сопутствует постоянство физических свойств материала, и ничтожность диссипационного тепла. Так как в системах охлаждения электромоторов скорость на порядок меньше скорости звука, поэтому в большинстве случаев в системе дифференциальных уравнений достаточно использовать баланс внутренней энергии простой формы

$$\varrho c_v \frac{dT}{dt} = \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T \tag{18d}$$

или баланса энтальпии формы

$$\varrho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T \tag{20d}$$

В случае стационарного потока из субстанциальных производных пропускаются локальные члены $\partial/\partial t$, значит наши уравнения имея в виду (11) принимают форму

$$\varrho c_v \bar{c} \operatorname{grad} T = \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T \tag{18e}$$

$$\varrho c_p \bar{c} \operatorname{grad} T = \bar{c} \operatorname{grad} p + \lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T \tag{20e}$$

Конечно, если канал находится в роторе электромоторов, то скорость $\bar{c}$ означает относительную скорость наблюдаемую в координатной системе вращающейся вместе с ротором. В этом случае в уравнениях движения, полной энергии и кинетической энергии $\bar{g}$ содержит и действие на единицу массы центробежного и Кориолисово силовых полей. (С энергетической точки зрения Кориолисово поле не имеет роли, так как будучи всегда перпендикулярным направлению относительной скорости, оно не выполняет работу в движущейся среде.)

Наконец отметим, что если в случае *турбулентного потока* под символами физических полей фигурирующих в наших уравнениях $\bar{c}, T, p, \varrho$ подразумеваются не моментальные значения, а среднее по времени, тогда в уравнениях появляются дополнительные члены, содержащие в сущности средне-временные значения произведений компонентов пульсаций. (Такими дополнительными членами являются например напряжения Рейнолдса прибавляющиеся к элементам тензора напряжения $\bar{\bar{\pi}}$.) Рассмотрение турбулентных потоков с такой точки зрения далеко выходит за рамки настоящей работы, поэтому ими не будем заниматься.

Резюме

В настоящей работе на основе принципов сохранения природы была выведена система дифференциальных уравнений представляющая собой основу изучения конвективной теплопередачи, которая остаётся закрытой и в том случае если уравнение полной энергии заменяем уравнением баланса внутренней энергии или энтальпии. На основе изучения упрощающих допущений в каналах электромоторов охлаждающая среда может считаться несжимаемой. В большинстве случаев можно допустить постоянство свойств материала и ничтожность диссипационного тепла.

Литература

1. Кутателадзе С. С.: «Основы теории теплообмена» Изд. Наука Новосибирск 1970.
2. Лойцянский Л. Г.: «Механика жидкости и газа» Москва—Ленинград.
3. Петухов Б. С.: «Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. Изд. Энергия Москва 1967.
4. Рус В. В.—В. М. Васильев: «Течение однофазной среды в радиално вращающемся канале». Часть II. Отчёта № 452 ЛПИ Каф ТОТ, Ленинград 1974.
5. Степанянц, Л. Г.—В. В. Рус—Е. М. Смирнов: «Движение жидкости во врашающемся канале» Отчёт № 2241 ЛПИ Каф ГАД Ленинград.
6. Хинце Дж. О.: «Турбулентность» Изд. Физматгиз 1963.
7. Butuzov, A. I.—P. P. Kudelya: "Features of Convective Heat Transfer in a Tube Rotating about Axis Parallel to Its Generatrix." Heat Transfer — Soviet Research 7 (1975), No. 1., стр. 17—22.
8. Halleen, R. M.—J. P. Johnston: "The Influence of Rotation on Flow in a Long Rectangular Channel. An experimental study." Rep. MD-18 Thermosciences Div. Dept. Mech. Engng. Stanford Univ. 1967.
9. Hinze, J. O.: "Turbulence". McGraw-Hill New York 1975.
10. Humphreys, J. F.: "Heat Transfer in a Tube Revolving about a Displaced Axis" ARC Current Papers No 1069. London 1969.
11. Martin, B. W.—D. Fargie: "Effect of Temperatura-Dependent Viscosity on Laminar Forced Convection in the Entrance Region of a Circular Pipe" Proc. Instn. Mech. Engrs. 1972. Выпуск 186 24/72 стр. 307—3168.
12. Mikami, H.: "Thermally Induced Flow in Gas Centrifuge Part I." Jour. Nuclear Sci. and Tech. 10 1973, стр. 396—401; Part II. Jour, Nuclear Sci, and Tech. 10 (1973), стр. 580—583.
13. Mori, Y.—W. Nakayama: "Forced Convective Heat Transfer in a Straight Pipe Rotating around a Parallel Axis" 1st Rep. Laminar Region. Int. J. Heat Mass Transfer **10** (1967) стр. 1179—1194. 2nd Rep. Turbulent Region. Int. J. Heat Mass Transfer **11** (1968) стр. 1185—1204.
14. Schlichting, H.: »Grenzschicht-Theorie« G. Braun, Karlsruhe 1951.
15. Truckenbrodt, E.: »Strömungsmechanik« Springer, Berlin—Heidelberg—New York 1968.

д-р Ференц Конечни, H-1521 Будапешт