DIE STOCHASTISCHE KAPAZITÄTSUNTERSUCHUNG VON TYPISCHEN FÖRDERSYSTEMEN UNTER BEACHTUNG ZUVERLÄSSIGKEITSTHEORETISCHER ASPEKTE

Von

J. PREZENSZKI und P. VÁRLAKI

Institut für Verkehrstechnik und Organisation, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 7. März 1977

Vorgelegt von Prof. Dr. I. TURÁNYI

1. Einleitung

In einer früheren Studie [7] wurden die theoretischen Fragen der *strukturellen Zuverlässigkeit* von typischen Fördermitteln bzw. Fördersystemen des innerbetrieblichen Transports sowie die allgemeinen Probleme der Kapazitätsbestimmung von Anlagen und Systemen ausführlich erörtert.

Der Begriff der *Durchlaßfähigkeit* wurde eingeführt und seine Anwendung vorgeschlagen; es wurden die Methoden ihrer theoretischen und praktischen Ermittlung behandelt bzw. die Möglichkeiten der Anwendung der *funktionellen Zuverlässigkeit* für die Bewertung der Güte von Fördermitteln oder Fördersystemen aufgezeichnet. Ferner wurde es versucht, den Begriff der Durchlaßfähigkeit mathematisch zu begründen sowie die Bedeutung und die Möglichkeiten ihrer Anwendung zu erläutern.

Unter dem Begriff der *Durchlaßfähigkeit eines Fördermittels bzw. Fördersystems* wird jene Material- bzw. Transportgutmenge verstanden, die von dem Fördermittel bzw. Fördersystem in einem gegebenen Zeitintervall unter Berücksichtigung der Anzahl der tatsächlich arbeitenden Fördermittel sowie ihrer Verkettung befördert werden kann. Die Durchlaßfähigkeit des Fördersystems wird neben der Ausnutzbarkeit der einzelnen Fördermittel (Systemelemente) auch von ihrer Anordnung bzw. von dem Maß der strukturellen Zuverlässigkeit der Fördermittel bzw. des Fördersystems beeinflußt. So kann die Durchlaßfähigkeit mit kurzen (zeitweiligen) Messungen nicht ermittelt werden; sie läßt sich aufgrund der Berücksichtigung der statistischen Charakteristiken, die den Betrieb nur nach hinreichend langer Zeit charakterisieren, mit der Analyse der Ergebnisse längerer Messungen, z. B. von einem Jahr (a posteriori Methode), oder aufgrund der Anwendung der stochastischen Kapazitätsuntersuchung und der modernen Zuverlässigkeitstheorie (a priori Methode) berechnen [7].

Bei der analytischen Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von Fördersystemen wird die statistische Stabilität der Zuverlässigkeitscharakteristiken der einzelnen Fördermittel [4], [7] (Bedingung 1) sowie die Stationarität der Verteilungsfunktionen der Ausnutzung der Leistungsfähigkeit im Interesse der Vereinfachung der Berechnungen vorausgesetzt. Die Stationarität (Bedingung 2) setzt die Existenz der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_k(t + \tau, t) = q_k(\tau)$ mit dem Erwartungswert Q und der Varianz σ_Q^2 für jedes Zeitintervall $(t + \tau, t)$ unabhängig von dem Zeitpunkt t voraus [7].

Es wird also vorausgesetzt, daß die Verteilungen der Kapazität mit diskreten oder stetigen (evtl. mit gemischten) Verteilungen bezogen auf die diskrete Zeiteinheit τ angegeben werden können. Die Verringerung der vorausgesetzten Zeiteinheit über alle Grenzen kann die Beschreibung der Durchlaßfähigkeit der Bedienungssysteme (unter Beachtung bestimmter neuer Restriktionen) als stetiger stochastischer Prozeß ermöglichen, bei dem die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung im allgemeinen durch Lösung eines Systems von stochastischen Differentialgleichungen erhalten werden kann.

Im weiteren wird die ausführliche stochastische Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von Fördersystemen mit Parallel- bzw. Serienanordnung der Fördermittel unter Berücksichtigung der Wirkung der Reservekapazitäten und der evtl. vorhandenen Pufferspeicher (in Serienanordnung) mit Hilfe der in [7] erörterten theoretischen Begründung behandelt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit der Fördersysteme des innerbetrieblichen Transports kann nämlich aufgrund jener Gesetzmäßigkeiten bestimmt werden, die sich aus der stochastischen Untersuchung der Parallel- und Serienanordnung der Elemente (Fördermittel) ergeben.

Im Falle der Parallelanordnung (Abb. 1a) sind Input und Output der Elemente voneinander unabhängig, und so können die einzelnen Elemente unterschiedliche Materialmengen während der selben Zeit befördern. Mit dem Ausfall einzelner Elemente hört die Arbeit des Systems nicht auf, lediglich seine Leistungsfähigkeit nimmt ab.

Im Falle der Serienanordnung (Abb. 1b) ist der Output eines Elements gleichzeitig der Input des darauffolgenden Elements. Bei kontinuierlichem Betrieb befördert jedes Element die selbe Materialmenge während der selben Zeit. Der Ausfall eines Elements bedeutet den Ausfall des gesamten Systems [7].

