

DIE DIMENSIONIERUNG VON MASCHINEN UND TRAGSYSTEMEN FÜR DYNAMISCHE BEANSPRUCHUNGEN II

Von

G. RUDNAI

Lehrstuhl für Mechanik, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 22. November 1976

4. Analyse der Beanspruchungen

Mikrorisse beeinträchtigen die Festigkeit dynamisch beanspruchter Objekte noch nicht erkennbar. Der Schaden ist so bei dynamischen Beanspruchungen mit dem Auftreten von Rissen verbunden, die im großen und ganzen senkrecht zu den örtlichen Hauptzugdehnungen verlaufen. Dies ergibt die hervorragende Bedeutung der Zug- und Druckbeanspruchung bei dynamischen Vorgängen. Alle anderen Beanspruchungen können — bei Schub als Vektor-komponenten, bei Biegung und Torsion als Momente — auf die Hauptwerte zurückgeführt werden. Zug und Druck stehen daher im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit.

4.1 Statistische Datenaufnahme

Die Beanspruchungen der Maschinen und Tragsysteme während ihres Gebrauches treten in Form von Kräften auf, die nicht unmittelbar, sondern nur durch ihre Wirkung gemessen werden können. Am meisten geeignet sind jene Wirkungen, die die Lasten in den Objekten selbst hervorrufen, da so die Zwischenschaltung besonderer Meßapparaturen überflüssig wird und die natürliche Reaktion des Objektes nicht stört. Am naheliegendsten ist die Messung der größten Dehnungen einer geeigneten Stelle mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen, oder die Messung von Beschleunigungen in hierfür geeigneten Punkten. Beiden Verfahren messen gerichtete Größen, Vektoren. Es ist daher selbst bei ebenen Gebilden die simultane Analyse zweier Komponenten in Abhängigkeit von der Zeit erforderlich, aber auch die Untersuchung linearer Wirkungen, bei denen die Richtung des Vektors gegeben ist (z. B. bei Stäben von Fachwerken), ist nicht ganz einfach.

Die Beanspruchungsmessung erfolgt oft unter der Annahme, daß die positiven und negativen Werte einander statistisch das Gleichgewicht halten, so daß man entweder die negativen Maxima zu den positiven addiert, oder nur die einen (positiven oder negativen) zählt. Tatsächlich ist dies nicht immer richtig, denn wegen der inneren Dämpfung der Systeme können sich beide

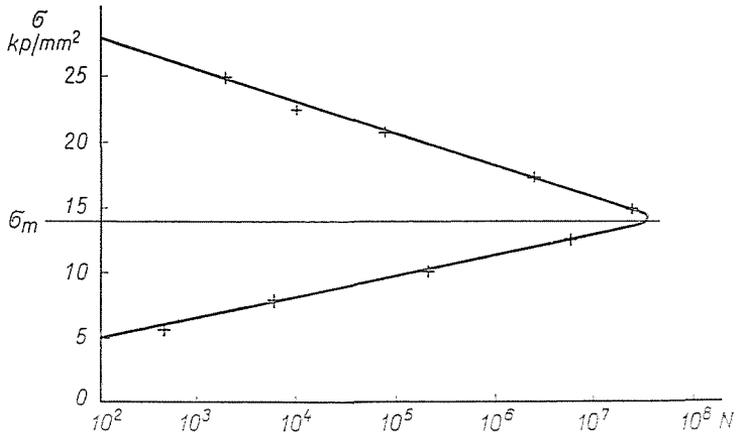


Abb. 23

mehr oder weniger unterscheiden. Zum Beispiel ist die Beanspruchungsstatistik einer Autobus-Vorderachse (Bild 23) infolge der Federungswirkung stark asymmetrisch. Daher müssen Meßstelle und -Richtung stets unter sorgfältiger Erwägung der Elastizitätseigenschaften des Gebildes bestimmt werden.

Die Beanspruchungen sind gewöhnlich schwingungsartig und können deshalb auf zwei Arten untersucht werden: entweder stetig nach dem Verlauf der Umhüllenden, oder als Haufen diskreter Spitzen (oder Amplituden). Die adäquate Untersuchungsmethode diskreter Haufen ist die mathematische Statistik, der stetigen Erscheinungen die harmonische Analyse. Beide stehen in transformativem Zusammenhang. Im Verlauf der Entwicklung hat man sich meist verschiedener Verfahren der statistischen Analyse bedient, die SJÖSTRÖM [35] theoretisch und SCHIJVE [36] empirisch sorgfältig verglichen haben. Es zeigte sich, daß zwischen den Ergebnissen der zahlreichen Verfahren kein wesentlicher Unterschied besteht, mit Ausnahme der kleinen Schwingungen um den Mittelwert herum, die für die Bemessung wegen ihrer Einflußlosigkeit uninteressant sind. Allein die Methode der periodischen Abtastung (chopping) ist ungeeignet, da sie jene harmonischen Komponenten falsch zählt, deren Frequenz mit der der Abtastung vergleichbar ist.

In der Praxis haben sich zwei Arten der statistischen Summierung verbreitet: die Zählung der Niveaufkreuzungen (Bild 24) und der Spitzen zwischen zwei Nullkreuzungen (Bild 25).

Bei der Zählung der Niveaufkreuzungen können die hinsichtlich der Ermüdung unwesentlich kleinen überlagerten Schwingungen stören, wenn sie so liegen, daß sie die mehrmalige Kreuzung einer Niveaulinie verursachen. Darum versucht man sie in den nach diesem Verfahren arbeitenden Geräten auszuschließen. Die Überdeckung der Streufelder der Maxima und Minima (vgl.

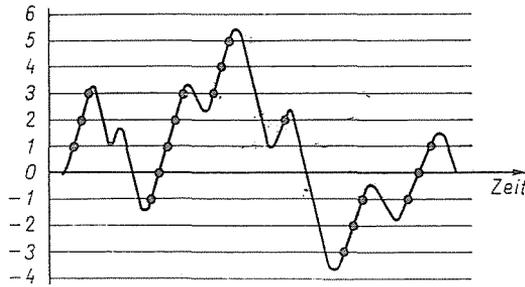


Abb. 24

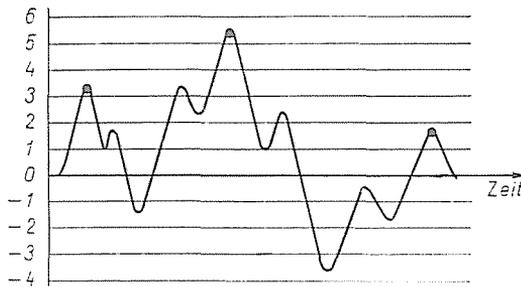


Abb. 25

Bild 26) ist unbedenklich, da sie sich nur auf die Nachbarschaft der ruhenden Grundlast (des Modus der Verteilung) erstreckt und so keine Ermüdung verursacht. Die Differenz der Kreuzungen zweier benachbarter Niveaus ergibt die Zahl der dazwischenfallenden Schwingungsspitzen.

Die Spitzenzählung zwischen den Nullkreuzungen erfaßt keine Überlagerungen. Sie vernachlässigt zwar die im Abschnitt enthaltenen niedrigeren Spitzen, deren Zahl jedoch nicht sehr groß ist, wenn die Schwingungen die Ruhelast oft kreuzen, wie es z. B. bei Fahrzeugen der Fall ist. Diese Statistik liefert genau die dritte Art der asymptotischen Verteilung der Grenzwerte, die bei der Ermüdung erfolgreich angewandte Weibull-Verteilung. Der Nachteil des Verfahrens ist, daß das Niveau des Mittelwertes vorher festgelegt werden muß, und dies hauptsächlich bei veränderlicher Grundlast nicht mit dem Modus der Verteilung übereinstimmt.

4.2 Auswertung der Daten

Das ausgewertete Ergebnis der statistischen Datenaufnahme wird im Koordinatensystem als Ermüdungskurve $S = f(\lg N)$ dargestellt und Belastungsbild oder Lastkollektiv («Lastenspektrum») genannt. In Wirklichkeit handelt es sich um eine absolute Dichtefunktion $\lg N = f(S)$, die durch eine

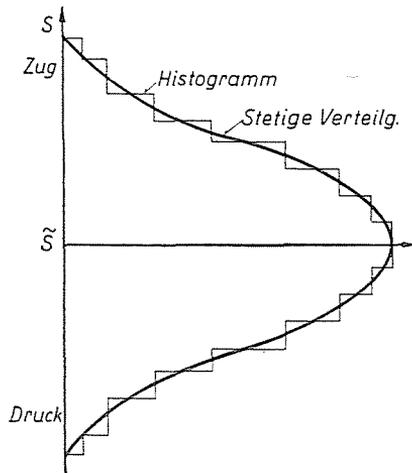


Abb. 26

Rechtsdrehung um 90° transformiert ist (Bild 26). Das »Lastenspektrum« ist nicht identisch, aber verwandt mit dem Energiespektrum, da die Dichtefunktion unter bestimmten Voraussetzungen nach Fourier in eine charakteristische Funktion transformiert werden kann, die in harmonische Komponenten zerlegbar ist. Das Lastkollektiv unterscheidet sich von der standardisierten normalen Dichtefunktion wesentlich darin, daß seine umschlossene Fläche nicht $= 1$ ist, sondern von der Zeitdauer der Datenaufnahme abhängt. Eine zweimal so lange Aufnahme ergibt auf jedem Niveau doppelt so viel Daten, die Kurve verschiebt sich also in Richtung $\lg N$ parallel um $\lg 2$. Offensichtlich wachsen so die zu jedem N gehörigen Größtbeanspruchungen S , es können daher $N = 10^\circ = 1$ mal auch auch so große Beanspruchungen vorkommen, die auf kürzeren Meßstrecken nicht zu erwarten sind. Mit zunehmender Lebensdauer wachsen also auch die größten zu erwartenden Beanspruchungen. Die Größe der Maximalbeanspruchung ist eine stochastische Funktion der Lebensdauer. Wohl nimmt mit dem Wachsen der Größe die Häufigkeit der Beanspruchungen stark ab, wie auf den Bildern 27 und 28 gut zu sehen ist. Das Vorkommen der größten Spitzen wird schließlich so selten, daß dies als außergewöhnlicher Unfall betrachtet werden kann.

Die Aufnahme des Belastungsbildes ergibt meist keine stetige, sondern eine stufenförmige Linie, ein sog. Histogramm. Wird durch Verdichtung der Stufen oder ihre Mittelung das Bild in eine stetige Kurve überführt, so entspricht diese bei unveränderten Betriebsbedingungen im allgemeinen einem Gauß-Prozeß (Bild 27). So sind z. B. die auf besseren, kurzen Strecken aufgenommenen Beanspruchungsbilder von Kraftfahrzeugen. Auf längeren Strecken, wo sich die Wegqualitäten und die Betriebsparameter oft ändern und

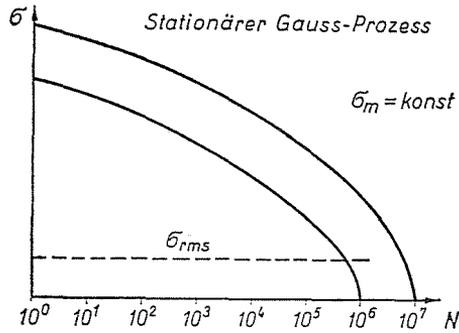


Abb. 27

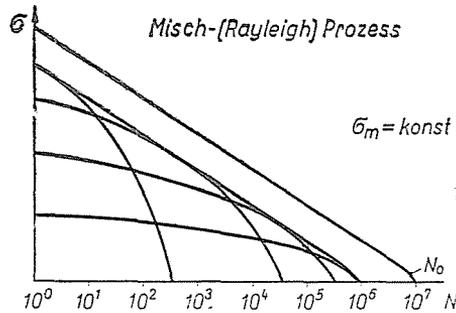


Abb. 28

vermengen, ergeben sich als Überlagerung der elementaren Gauß-Prozesse abfallende Geraden (Bild 28), die praktisch einer Rayleigh-Verteilung entsprechen, und deren Richtungstangente bei Fahrzeugen etwa um den Wert $- 1/6$ schwankt, was für Schätzungen genügt. Die Weibull-Verteilung ist im Exponentenbereich $2 < k < 3,57$ an der unteren Grenze gleich der Rayleigh-Verteilung und schmiegt sich an der oberen Grenze eng an die Normalverteilung an, ihr Bild fällt also je nach Größe des Exponenten zwischen die abfallende Gerade und die Parabel dieser Verteilungen. Dies zeigt ihre besondere praktische Brauchbarkeit bei Ermüdungsproblemen.

4.3 Das Kräftespiel

Alle äußeren auf Körper (Tragsysteme, Maschinen) wirkenden Kräfte verteilen sich im Inneren der Objekte und verursachen dort verschiedene Beanspruchungen. Bei ruhenden Lasten läßt man im allgemeinen größere Beanspruchungen als die Fließgrenze nicht zu, man betrachtet die Körper demnach als elastisch. Die Festigkeitslehre bestimmt das Kräftespiel in elasti-

schen Körpern nach den Gesetzen der Statik, bei redundanten (statisch unbestimmten) Strukturen unter Einbeziehung der Elastizitätslehre.

Bei wechselnden Lasten entstehen als dynamische Wirkung zusätzlich Beschleunigungen, und als ihre Folge innere Massenkräfte, die das statisch ermittelte Kräftespiel verzerren. Zu den elastischen kommen plastische Formänderungen infolge der periodisch entgegengesetzten Wanderung der Dislokationen. Hierdurch treten schon weit unter der Fließgrenze Hystereseerscheinungen auf, die die Ausbreitung der Kraftwirkungen dämpfen. Bei innerlich mehrfach zusammenhängenden redundanten Gebilden kann infolgedessen auch Interferenz auftreten, wenn die an dieselbe Stelle auf verschiedenen Bahnen mit Phasendifferenz ankommenden Wirkungen derselben Kraft einander verstärken oder schwächen. Ist die Lastfrequenz genügend groß, so kann das dynamische Kräftespiel auf diese Art nichtlinear werden und erheblich vom statischen abweichen. Die nichtlinearen Einflüsse erschweren das Verfolgen der Vorgänge.