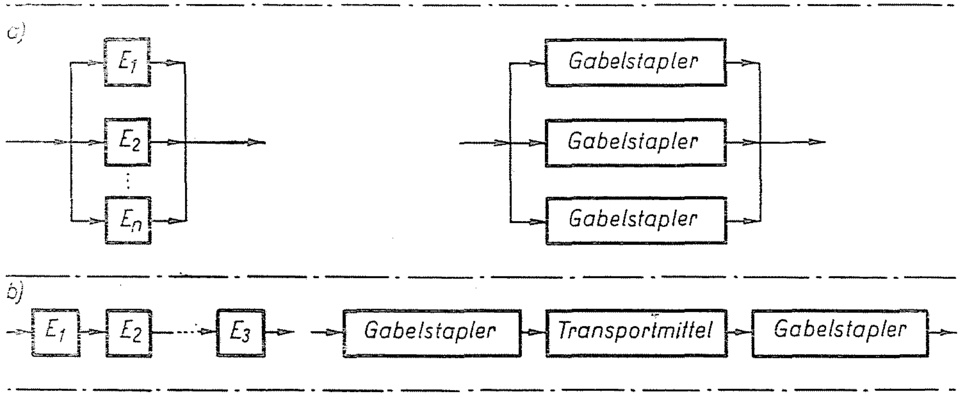

Abb. 1. Fördersysteme des innerbetrieblichen Transports mit Parallel- (a) bzw. Serienanordnung (b) der Fördermittel

Die derartige Erkenntnis der Anordnungsvarianten der Elemente und Elementgruppen ermöglicht die Anwendung der wahrscheinlichkeitstheoretischen und statistischen Methoden zur Untersuchung der Zuverlässigkeit und der Kapazität [7].

2. Stochastische Kapazitätsuntersuchung der Fördersysteme mit parallel angeordneten Fördermitteln

2.1. Allgemeine Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von Fördersystemen mit parallel angeordneten Fördermitteln

Im folgenden wird die analytische Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von Förder- (Bedienungs-) Systemen am Beispiel des Fördersystems mit parallel angeordneten Fördermitteln mit Hilfe des einfachsten Verfahrens, für den zeitunabhängigen Fall und unter Zugrundelegung diskreter Kapazitätsverteilungen demonstriert.

Der andere Weg der Bestimmung der statistischen Charakteristiken der Durchlaßfähigkeit ist die Digitalsimulation mit Hilfe der EDV. Das Thema wird in dieser Arbeit nicht weiter behandelt, es wird lediglich auf die immer umfangreichere Fachliteratur hingewiesen [1], [4], [10].

Im Falle *parallel angeordneter Fördermittel* soll die Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_k(\tau)$, $(k = 1, 2, \ldots, s)$ die Ausnutzbarkeit der Leistungsfähigkeit (Fördergutmenge, die von einem Fördermittel während der Zeiteinheit befördert werden kann) der einzelnen Fördermittel und die Wahrscheinlichkeit $P_e(\tau)$ den betriebsfähigen Zustand des untersuchten Fördermittels während der Zeiteinheit τ charakterisieren [3], [7], [10].

In diesem Falle kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des Fördersystems, welches aus n parallel angeordneten Fördermitteln (z. B. Stapler oder RBG) gleicher Leistungsfähigkeit und Zuverlässigkeit besteht (also die während der Zeiteinheit transportierbare Gutmenge) aufgrund folgender Überlegungen bestimmt werden.

Zur Durchführung der theoretisch exakten Berechnungen ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Leistungsfähigkeiten als die Summe $(\eta(\tau))$ von ν gleichen Zufallsgrößen $\xi_i(\tau)$ zu ermitteln:

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots \xi_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \,, \tag{1}$$

wobei die Zufallsgröße ν die Anzahl der funktionsfähigen Fördermittel bedeutet. Die Selbstkonvolution* der Verteilung der Leistungsfähigkeit kann nach dem Zusammenhang

$$\sum_{h=1}^{\infty} q_{k-h}(\tau) \cdot q_h(\tau)$$

* Konvolution: Summe von diskreten, unabhängigen Zufallsgrößen.

berechnet werden. Mit KONV $[q_k(\tau)]^\nu$ soll die ν-fache Selbstkonvolution der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_k(\tau)$ der Leistungsfähigkeit eines Fördermittels bezeichnet werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit kann unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der funktionsfähigen Fördermittel (vgl. [7]) — aufgrund der Formel der totalen Wahrscheinlichkeiten — nach dem Zusammenhang

$$r_k(\tau) = \sum_{\nu=1}^{n} KONV[q_k(\tau)]^\nu \binom{n}{\nu} P_e(\tau) [1 - P_e(\tau)]^{n-\nu} \tag{2}$$

berechnet werden. Die n-fache Selbstkonvolution der nach [7] bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit eines Fördermittels liefert den selben Zusammenhang.*

Anstelle der erwähnten schwierigen algebraischen Berechnungsmethode empfiehlt es sich, die Berechnungen mit Hilfe der *Generatorfunktionen* durchzuführen.