Die Methoden zur Bestimmung des dynamischen Kräftespiels sind noch nicht genug entwickelt und die bisherigen Ergebnisse zu verwickelt, um bereits praktisch angewandt zu werden. Es bieten sich zwei Auswege: versuchsmäßig (evtl. mit Modellversuch) das dynamische Kräftespiel oder dessen Abweichung vom statischen zu bestimmen, oder das Objekt aufzuteilen in ein fast starres System, das statisch erfaßt werden kann, und die anschließenden elastischen Teile (Federn) und Dämpfer, die für sich zu untersuchen sind. Auch dies ist nicht ganz einfach, besonders da die dynamischen Wirkungen stark frequenzabhängig sind.

4.4 Die Überlebenswahrscheinlichkeit

Die Brauchbarkeit mechanisch beanspruchter Gebilde kann auf zweierlei Arten enden: durch unzulässig große Formänderung oder durch Bruch.

Das Maß der Formänderung verdient nur dann Beachtung, wenn die Beanspruchung die Fließgrenze σ_F überschreitet. Bei Wechselbeanspruchung erfolgt der Bruch schon nach mehr als $N = 10^3 \dots 10^4$ Überschreitungen der Fließgrenze, daher darf die Anzahl der σ_F übersteigenden Spitzenbeanspruchungen innerhalb der erwünschten Lebensdauer diesen Wert nicht erreichen.

Bei kleineren Spitzenbeanspruchungen endet die Brauchbarkeit des Objekts nach mehr als $10^3 \dots 10^4$ Lastspitzen stets mit einem Bruch. Während dies bei monoton langsam zunehmender Belastung eine (statische) gewaltsame Trennung des gefährdeten Querschnitts ist, ist es bei Ermüdung ein Gewaltbruch des durch Ermüdungsrisse noch nicht abgetrennten Restquerschnittes (Restbruch). Den tatsächlichen Bruch kann zwar auch hier eine große plastische Deformation kurz vorangehen, die das Gebilde bereits unbrauchbar macht, ihr Voreilen ist aber so gering, daß sie bezüglich der Lebensdauer keine Rolle spielt.

4.4.1 Prüfkörper — Konstruktionsteile

Die Grundlage der Belastbarkeit eines jeden Gebildes ist die Tragfähigkeit seines Werkstoffes unter den gegebenen Umständen. Die Bestimmung dieser Tragfähigkeit erfolgt jedoch — zusammen mit dem Einfluß der Umstände — mit Hilfe genormter Prüfkörper, von denen sich die Konstruktionsteile in Form und Ausführung mehr oder weniger unterscheiden. Vor allem ist bereits ihre Querschnittsform meist sehr verschieden von der gewöhnlich taillierten, runden oder flachen Form der Prüfstäbe, die man zur Erzielung vergleichbarer Ergebnisse mit größter Sorgfalt und Genauigkeit ausbildet. Dadurch ist die Formänderung der Konstruktionsteile unter Last bei weitem nicht so ebenmäßig wie die der Prüfkörper, und bildet den Formunterschieden entsprechend Spannungsspitzen an den Stellen, wo die Verformung durch die Umgebung behindert wird. Wo solche Stellen sind, hängt weitgehend von der Art der Beanspruchungen ab.

Bei unverletzten Konstruktionsteilen geht der Ermüdungsbruch von der Stelle einer solchen Spannungsspitze aus und breitet sich bei massiven Körpern mehr oder weniger konzentrisch über den Querschnitt aus. Der Bruchfortschritt vermindert nicht nur die Größe der tragenden Querschnittsfläche, sondern ändert auch deren Form und Lage. Infolgedessen ändert sich auch die Geschwindigkeit der Bruchfortpflanzung. Sie kann abnehmen und auch aufhören (vgl. Abschn. 325), der Bruch wächst aber meist bis der Restquerschnitt so klein geworden ist, daß bei der nächsten Beanspruchungsspitze ein Gewaltbruch erfolgt.

4.4.2 Maschinenelemente und Bindungen

Schon das Verhalten von Konstruktionsteilen ist demnach von dem der Prüfkörper verschieden. Das ganze Gebilde wird dann aus verschiedenartigen Teilen mit Hilfe einer Reihe von Bindungen zusammengebaut. Die Belastbarkeit jedes dieser Konstruktionselemente — der Teile und der Bindungen — läßt sich getrennt bestimmen, wenn man von den Prüfkörpern ausgehend die zu erwartende Wirkung der Einflußgrößen in Rechnung stellt.

Die Einflußfaktoren müssen natürlich mit sehr großer Sorgfalt angesetzt werden, da schon eine geringe Nachlässigkeit große Fehler verursachen kann. Um dies zu vermeiden, hat man bereits mit Maschinenelementen aller Art — mit Bolzen, Schrauben, Kurbel- und anderen Wellen, Zahnrädern — große Mengen von Ermüdungsversuchen durchgeführt. Es macht jedoch oft Mühe, deren Ergebnisse einheitlich zusammenzufassen, da die Umstände der an verschiedenen Orten durchgeführten Prüfungen nicht genügend übereinstimmen, ja sogar mehrfach aus zu wenig Daten recht kühne Folgerungen gezogen wurden. Literaturangaben — vor allem die älteren — sind daher mit Vorsicht

zu gebrauchen; zu empfehlen sind stets auf Berechnungen gestützte Abschätzungen zur Nachprüfung.

Weiter darf nicht übersehen werden, daß selbst die sorgfältigste Technologie bei der Produktion viel größere Bearbeitungen anwendet, als der Laboratoriumsversuch, und deshalb Fabrikprodukte — wenn man eine Oberflächenverfeinerung nicht verbindlich vorschreibt — mehr gekerbten Prüfstäben ähneln als glatten. Dies hat zwei belangreiche Folgen: gegenüber einer glatten Laborprobe ist der Erwartungswert der Lebensdauer mindestens um eine Größenordnung geringer, andererseits ist aber auch ihre Streuung bedeutend kleiner. Daher ist die Abnahme der mit großer Wahrscheinlichkeit erzielbaren (kurzen) Lebensdauern von Fabrikaten gegenüber Laborproben wesentlich geringer, als die der langen Lebensdauern kleiner Wahrscheinlichkeit (vgl. Bild 25). Angaben über die meist verbreiteten Maschinenelemente kann man den Katalogen von Wöhler-Kurven [37, 38] entnehmen.

Sehr viele Versuche wurden vor allem mit Bindungen unternommen, die in den Knotenpunkten des Kräfteflusses zwischen die Bauteile geschaltet sind und so eine besonders wichtige Rolle spielen. Es gibt insbesondere über die weitverbreiteten Schweißverbindungen mehrere eingehende und gründliche Monographien [39, 40, 41], da sowohl die Struktur, als auch die Oberfläche der Schweißnähte gegen Ermüdung besonders empfindlich ist. Als wichtigstes Ergebnis ist hervorzuheben, daß die Stumpfnah mit geglätteter Oberfläche die beste Schweißnaht ergibt, besonders wenn man die Bildung von Endkratern vermeidet. Am schlechtesten ist die Ecknaht, hauptsächlich wenn sie mangelhaft durchgeschweißt oder nicht durchgehend, sondern unterbrochen (oder beides) ist.

Bei Bindungen, bei denen die Kraftübertragung quer zur Nahrichtung durch Schub erfolgt (Bild 29), ist die Elastizität der verbundenen Teile und des Bindungsstoffes verschieden. Bekanntlich ändert sich hierdurch die Dehnung

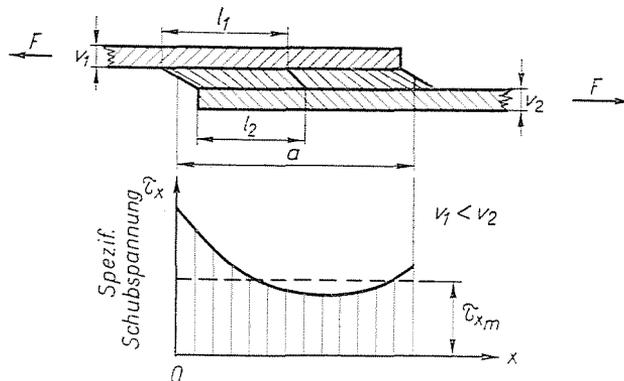


Abb. 29

bei der Überleitung der Kraft von dem einen Teil in den anderen entgegengesetzt, wodurch die Kanten der Verbindung stärker belastet sind, als ihre Mitte. Dies ist besonders bei unstetigen mehrreihigen Bindungen (Niete oder Schrauben) ungünstig und sollte durch Anschärfen der Kanten verbessert werden. Klebverbindungen sind hierin günstiger, da Zähigkeit und Dämpfung des Klebstoffes etwas ausgleichend wirkt.

4.4.3 Aufbau des Systems

Jedes System ist im Grunde aus Folgen von Bauteilen und Bindungen aufgebaut. Je nachdem ob ihre Verbindung in Reihe oder parallel erfolgte, ergibt sich die Lebensdauer des neuwertigen Gebildes aus den Teildaten auf zwei verschiedene Arten [42]. Ein statisch bestimmtes Bauwerk ist im wesentlichen in Reihe geschaltet (Bild 30) und stürzt zusammen, wenn ein beliebiges Glied ausfällt. Am wahrscheinlichsten ist, daß dies das schwächste Glied sein wird, doch steht den anderen Gliedern auch eine gewisse — kleinere — Bruchwahrscheinlichkeit zu, und ihre Streufelder sich teilweise überdecken. Mit der Bruchrate r_i (siehe im Abschnitt 5.1) ausgedrückt, ist die Wahrscheinlichkeit des Bruches des i -ten Gliedes nach der Zeit n

$$P_i(n) = 1 - \exp\left[- \int_0^n r_i(n) dn\right]$$

und die Wahrscheinlichkeit dessen, daß das Ganze aus m Gliedern bestehende

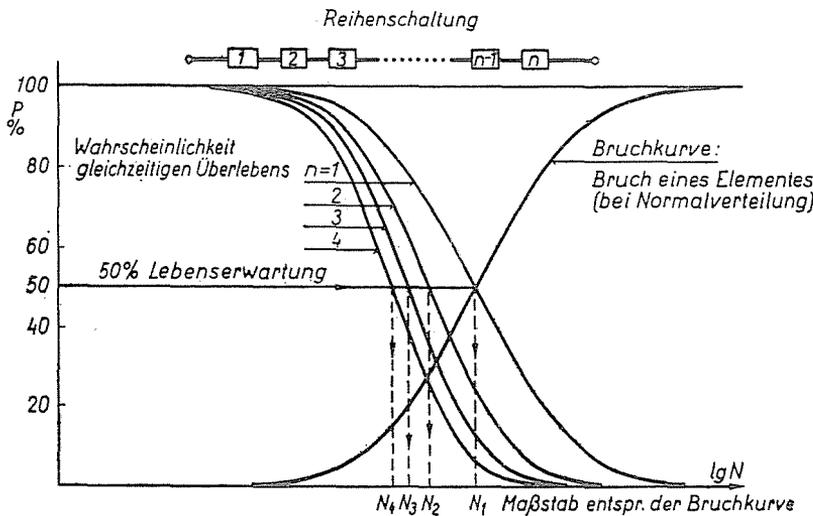


Abb. 30

Gebilde n Schwingungen überlebt, ist (mit stetigen bzw. diskreten Werten)

$$L(n) = \prod_{i=1}^m L_i(n) = \prod_{i=1}^m \exp \left[- \int_0^n r_i(n) dn \right] = \exp \left[- \int_0^n \sum_0^m r(n) dn \right]$$

d. h. die Bruchrate eines solchen Gebildes ist die Summe der Raten seiner Elemente. Die Lebenserwartung einer in Reihe geschalteten Konstruktion ist daher *kleiner* als die des schwächsten Gliedes und nimmt mit wachsender Zahl ihrer Teile und Bindungen weiter ab. Auch die Streuung der Überlebenswahrscheinlichkeit nimmt mit wachsender Gliederzahl ab. So verschiebt sich die Kurve der Lebenserwartung mit steigender Gliederzahl nach kleineren Werten und wird immer steiler.

Das parallel geschaltete, statisch unbestimmte, redundante Bauwerk (Bild 31) bricht dagegen erst nach dem Ausfall sämtlicher überzähliger Zweige, nach dem Versagen des restlichen Grundsystems zusammen. Besteht das Gebilde aus m Gliedern etwa gleicher Festigkeit, dann ist die Bruchwahrscheinlichkeit

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots P_m = \prod_{i=1}^m P_i = \prod_{i=1}^m (1 - L_i)$$

und die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$L = 1 - P = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - L_i)$$

Es ist jedoch zu beachten, daß der Ausfall eines jeden Zweiges eine Neuordnung des Kräftespiels nach sich zieht, bei der die Beanspruchung der restlichen