Wenn mit $G_x(z)$ die Generatorfunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Leistungsfähigkeit eines Fördermittels bezeichnet wird,

$$G_x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\tau) z^k, \tag{3}$$

wobei $|z| < 1$ eine komplexe Zahl bedeutet, und wenn die Generatorfunktion der Binomialverteilung der Anzahl der parallel angeordneten Fördermittel gleicher Leistungsfähigkeit

$$G_\nu(z) = [1 + P_e(\tau) \cdot (z - 1)]^n \tag{4}$$

ist, dann kann die Generatorfunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des gesamten Systems (n Fördermittel in Parallelanordnung) aufgrund des Satzes über die Summen, die aus einer zufälligen Anzahl von Gliedern gebildet werden [9], nach der Gleichung

$$G(z) = [1 + P_e(\tau)[G_x(z) - 1]]^n \tag{5}$$

bestimmt werden.

Der Erwartungswert und die Varianz der Durchlaßfähigkeit kann an der Stelle $z = 1$ mit Hilfe der Generatorfunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung der auf die obige Weise bestimmten Durchlaßfähigkeit nach den

* Sinngemäß kann Gleichung (2) für die t-te Zeitdauer auch mit Hilfe der in [7] angegebenen Zusammenhänge für die empirischen Wahrscheinlichkeiten bzw. mit den ebenda bestimmten subjektiven Wahrscheinlichkeiten geschrieben werden.

Zusammenhängen

$$M[\eta[t]] = G'(z = 1) \tag{6}$$

und

$$D^2[\eta[t]] = G''(z = 1) + G'(z = 1) - [G'(z = 1)]^2 \tag{7}$$

berechnet werden. Praktisch läßt sich die Durchlaßfähigkeit mit den statistischen Parametern $M[\eta[t]] \pm D[\eta[t]]$ charakterisieren.

Wenn sich die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit als notwendig erweist (z. B. zwecks Anwendung in einem Modell des Systemverhaltens [6]), dann kann sie mit der inversen Transformation der Generatorfunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit nach der Integralformel von Cauchy der komplexen Analysis

$$r_k(\tau) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint_{c_r} \frac{G(z)}{z^{k+1}} dz\,, \tag{8}$$

oder nach einem bekannten Näherungsverfahren berechnet werden. (In Gleichung (8) bedeutet c_r den Konvergenzkreis $|z| < 1$ [9].)

2.2. *Die Berücksichtigung der Reservekapazitäten*

Bei der allgemeinen Untersuchung der Durchlaßfähigkeit der Fördersysteme des innerbetrieblichen Transports wird die Frage der Reservebildung, die sich bei der Parallelanordnung der Fördermittel (z. B. Stapler, RBG) mit einer anderen Methode untersuchen läßt, als bei der Serienanordnung (z. B. Rollenbahnen, RBG), nicht ausführlich behandelt. Als Beispiel für parallel angeordnete Fördermittel wird der oft vorkommende Fall vorgestellt, der besonders bei den Bedienungssystemen mit Staplerpark als typisch angesehen werden kann (Abb. 2).

Wenn n_m die Anzahl der funktionsfähigen Fördermittel und n_t die Anzahl der Reservegeräte im System bedeutet ($n = n_m + n_t$), dann kann bei exponentialverteilten Funktionsdauer und Reparaturzeiten die Wahrscheinlichkeit p_k der gleichzeitigen Reparatur von k Fördermitteln ($k = 1, 2, \ldots n_m$) ermittelt werden. Es sollen folgende Bezeichnungen gelten:

$\tau = 1/\beta$ Durchschnittliche Reparaturzeit (einschl. Wartezeiten von der Reparatur bzw. vor der Wiederinbetriebnahme)

$1/\lambda$ Durchschnittliche Funktionsdauer (zeitlicher Abstand zweier Ausfälle).

So liefert die Lösung des folgenden Gleichungssystems mit den beiden Unbekannten p_k und p_0 die Wahrscheinlichkeit, daß k Fördermittel gleichzeitig repariert werden [10]:

$$p_k = \frac{1}{k!} \lambda(0)\,\lambda(1) \dots \lambda(k-1)\,p_0 \tag{9}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, \tag{10}$$

mit

$$\lambda(k) = \begin{cases} \lambda(n_m) & \text{für} \quad 0 \leq k \leq n - n_m \\ \lambda(n-k) & \text{für} \quad n - n_m \leq k \leq n \end{cases} \tag{11}$$

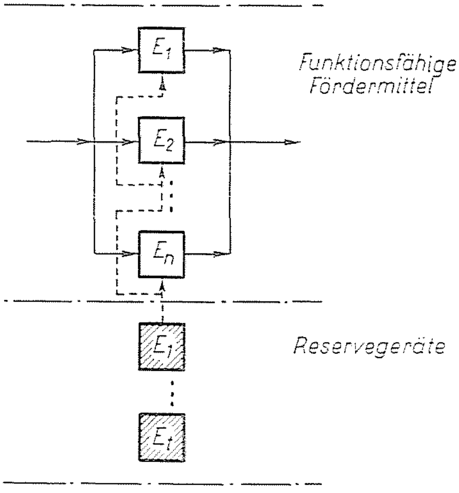

Abb. 2. Fördersystem mit Parallelanordnung der Fördermittel und Reservegeräten

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit der Funktionsfähigkeit von l Fördermitteln in einem gegebenen Zeitpunkt, wenn die Anzahl der Reservegeräte gleich n_t ist:

$$p_l(n_t) = \begin{cases} p_{n_m - l} & \text{für} \quad n_m - l > n_t,\ 0 < l < n_m \\ \sum\limits_{0 \leq k \leq n_m} p_k & \text{für} \quad l = n_m,\ n_m - l < n_t \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \tag{12}$$