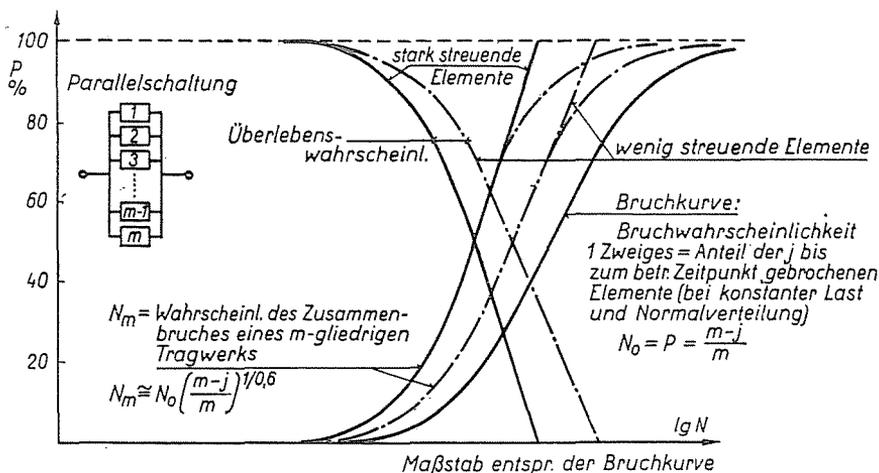


Abb. 31

Zweige umso stärker zunimmt, je kleiner die Zahl der Zweige ist. So kann der Zusammenbruch des ganzen Gebildes als Kettenreaktion schon nach Ausfall einiger — unter Umständen schon des ersten — überzähligen Gliedes erfolgen. Die Streuung der Überlebenswahrscheinlichkeit nimmt ebenfalls merkbar ab, die Kurve wird auch hier erheblich steiler. Eine geringe Redundanz ist also für die Lebensdauer nicht günstig. Statische Unbestimmtheit ist nur vorteilhaft, wenn nach dem Ausfall der ersten Glieder die Tragfähigkeit des Restsystems — wenigstens für eine Zeit — ausreicht, um bei vorsichtigem Betrieb den dabei auftretenden Belastungen zu widerstehen. Bei Flugzeugen z. B. kann so eine sichere Notlandung ermöglicht werden.

Wirkliche Konstruktionen bestehen im allgemeinen teils aus statisch bestimmten, teils aus unbestimmten Bereichen (in Reihe und parallel geschalteten Teilen). Ihre Lebensdauer kann nach dem Gesagten mit einiger Mühe abgeschätzt werden, wenn ihre Belastung und mit ihr die Beanspruchung stationär ist. Beim instationären Schwanken der Belastung muß man noch irgendeine annehmbare Abschätzung der Schadensakkumulation zuhilfe ziehen.

4.5 Kombinierte Beanspruchungsarten

Einige Forscher haben die Anwendbarkeit der Zusammenhänge auf die Ermüdung untersucht, die in der Festigkeitslehre als Bruchhypothesen für die Summierung der Wirkung verschiedener Belastungsarten üblich sind. Die auf der Berechnung der elastischen Formänderungsarbeit beruhende Bruchhypothese von *Huber-Hencky-Mises* [43] erwies sich auch hier auf Biegung und Torsion als anwendbar. Die reduzierte Spannung ist nach ihr

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau^2} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_{\text{red}}} \right)^2 + \left(\frac{3\tau}{\sigma_{\text{red}}} \right)^2 = 1$$

Nehmen wir für den Faktor statt 3 den Wert 1,8, so bestimmt diese Gleichung im τ - σ -Koordinatensystem (Bild 32) eine Ellipse in deren Innerem die Punkte ohne Bruchbeanspruchung abgebildet sind. Die Abweichung ist nur in Richtung *Druck* erheblich, wie es infolge seiner günstigen Wirkung zu erwarten war.

Zur Kombination anderer Arten von Beanspruchungen hat sich diese Hypothese bei Ermüdung nicht bewährt. Für mehrachsige Spannungsarten, deren Hauptachsen gleichgerichtet sind, wurde sie von *Sines* [44] weiterentwickelt:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{f_1} - \sigma_{f_2})^2 + (\sigma_{f_2} - \sigma_{f_3})^2 + (\sigma_{f_3} - \sigma_{f_1})^2]} \leq \sigma_{\text{erm}} - a(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3)$$

wo σ_f die Schwingungsamplitude der Hauptspannungen und $\bar{\sigma}$ deren Mittel-

wert bezeichnet. Der Wert von α kann für jede Bruchschwingungszahl N aus den Randbedingungen berechnet werden:

$$\alpha = (\sigma_{\text{erm}}/\sigma_{f_1}) - 1$$

wo σ_{f_1} der zur Schwellbeanspruchung gehörige Wert ist.

Die auf der Formänderungsenergie beruhende Bruchhypothese setzt ein elastisches Verhalten der Werkstoffe voraus. Dagegen wissen wir heute, daß die Ermüdung wesentlich eine Folge plastischer Vorgänge ist. Es ist daher nicht überraschend, daß die Fortentwicklung der Hypothese durch Sines,

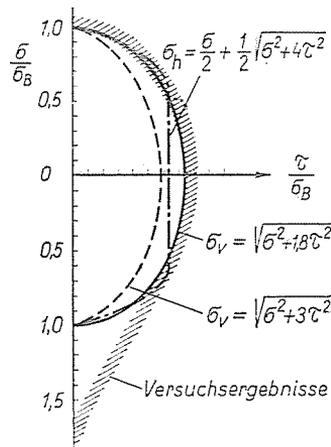


Abb. 32

eine im wesentlichen auf empirischen Daten beruhende Korrektur, die die entsprechenden Versuchsergebnisse recht gut deckt. Diese Hypothese ist natürlich nicht für Beanspruchungen geeignet, bei denen Spannungen konstanter Größe, aber wechselnder Richtung eine Rolle spielen, wie z. B. die Umlaufbiegung, deren Ermüdungswirkung bekanntlich sehr groß ist. Es ist zu erwarten, daß die theoretische Berücksichtigung der plastischen Vorgänge zu besser anwendbaren und verallgemeinerungsfähigen Resultaten führt.

4.6 Die Abnahme der Tragfähigkeit

Durch die Analyse der Tragfähigkeit sind wir zu statistischen Daten gelangt, die für das untersuchte Gebilde im Neuzustand gelten. Nimmt man es dann in Gebrauch, so wird das Objekt fortlaufend von den Ermüdungswirkungen seiner Belastungen und anderen Schädigungen getroffen. Die Tragfähigkeit des Gebildes nimmt hierdurch fortwährend ab.

Als Maß für die momentane Tragfähigkeit ist die jeweilige Überlebenswahrscheinlichkeit geeignet, die man — da sie unmittelbar ohne Zerstörung des Objekts kaum feststellbar ist — durch die Kombination der auf die Bestandteile bezüglichen leichter meßbaren Daten, unter Berücksichtigung von Phasenverschiebung und Dämpfung, gewinnen kann. Die auf die Ermüdung bezüglichen Daten sind natürlich noch zu ergänzen durch Angaben über andere Einflüsse auf die Tragfähigkeit: Korrosion, Verschleiß und evtl. andere. Natürlich sind dabei kommensurable Maßstäbe zu verwenden.

Zur Bestimmung der Lebensdauererwartung genügt die zweiparametrische Normalverteilung, da diese ja laut dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie im Bereich des Mittelwertes eine gute Näherung auch anderer Verteilungen der Praxis ist. Für den den gewählten Randabständen entsprechenden Verlauf der Streugrenzen ist dies dagegen nur eine grobe Näherung, da die Normalverteilung die tatsächliche bei Annäherung an die Flanken des Streufeldes immer weniger ersetzen kann.

5. Die Dimensionierung

Beim Dimensionieren vergleicht man die Beanspruchung S des Objektes und seine Tragfähigkeit R . Die Tragfähigkeit eines richtig bemessenen Gerätes ist immer größer, als es seine durch die Belastung erzeugte Beanspruchung erfordert, $R > S$ oder $R/S > 1$, jedoch überall stets nur wenig größer als bei der zu erwartenden Höchstlast nötig, da hier jede Übertreibung unnütze Werkstoffverschwendung bedeutet, daher teuer und zu vermeiden ist.

Die Belastung, besonders die dynamische, kann nicht unmittelbar mit der Tragfähigkeit verglichen werden, da die örtlichen Beanspruchungen infolge Dämpfung und Interferenzerscheinungen, sowie durch die evtl. Verschiebung der Höhe der mittleren Beanspruchung durch Plastizitätswirkung, den Lasten nicht überall proportional sind. Daher müssen zuerst die örtlichen Beanspruchungen der kritischen Stellen ermittelt werden.

Bei kleinen Frequenzen, also verhältnismäßig langsamem Lastwechsel, sowie weit unterhalb der Fließgrenze, wo die plastische Komponente der Formänderung vernachlässigbar klein ist, kann auf diese Umrechnung verzichtet werden und es genügt, mit dem statischen Kräftespiel zu arbeiten. Zwangsweise muß man dies wohl auch sonst tun, da das dynamische Kräftespiel schwer zu bestimmen und bisher nur selten bekannt ist.

5.1 Statistische Dimensionierung

Die Belastung ist meist nicht stationär. Wie bereits gezeigt, sind im Laufe der Zeit immer größere Lastspitzen zu erwarten. Auch die Tragfähigkeit kann nicht als konstant angesehen werden: je größer die geplante Lebensdauer ist,

umso kleinere Höchstlasten verträgt das Gerät. Die Abnahme ist noch stärker, wenn man auch die hinzukommenden übrigen Einflüsse berücksichtigt. Sowohl die Belastung S , als auch die Tragfähigkeit R sind von der Schwingungszahl abhängige stochastische Veränderliche.

Die Bruchwahrscheinlichkeit beträgt

$$P_F = P(R < S) = P[(R - S) < 0] = P(R/S < 1)$$

wo $S(n) > 0$, $R(n) > 0$ ist. $(R - S)$ bzw. R/S sind die Grenzverteilungen der gemeinsamen Verteilungsfunktion von $R(n)$ und $S(n)$. Daher ist die Wahrscheinlichkeit des Bruches während einer Belastung

$$P_F = \int_0^{\infty} F_R(S) f_S(S) dS = \int_0^{\infty} [1 - F_S(R)] f_R(R) dR$$

wo F die Verteilungsfunktion und f die Dichtefunktion der im Index angegebenen Veränderlichen bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit dessen, daß das Objekt eine Belastung S überlebt, ist $L = (1 - P_F)$. Die Wahrscheinlichkeit des Überlebens von m gleich großen Lastspitzen bei stationärer Belastung ist demnach

$$L(m) = (1 - P_F)^m \approx \exp(-mP_F)$$

Bei einem instationären Vorgang muß man von der Risikofunktion ausgehen. Das Risiko eines zwischen der $(n - 1)$ -ten und der n -ten Lastspitze erfolgenden Bruches ist

$$r(n) = \frac{l(n)}{L(n)} = - \frac{dL(n)}{dn} \frac{1}{L(n)} = \frac{1}{dn} \ln L(n)$$

Das Bruchrisiko bei einem stationären Prozeß wie vorhin ist somit

$$r(n) = P_F = \text{const} = 1/T$$

wo T der Takt der Wiederholungen der Lastspitzen (die Wiederholungsperiode) ist. Das Bruchrisiko eines instationären Prozesses ist dagegen nicht konstant, und die Überlebenswahrscheinlichkeit ist

$$L(n) = \exp \left[- \int_0^n r(n) dn \right]$$

Bei der Anwendung dieser Zusammenhänge reicht die Normalverteilung nicht mehr aus. Für die Lebensdauer ist nämlich das Maximum der Belastung S bzw. der Beanspruchung und das Minimum der Tragfähigkeit R maßgebend, die an den Flügeln der Verteilungen zu finden sind, wie diese laut Grenzvertei-

lungssatz bereits auseinanderklaffen. Die Feststellung der wirklichen Verteilungsart ist sehr schwierig, da sie zu viele Daten erfordert. Daher wäre durch sorgfältige physikalische Analyse zu entscheiden, welcher Verteilungstyp zuverlässig brauchbar ist. Sogar die recht einfache Voraussetzung, daß die Belastung nur eine obere und die Tragfähigkeit nur eine untere Grenze hat, führt zu so verwickelten Beziehungen, daß diese in der Praxis nicht brauchbar sind. Im allgemeinen muß man sich daher für die Bemessung mit den Erwartungswerten begnügen, und für die Streuung der Ergebnisse auf andere Art eine Schätzung finden.

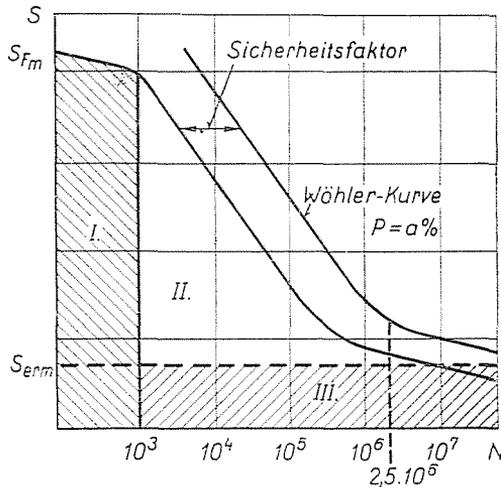


Abb. 33

Beim praktischen Bemessungsverfahren wird man zunächst die Belastung als stationär und die Tragfähigkeit als konstant betrachten. Auch so ist die Vorausberechnung der Lebensdauer eines Systems noch reichlich kompliziert. Zur weiteren Vereinfachung nehme man ferner die Beanspruchung proportional der Belastung. Betrachtet man nun die Bemessung auf Ermüdung, sind drei verschiedene Verfahren (Bild 33) zu unterscheiden, je nachdem, auf welchem Abschnitt der Ermüdungskurve der Gebrauch des Gerätes stattfinden wird.

5.2 Bemessung gegen Fließen

Im linken Abschnitt, in dem die Ermüdungskurve die Fließgrenze überschreitet, muß die Bemessung nach diesem Wert σ_F erfolgen:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_F$$

Eine Belastung wenig unter der Fließgrenze ertragen Metalle etwa $10^3 \dots 10^4$ -mal, also reicht der linke Abschnitt bis zu dieser Schwingungszahl. Auch

nur eine einmalige Überschreitung der Fließgrenze macht das Objekt unbrauchbar, wenn es nicht gar zerbricht. Das einmalige Erscheinen dieser »Bruchlast« ist zufällig, sein Zeitpunkt ungewiß, daher ist die Dauer der Brauchbarkeit unbestimmt. Von Lebensdauer zu sprechen ist in diesem Bereich sinnlos.