Die Einsetzung der erhaltenen bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Fördermittel in Gleichung (2), die unter Berücksichtigung der Verteilung der Leistungsfähigkeit eines Fördermittels erfolgen soll, liefert die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit bei n_t Reservegeräten. Die so bestimmte Verteilung der Durchlaßfähigkeit bildet die Grundlage für die Berechnung weiterer wichtiger Informationen für den Betrieb (z. B. notwendige Anzahl der Reservegeräte, damit der Erwartungswert der Durchlaßfähigkeit größer ist, als ein vorgegebener Wert, usw.)

2.3. Die Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von Fördersystemen mit parallel angeordneten Fördermitteln, mit Poissonschem Ereignisstrom als Leistungsfähigkeit und exponentialverteilter Funktionsdauer und Reparaturzeiten*

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_k(\tau)$ der Durchlaßfähigkeit eines Fördermittels in einem Fördersystem, welches aus n parallel angeordneten Fördermitteln besteht, soll der Poissonverteilung mit dem Parameter $\Lambda\tau$ genügen:

$$q_k(\tau) = \frac{(\Lambda\tau)^k}{k!} e^{-\Lambda\tau}, \tag{13}$$

hier bedeutet Λ die Bedienungsrate eines Fördermittels. Die Funktionsdauer bzw. Reparaturzeit eines Fördermittels soll mit den Parametern λ bzw. μ exponentialverteilt sein:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$
$$G(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

In diesem Falle kann die Generatorfunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit $r_k(\tau)$ des Systems nach der behandelten Methode aufgrund der Gleichung

$$G_r(z) = \{1 + P_e(\tau)[Gq(z) - 1]\}^n \tag{14}$$

bestimmt werden. Da die Generatorfunktion der Poissonverteilung die Form $G_q(z) = e^{\Lambda\tau(z-1)}$ besitzt, und die Wahrscheinlichkeit $P_e(\tau)$ nach dem in [3] und [7] angegebenen Zusammenhang zu berechnen ist, kann Gleichung (14) in der Form

$$G_r(z) = \left\{1 + \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-\lambda\tau}\left[e^{\Lambda\tau(z-1)} - 1\right]\right\}^n \tag{15}$$

geschrieben werden. Die Einsetzung von (15) in Gleichung (6) liefert den Zusammenhang

$$M[\eta(t)] = nPe(\tau)\,\Lambda\tau = n\Lambda\tau \cdot \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-\lambda\tau} \tag{16}$$

für den Erwartungswert der Durchlaßfähigkeit (die Formel kann auch durch Multiplikation der Erwartungswerte der unabhängigen Zufallsgrößen hergeleitet werden). Die Einsetzung von (15) in Gleichung (7) liefert die Formel

$$D^2[\eta(t)] = nPe(\tau)\,\Lambda\tau[\Lambda\tau[1 - Pe(t)] + 1] = n\Lambda\tau \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-\lambda\tau} \times$$
$$\times \left[\Lambda\tau\left(1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-\lambda\tau}\right) + 1\right] \tag{17}$$

für die Varianz der Durchlaßfähigkeit.

* Häufig können die zufälligen Verkehrsströme mit dem Poissonschen Ereignisstrom hinreichend genau angenähert werden.

Die Betrachtungen sollen durch zwei Beispiele abgerundet werden. Ein *Bedienungssystem mit Regalbediengeräten* soll durch die folgenden Parameter charakterisiert werden:

$\Lambda = 20$ Lagereinheiten/h
$\tau = 10$ h $= 1$ Schicht
$T_1 = 1/\lambda = 200$ h
$T_2 = 1/\mu = 30$ h
$n = 7$ RBG

Die Berechnung mit Hilfe der Gleichungen (16) und (17) liefert

$M[\eta(t)] = 1157$ LE/Schicht
$D[\eta(t)] = 204$ LE/Schicht.

Die Durchlaßfähigkeit des Fördersystems kann also mit den Werten $M[\eta(t)] \pm D[\eta(t)] = 1157 \pm 204$ Lagereinheit/Schicht angegeben werden.

Für ein Bedienungssystem mit Staplern sollen folgende Kennzahlen gelten:

$\Lambda = 15$ Transporteinheiten/h
$\tau = 10$ h $= 1$ Schicht
$T_1 = 1/\lambda = 50$ h
$T_2 = 1/\mu = 10$ h
$n = 20$ Stapler

Aufgrund der Formel (16) und (17) ergibt sich

$M[\eta(t)] = 2370$ TE/Schicht
$D[\eta(t)] = 278$ TE/Schicht

Die Durchlaßfähigkeit des Fördersystems beträgt also 2370 ± 278 Transporteinheiten/Schicht

3. Die stochastiche Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von Fördersystemen mit Serienanordnung der Fördermittel