In diesem Abschnitt der Ermüdungskurve ist so zu dimensionieren, daß eine Bruchbeanspruchung nicht auftritt, und eine plastische Formänderung höchstens in so kleinen Bereichen vorkommt, wo sie nur den Abbau der Spannungsspitzen zur Folge hat. Man kann daher hier mit den Methoden der Statik nach der mittleren Spannung bemessen. Die Unsicherheiten der Annahmen sind durch Sicherheitsfaktoren zu decken. Zur Werkstoffersparnis muß man eine möglichst genaue Bestimmung des Kräftespiels anstreben und adäquat kleine Sicherheitsfaktoren verwenden.

5.3 Bemessung gegen Ermüdung

Gegen Ermüdung muß man im rechten, flachen Abschnitt der Ermüdungskurve bemessen. Dieser Abschnitt beginnt bei etwa $N = 2 \cdot 10^6$ Schwingungen und bezieht sich auch auf viele Bauteile von Maschinen (z. B. Kraftfahrzeugen), die für eine ziemlich kurze Lebensdauer bestimmt sind. Das Bemessungsverfahren ist, ebenso wie das vorherige, statisch, jedoch mit zwei sehr wesentlichen Unterschieden:

- es darf nicht mit den mittleren Spannungen gerechnet werden, sondern man muß die durch gründliche Analyse des Systems ermittelten Spannungsspitzen berücksichtigen;

- der Grenzwert der Tragfähigkeit ist durch die Ermüdungsgrenze σ_{erm} gegeben.

Da von einer wirklichen Ermüdungsgrenze nur bei solchen interstitiellen festen Lösungen gesprochen werden kann, wo die eingekeilten Fremdatome nach dem anfänglichen Einordnen das Wandern der Dislokationen hemmen (und nur bei so niedriger Temperatur, wo dies tatsächlich erfolgt), muß die wirksame Ermüdungsgrenze der zur gewünschten Bruchwahrscheinlichkeit P gehörenden Wöhlerkurve entnommen werden. Das ist der Wert S , der zur Lebensdauer N gehört, die erreicht werden soll. Die maßgebende Höchstdauer nimmt man meist zu $N_m = 10^6 \dots 10^7$ Schwingungen an, doch nimmt sie mit der wachsenden technischen Erfahrung ständig zu. Besonders bei Leichtmetallen, deren Ermüdungskurve steiler abfällt, betrachtet man heutzutage schon $N_m = 10^{10}$ Schwingungen als maßgebend. In richtig dimensionierten Gebilden ist eine Beanspruchung über der Ermüdungsgrenze nicht zu erwarten, die ertragbare Schwingungszahl — und damit die Lebensdauer — ist unbegrenzt $N = \infty$, oder zumindest größer, als die maßgebende Schwingungszahl $N \geq N_m$ bzw. die entsprechende Zeit.

5.4 Bemessung auf Lebensdauer

Gegen Ermüdung bemessene Konstruktionen halten auch für kürzere Betriebsdauern als $N = 2 \cdot 10^6$ stand, wie in Bild 33 zu sehen ist. Die nicht gestrichelte Fläche bis zur Ermüdungskurve macht jedoch deutlich, daß auf diese Weise bei Objekten, deren Lebensdauer die zum Knie der Ermüdungskurve gehörige Schwingungszahl nicht erreicht, aus der Begrenzung auf diese niedrige Ermüdungsfestigkeit sich überflüssig große Abmessungen und damit zu schwere, massige Konstruktionen ergeben. Materialersparnis und Wirtschaftlichkeit erfordern in solchen Fällen, daß die Dimensionierung mit der erheblich größeren zulässigen Spannung geschieht, die der vorgesehenen kürzeren Lebensdauer entspricht, und die die Ermüdungsgrenze 2fach, 3fach, ja sogar noch mehr überschreiten kann. Dies nennt man auch Bemessung auf Dauerfestigkeit.

Je nachdem, ob die Schwankung der Belastung bzw. der Beanspruchungen stationär ist, also sich im großen und ganzen gleiche Schwingungsreihen wiederholen, oder die Schwingungen unregelmäßig instationär wechseln, muß man sich verschiedener Verfahren bedienen.

5.4.1 Stationäre Beanspruchung

Eine stationäre oder nahezu stationäre Beanspruchung mit kurzer Lebensdauer ist selten. Kommt so ein Fall vor, so kann man ähnlich vorgehen wie beim Bemessen gegen Ermüdung, nur ist statt der »Ermüdungsgrenze« die zulässige Beanspruchung σ bei der Lebensdauer N von der Ermüdungskurve $\sigma(N)_p$ abzulesen. Fällt der berechnete Wert σ über die Kurve, müssen also für die vorgegebene Lebensdauer die Abmessungen des Gebildes geändert werden, so ist für die Neubemessung eine neue Kurve $\sigma(N)_p$ zu ermitteln und anzuwenden. Mit einem Computer macht auch die mehrmalige Wiederholung der Berechnung keine Schwierigkeiten.

5.4.2 Unregelmäßig wechselnde Beanspruchung

Bei Belastungen, deren Größe unregelmäßig wechselt, muß man eine von den bisher behandelten statischen Verfahren völlig abweichende Bemessungsmethode anwenden. Zur Zeit kann man folgenderweise vorgehen:

a) Man bestimmt das Beanspruchungsbild (»Spektrum«) für die Gebrauchsdauer. Bei Planung und Entwurf kann dies wohl nur durch Messung und Analyse bereits im Gebrauch befindlicher ähnlicher Konstruktionen und der folgerichtigen und kritischen Anwendung der so erhaltenen Ergebnisse erfolgen. Es ist sorgfältig darauf zu achten, daß die Betriebsbedingungen bei der Messung und dem voraussichtlichen Gebrauch des Objektes so weit wie irgend möglich übereinstimmen. Deshalb muß man z. B. bei Fahrzeugen von Mes-

sungen auf besonderen Prüf Strecken, oder auf Probefahrten mit künstlichen Lasten, oder mit Fahrzeugen außerhalb des planmäßigen Dienstes nach Möglichkeit absehen.

Ist das Gerät für den Dienst unter verschiedenartigen Umweltbedingungen bestimmt, so muß die maßgebende Ermüdungskurve aus den abweichenden Belastungsbildern nach sorgfältiger Überlegung kombiniert werden. Die Länge der Datenaufnahme ist so zu bestimmen, daß die Datenzahl statistisch ausreichend ist und sich auf alle voraussichtlichen Betriebsbedingungen erstreckt. Ein so gemessenes und umgerechnetes Belastungsbild ist links in Bild 34 halblogarithmisch dargestellt.