3.1. Die Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von zwei Fördermitteln in Serienanordnung

Zur Berechnung der statistischen Maßzahlen der Durchlaßfähigkeit von zwei Fördermitteln (z. B. Stapler und RBG) sind folgende Informationen notwendig:

$q_i^{(1)}(\tau)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des ersten Fördermittels während der Zeitdauer τ $(i = 1, 2, \ldots)$
$q_j^{(2)}(\tau)$ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des zweiten Fördermittels während der Zeitdauer τ $(j = 1, 2, \ldots)$
$T_1^{(1)}$ Erwartungswert der Funktionsdauer des ersten Fördermittels
$T_1^{(2)}$ Erwartungswert der Funktionsdauer des zweiten Fördermittels
$T_2^{(1)}$ Erwartungswert der Reparaturzeit des ersten Fördermittels
$T_2^{(2)}$ Erwartungswert der Reparaturzeit des zweiten Fördermittels.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des Fördersystems mit zwei Fördermitteln in Serienanordnung während der Zeitdauer τ läßt sich aufgrund der angegebenen Daten und der Zusammenhänge aus [3] und [7] sowie aufgrund der Interpretation des Begriffs nach dem folgenden Zusammenhang ermitteln:

$$r_l(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{T_2^{(1)}}{T_1^{(1)}} + \dfrac{T_2^{(2)}}{T_1^{(2)}}}{1 + \dfrac{T_2^{(1)}}{T_1^{(1)}} + \dfrac{T_2^{(2)}}{T_2^{(1)}}} \cdot e^{-\tau/T_1} & \text{für} \quad l = 0 \\[2ex] \left[q_l^{(1)}(\tau) \sum_{i=l}^{n} q_i^{(2)}(\tau) + q_l^{(2)} \sum_{j=l+1}^{m} q_j^{(1)} \right] \left[\dfrac{1}{1 + \dfrac{T_2^{(1)}}{T_1^{(1)}} + \dfrac{T_2^{(2)}}{T_1^{(2)}}} \cdot e^{-\tau/T_1} \right] & \text{für} \quad \begin{array}{l} 0 < l \leq n, \\ 0 < l \leq m \end{array} \\[2ex] 0 \quad \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \tag{18}$$

$$T_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{T_1^{(1)}} + \dfrac{1}{T_1^{(2)}}}$$

3.2. Die Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von zwei Fördermittelgruppen in Serienanordnung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit eines Bedienungssystems mit zwei Fördermittelgruppen bezogen auf die Zeitdauer τ läßt sich nach der Gleichung

$$r_l(\tau) = r_l^{(1)}(\tau) + r_l^{(2)}(\tau) - r_l^{(1)}(\tau)\, r_l^{(2)}(\tau) - \sum_{k=0}^{l-1} \left[r_l^{(1)}(\tau)\, r_k^{(2)}(\tau) + r_l^{(2)}(\tau)\, r_k^{(1)}(\tau) \right] \tag{19}$$

$$u = \begin{cases} m & \text{für} \quad m \geq n \\ n & \text{für} \quad m < n \end{cases} \qquad \text{und} \quad 0 \leq l \leq u$$

ermitteln, wenn mit $r_i^{(1)}(\tau)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ und $r_j^{(2)}(\tau)$, $(j = 0, 1, \ldots, m)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit der ersten bzw. zweiten Fördermittelgruppe bezeichnet wird.*

Die Aussage der Gleichung kann wie folgt eingesehen werden. $P(k|l)$ sei die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß die Durchlaßfähigkeit der »nachfolgenden« Fördermittelgruppe »k« Einheiten während der Zeitdauer τ beträgt, unter der Voraussetzung, daß die Durchlaßfähigkeit der »vorangegangenen« Fördermittelgruppe »l« ist. Die Wahrscheinlichkeiten $P_\tau(k|l)$ können aufgrund einfacher wahrscheinlichkeitstheoretischer (kombinatorischer) Überlegung bestimmt werden:

$$P_\tau(k \mid l) = \begin{cases} \sum_{k=l}^{\infty} r_k^{(1)}(\tau) & \text{für } l \leq k \\ r_k^{(1)}(\tau) & \text{für } l > k \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \tag{20}$$

* Analog lassen sich die Zusammenhänge nach entsprechender Interpretation auch mit empirischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (beschrieben in [7]) oder mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten formulieren [7].

Die Anwendung der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit,

$$r_k(\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} r_l^{(2)}(\tau)\; P_\tau(k \mid l) \tag{21}$$

liefert

$$\begin{aligned} r_l^{(\tau)} &= r_l^{(1)}(\tau) \sum_{i=l}^{n} r_i^{(2)}(\tau) + r_l^{(2)}(\tau) \sum_{j=l+1}^{m} r_j^{(1)}(\tau) = \\ &= r_l^{(1)}(\tau)\left[1 - \sum_{i=0}^{l-1} r_i^{(2)}(\tau)\right] + r_l^{(2)}(\tau)\left[1 - \sum_{j=0}^{l} r_j^{(1)}(\tau)\right] = \\ &= r_l^{(1)}(\tau) + r_l^{(2)}(\tau) - r_l^{(1)}(\tau)\, r_l^{(2)}(\tau) - \sum_{k=0}^{l-1}\left[r_l^{(1)}(\tau)\, r_k^{(2)}(\tau) + r_l^{(2)}(\tau)\, r_k^{(1)}(\tau)\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Analog kann auch der angegebene Zusammenhang für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit zweier Fördermittel in Serienanordnung bewiesen werden [7].

Mit Hilfe der bisher angegebenen Zusammenhänge, die sich in den meisten Fällen verallgemeinern lassen, kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit von Fördersystemen mit Serien- oder Parallelanordnung der Elemente (Fördermittel oder Fördermittelgruppen) bestimmt bzw. geschätzt werden. Die Zusammenhänge lassen sich auch für mehrere Fördermittel bzw. Fördermittelgruppen in Serienanordnung verallgemeinern.

3.3. Die Untersuchung der Durchlaßfähigkeit von Fördersystemen mit Serienanordnung der Fördermittel, mit Poissonschem Ereignisstrom als Leistungsfähigkeit und exponentialverteilter Funktionsdauer und Reparaturzeiten

Wenn die Leistungsfähigkeit der einzelnen Elemente der Poissonverteilung mit den Parametern Λ_1 und Λ_2 genügt und die Funktionsdauer sowie Reparaturzeiten mit den Parametern λ_1, μ_1 bzw. λ_2, μ_2 exponentialverteilt sind, dann kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des Bedienungssystems mit Serienanordnung der Elemente nach dem Zusammenhang

$$r_l(\tau) = \begin{cases} \left[\dfrac{\Lambda_1\tau}{l!}\, e^{-\Lambda_1\tau} \displaystyle\sum_{i=l}^{\infty} \dfrac{(\Lambda_2\tau)^i}{i!}\, e^{-\Lambda_2\tau} + \dfrac{(\Lambda_2\tau)^l}{l!}\, e^{-\Lambda_2\tau} \displaystyle\sum_{j=l+1}^{\infty} \dfrac{(\Lambda_1\tau)^j}{j!}\, e^{-\Lambda_1\tau}\right] \cdot & \\ \cdot\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}}\, e^{-\tau(\lambda_1+\lambda_2)}\right] & \text{für} \quad 0 < l \leq n \\ 1 - \dfrac{1}{1+\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}}\, e^{-\tau(\lambda_1+\lambda_2)} & \text{für} \quad l = 0 \\ 0 \quad \text{in allen anderen Fällen} & \end{cases} \tag{23}$$

berechnet werden.

Beispiel

Ein Regalbediengerät und eine Rollenbahn in Serienanordnung bilden das Bedienungssystem. Die Charakteristiken des Regalbediengerätes sind:

$\Lambda_1 =$ 20 Lagereinheiten/h (die Leistungsfähigkeit ist poissonverteilt)
$\tau\ = 10$ h $= 1$ Schicht
$T_1^f = 1/\lambda_1 = 200$ h.
$T_2^f = 1/\mu_1 = 30$ h.

Die Parameter der Rollenbahn sind:

$Q_g = 30$ LE/h (deterministischer Wert)
$\tau\ = 10$ h $= 1$ Schicht
$T_1^g = 1/\lambda_2 = 150$ h
$T_2^g = 1/\mu_2 = 25$ h.

Aufgrund der bekannten Formen für den Erwartungswert und für die Streuung sowie der Gleichung (23) wird die Durchlaßfähigkeit des Fördersystems mit den Werten $M[\eta(t)] \pm \pm D[\eta(t)] = 160 \pm 21$ Lagereinheiten/Schicht charakterisiert.

3.4. *Untersuchungsmöglichkeiten der Reservekapazitäten*

Bei Fördersystemen mit Serienanordnung der Fördermittel ist es allgemein üblich, das ausgefallene Fördermittel mit einem Reservegerät zu ersetzen (Abb. 3). Das kann in den Berechnungen so berücksichtigt werden, daß die Zeit für die Inbetriebnahme des Reservegerätes (kalte Redundanz) als Reparaturzeit des ausgefallenen Fördermittels interpretiert wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß die durchschnittliche Reparaturzeit des Fördermittels wesentlich kleiner ist als der Erwartungswert seiner Funktionsdauer. Im Falle der warmen Redundanz, wenn z. B. neben einer Rollenbahn eine andere Rollenbahn ebenfalls funktionsfähig ist (aber erst bei Ausfall des Grundgerätes in Betrieb genommen wird), werden die Berechnungen auf jene Modelle der Zuverlässigkeitstheorie reduziert, die das Verhalten von Systemen mit sofort reparierbaren Elementen beschreiben.

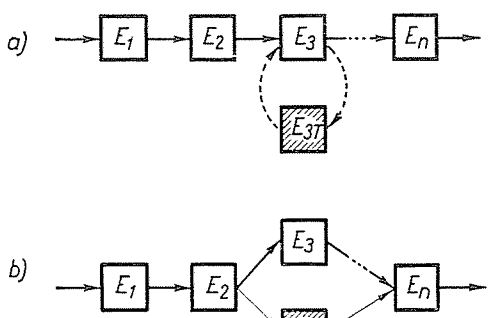

Abb. 3. Serienanordnung der Fördermittel mit kalter (a) bzw. warmer (b) Redundanz

3.5. Die Untersuchung der Auswirkung der Pufferspeicher in Serienanordnung auf die Durchlaßfähigkeit der Fördersysteme

Zwischen den in Serie angeordneten Fördermitteln gewährleisten oft Speicherplätze mit definierter Kapazität (Pufferspeicher) den Ausgleich der zufälligen Abweichungen der Leistungsfähigkeit der Fördermittel (z. B. Stapler — Pufferspeicher — Regalbediengerät; Abb. 4). Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des gesamten Fördersystems kann unter Berücksichtigung der Ausgleichsfunktion des Pufferspeichers, der ebenfalls als ein Element in Serienanordnung betrachtet wird, nach der analytischen Methode berechnet werden.

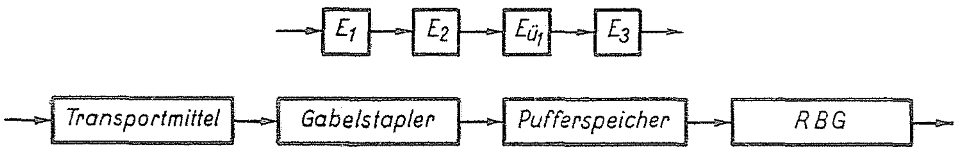

Abb. 4. Pufferspeicher zwischen Fördermitteln in Serienanordnung

Es soll zwischen zwei Fördermitteln oder Teilsystemen des Fördersystems ein Pufferspeicher angeordnet werden, in dem maximal C Transporteinheiten auf Bedienung durch das nachfolgende Fördermittel warten können; die Kapazität des Pufferspeichers ist also gleich C.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des Teilsystems bzw. Fördermittels vor dem Pufferspeicher während der Zeitdauer Δt soll mit $r_k(\Delta t)$, die entsprechende Verteilung des Teilsystems nach dem Pufferspeicher mit $p_l(\Delta t)$ bezeichnet werden.

Wenn vorausgesetzt wird, daß die im Pufferspeicher verweilenden Transporteinheiten — der Durchlaßfähigkeit des nachfolgenden Teilsystems entsprechend — »am Anfang« der Untersuchungszeiteinheit weitergeleitet werden, und die Transporteinheiten, die der Durchlaßfähigkeit des vorangegangenen Teilsystems entsprechend angeliefert werden, »am Ende« der Untersuchungszeiteinheit eingeschleust werden (zu erreichen mit der richtigen Wahl der Zeiteinheit*), dann entspricht der Verlauf der Anzahl der während der Zeiteinheit im Pufferspeicher wartenden Transporteinheiten — unter Berücksichtigung der Durchlaßfähigkeitswerte als Zufallsgrößen der vorangegangenen

* Bei Pufferspeichern mit geringer Kapazität (5—10 Transporteinheiten) kann die Bestimmung der Zeiteinheit einige Schwierigkeiten bereiten. Die Zeiteinheit Δt für die Untersuchung ist nämlich so zu wählen, daß die Anzahl der während Δt einzuschleusenden Transporteinheiten die Kapazität C nicht oder nur in geringem Maße überschreitet. Beträgt die Kapazität nur 1—3 Transporteinheiten, dann empfiehlt es sich im allgemeinen, die Berechnungen ohne Berücksichtigung des Pufferspeichers durchzuführen. Es erscheint zweckmäßig, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und die statistischen Charakteristiken (Erwartungswert, Streuung usw.) mit der Konvolution der Verteilungen bzw. mit der entsprechenden Multiplikation der statistischen Kennzahlen für die Zeitdauer τ zu transformieren.

und nachfolgenden Teilsysteme — einer homogenen Markoffschen Kette. Ein beliebiges Element m_{ij} der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten dieser Markoffschen Kette, welches die Wahrscheinlichkeit angibt, daß die Anzahl der Transporteinheiten im Pufferspeicher am Ende der Zeiteinheit Δt j betragen wird, wenn sich i Transporteinheiten am Anfang der Zeiteinheit dort befinden, kann nach dem Zusammenhang

$$m_{ij}(\Delta t) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l(\Delta t)\, d(i, j \mid l) \tag{24}$$

berechnet werden. Hier bedeutet

$$d(i, j \mid l) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{l-i} r_k(\Delta t) & \text{für} \quad j = 0, l - i \geq 0, 0 \leq i \leq C \\ r_{j+l-i}(\Delta t) & \text{für} \quad 0 < j < C, j + l - i \geq 0, 0 \leq i \leq C \\ \sum_{j=C}^{\infty} r_{j+l-i}(\Delta t) & \text{für} \quad j = C, C + l - i \geq 0, 0 \leq i \leq C \\ 0 \quad \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \tag{25}$$

Da es bewiesen werden kann, daß jene Markoffsche Kette, die die Anzahl der Transporteinheiten in dem so interpretierten Pufferspeicher bestimmt, ergodisch ist [6], existiert eine Grenzverteilung $q_i^{LAG}(\Delta t)$ für die Anzahl der wartenden Transporteinheiten; diese Grenzverteilung, die nach hinreichend langer Betriebszeit erreicht wird, erhält man durch Lösen des Gleichungssystems

$$q_i^{LAG}(\Delta t) = \sum_{j=0}^{C} m_{ij}(\Delta t)\, q_j^{LAG}(\Delta t) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, C - 1, C \tag{26}$$

$$\sum_{i=0}^{C} q_i^{LAG}(\Delta t) = 1$$

Ein beliebiges Element n_{ij} (welches die Wahrscheinlichkeit der Weiterleitung von j Transporteinheiten während der Zeiteinheit Δt angibt, wenn die Anzahl der im Pufferspeicher wartenden Transporteinheiten »am Anfang« der Zeiteinheit i beträgt) der stochastischen Matrix, die den Verlauf der Anzahl jener Transporteinheiten charakterisiert, die unter Berücksichtigung der Durchlaßfähigkeit des nachfolgenden Teilsystems weitergeleitet werden können, kann nach dem Zusammenhang

$$n_{ij}(\Delta t) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l(\Delta t) \cdot e(i, j \mid l) \tag{27}$$

bestimmt werden. Hier bedeutet

$$e(i,j\,|\,l) = \begin{cases} r_{j-i}(\Delta t) & \text{für} \quad j-i \geq 0, j < l, 0 \leq j \leq C \\ \sum\limits_{k=j-i}^{\infty} r_k(\Delta t) & \text{für} \quad j-i \geq 0, j \geq l, 0 \leq j \leq C \\ 1 & \text{für} \quad j-i < 0, j = l, 0 \leq j \leq C \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen}. \end{cases} \tag{28}$$

Auf diese Weise läßt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_h^*(\Delta t)$ der Anzahl der Transporteinheiten, die aus dem Pufferspeicher weitergeleitet werden können, im stationären Falle offensichtlich aufgrund der Gleichung

$$q_h^*(\Delta t) = \sum_{i=0}^{C} q_i^{LAG}(\Delta t)\, n_{ik}(\Delta t) \tag{29}$$

berechnen.

Hier bedeutet die Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_h^*(\Delta t)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit des gesamten Fördersystems unter Beachtung des Pufferspeichers sowie aller Fördermittel vor und nach ihm.

Die obige Wahrscheinlichkeitsverteilung kann für die Zeitdauer τ — für den Fall $\tau = k\Delta t$ — mit der k-fachen Konvolution der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_h^*(\Delta t)$, aufgrund der rekursiven Formel

$$q_h^*(\tau = k \cdot \Delta t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{h-j}^*[(k-1)\,\Delta t]\; q_j^*(\Delta t) = KONV[q_h^*(\Delta t)]^k$$

ermittelt werden. Hier bedeutet

$$q_h^*[(k-1)\,\Delta t] = \sum_{j=0}^{\infty} q_{h-j}^*[(k-2)\,\Delta t]\; q_j^*(\Delta t), \ldots q_h^*(2\Delta t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{h-j}^*(\Delta t)\; q_j^*(\Delta t).$$

4. Zusammenfassung

Die Studie beschäftigt sich mit der stochastischen Untersuchung von typischen Fördersystemen des innerbetrieblichen Transports. Über die Behandlung der Formeln zur Bestimmung der statistischen Charakteristiken und der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Durchlaßfähigkeit der Fördersysteme mit Serien- und Parallelanordnung der Fördermittel hinaus wird die Auswirkung der Reservekapazitäten und Pufferspeicher auf den Betrieb des Fördersystems analysiert.

Die hergeleiteten Zusammenhänge — deren Handhabung durch die moderne elektronische Datenverarbeitung erleichtert wird — können sowohl bei der Projektierung als auch bei der Untersuchung von Fördersystemen angewandt werden. Mit ihrer Hilfe können u. a. die Anzahl der Fördermittel sowie ihre Leistungsfähigkeit für ein vorgegebenes Zuverlässigkeitsniveau bestimmt werden.

Literatur

1. Dreger, W.: Kapazität Komplexer Förder-Systeme. Bestimmung mit Hilfe der Simulation. I., II. Fördern und Heben, **23.** (1973) p. 746—749; p. 881—886.
2. Ghosal, J.: Some Aspects of Queues and Storage System. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1970.
3. Gnedenko, B.—Beliaew, J.—Solowew, A.: Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
4. Gudehus, T.: Warteschlangen und Wartezeiten in Warenverteil und Lagersystemen. Fördern und Heben, **23.** (1973) p. 210—218.
5. Parzen, E.: Stochastic Processes. Holden-Day, San Francisco, 1962.
6. Prezenszki, J.—Várlaki, P.: Modellierung des Verhaltens von Lagersystemen.* Gép **29.** (1977) p. 419—430.
7. Prezenszki, J.—Várlaki, P.: Die theoretischen Grundlagen der Zuverlässigkeits- und Kapazitätsuntersuchungen von Fördersystemen. Periodica Polytechnica, Vol. 6 No. 1 (1978) p. 53—72.
8. Reinschke, K.: Zuverlässigkeit von Systemen. VEB Verlag Technik, Berlin 1973.
9. Rényi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
10. Stoyan, D.: Matematische Methoden in der Operationforschung. (Fördertechnik — Bergbau — Transportwesen). VEB Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1971.
11. Szmehov, A. A.: Optimisazija processzow gruzovoj raboty. Transport, Moskau, 1973

Dr. József Prezenszki
Dr. Péter Várlaki
1092 Budapest, Kinizsi utca 1—7. Ungarn

* In ungarischer Sprache.