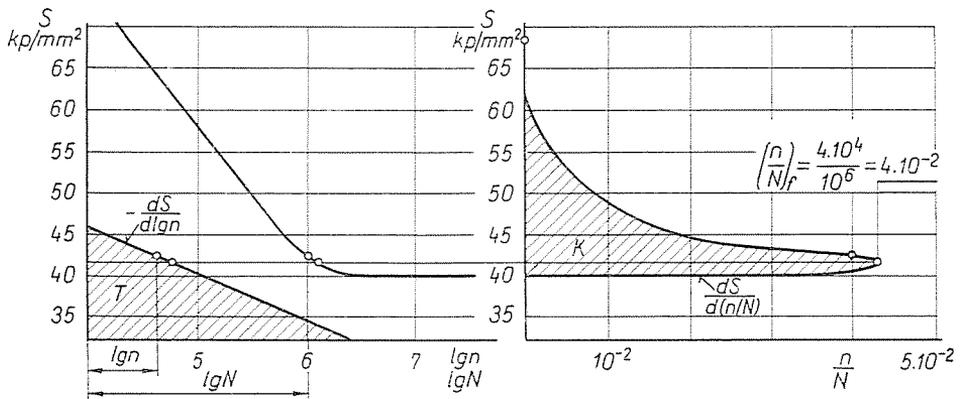


Abb. 34

Da sich die Konstruktionen im allgemeinen nicht sprungartig entwickeln, kann man einmal aufgenommene Belastungsbilder wiederholt und während längerer Zeit zur Bemessung von Systemen benutzen, die für einen ähnlichen Betrieb bestimmt sind. Es wäre daher außerordentlich wichtig, möglichst viele Belastungsbilder aufzunehmen und unter genauer Angabe der Betriebsumstände in Kataloge zu sammeln.

b) Die Versuche zur Ausarbeitung der stochastischen Dynamik des inneren Kräftespiels waren bisher mehr auf die Bestimmung der Schwingeigenschaften gerichtet, als auf die Verfolgung der Ausbreitung und Dämpfung der inneren Kräfte. Am zuverlässigsten erscheint zur Zeit die Messung der Beanspruchungsbilder der wichtigsten Elemente, was selbstverständlich nur an fertigen Maschinen und Tragsystemen während ihres Betriebes geschehen kann. Zur Ausarbeitung von den vorhandenen stark abweichender Gebilde muß man sich daher zunächst mit statischen Verfahren begnügen, ergänzt mit der Untersuchung etwaiger Stellen, wo die Art des Kraftverlaufes durch einen neuartigen Aufbau geändert wird. Außerdem muß auch die dynamische Wirkung der zwischengeschalteten Glieder mit besonders großer Elastizität

und Dämpfung — Federn, Dämpfer — berücksichtigt werden, wie dies bei Festigkeitsrechnungen auch sonst üblich ist. Leider sind die Ergebnisse der Berechnung und späterer Messungen an den fertigen Bauwerken oft recht verschieden.

Bei redundanten — statisch unbestimmten — Strukturen muß man außerdem auch das Kräftespiel untersuchen, das sich nach Ausfall mehrerer überzähliger Glieder einstellt, damit ein Zusammenbruch als Kettenreaktion vermieden wird. Bei der Aufstellung von Computerprogrammen (»software«) ist die Möglichkeit entsprechender Iterationen von vornherein vorzusehen.

c) Die Bestimmung der Ermüdungsfähigkeit beruht gewöhnlich auf Ermüdungs-(Wöhler-)Kurven, die mit glatten Probestäben bei gleichartiger Beanspruchung aufgenommen sind. Es ist dann jede Abweichung von Prüfkörper und Konstruktionsteil sowie von Versuchs- und Betriebsverhältnissen, die die Ermüdung beeinflussen könnten, sorgfältig in Rechnung zu setzen. Da eine solche Untersuchung bei sorgfältiger und gründlicher Durchführung viel recht mühevoller Arbeit erfordern kann, lohnt es sich meist aufgrund von Erfahrung und Anschauung die Bereiche der Konstruktion auszuwählen, wo das Verhältnis von Ermüdungs- und statischer Festigkeit voraussichtlich besonders klein ist, und die Aufmerksamkeit auf diese zu konzentrieren. Durch statistische Summierung der Einflußfaktoren erhält man dann die Vielfachen, mit denen die zur erwünschten Bruch- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit P bzw. $1 - P$ gehörigen Ermüdungsdaten des Prüfkörpers auf die untersuchte Stelle der Konstruktion umgerechnet werden können. Da diese Vielfachen meist von Ort zu Ort verschieden sind, erhält man für die einzelnen Bereiche abweichende Ermüdungskurven, auch wenn der Werkstoff der selbe ist.

Infolge der Kerbwirkung der größeren Oberfläche ist der zur Dauerfestigkeit gehörige Abschnitt der Wöhlerkurve eines Fabrikproduktes stets wesentlich steiler, als beim Prüfkörper. Daher ist die Lebensdauer der Produkte günstigerweise einheitlicher als die von Probestäben.

5.5 Bemessung nach Versuchsergebnissen

Die Dimensionierung der kritischen Bereiche von Konstruktionen an Hand der Ergebnisse von Ermüdungsversuchen liefert viel zuverlässigere Resultate als die behandelten Berechnungsverfahren. Es sind zwei Methoden möglich:

5.5.1 Unmittelbarer Versuch

Die gesuchte Lebensdauer ergibt sich unmittelbar, wenn man Versuche mit einem wirklichkeitstretreuen Beanspruchungsbild (»Lastspektrum«) durchführt. Gegebenenfalls werden so mit wenig Versuchen die zuverlässigsten

Angaben erhalten; dies hängt nur davon ab, wie weit es gelingt bei der Herstellung der Probestücke die Produktionstechnologie, und mit der Belastung die zu erwartenden Betriebsumstände nachzubilden. Die Ergebnisse geben aber nur für den untersuchten Fall eine zuverlässige Auskunft und man muß sie selbst bei unveränderten Gebilden wiederholen, wenn sich die Technologie oder die Betriebsverhältnisse ändern. Der unmittelbare Versuch ist dann zu empfehlen, wenn die Ausbildung des Produktes genügend ausgereift ist, grundsätzliche Änderungen nicht mehr zu erwarten sind, und eine Herstellung in größerer Serie bevorsteht.

5.5.2 Mittelbarer Versuch

Bei dieser Methode ist zunächst der in Betracht kommende Abschnitt des Ermüdungs-(Wöhler-)Feldes vom kritischen Abschnitt des Gerätes aufzunehmen. Hierzu sind die entsprechenden Bauteile auf mehreren Beanspruchungsniveaus stationären Belastungen zu unterwerfen. Den statistischen Erfordernissen entsprechend ist eine genügend große Anzahl von Prüfkörpern zu ermüden. Zur Kostenherabsetzung ist also nicht diese Anzahl zu verkleinern, sondern die Konstruktion zu vereinfachen und ihr Anwendungsbereich durch Vereinheitlichung und letzten Endes Normung von Teilen ähnlicher Bestimmung auszudehnen. Die Versuchsergebnisse sind dann nur an die Technologie gebunden, umfassen jedoch die Betriebsbedingungen, Änderungen des Belastungsbildes, und sind daher wiederholt anwendbar und zur Zusammenstellung von Konstruktionshilfen geeignet.

5.5.3 Auswertung des mittelbaren Versuchs

Die Summierung der Wirkungen der verschiedenen Belastungsniveaus, die das Lastbild enthält, ist zur Zeit — mangels eines Besseren — nur linear, mit der Palmgren-Miner-Regel möglich. Dazu stellt man das Lastbild und die zur gewünschten Überlebenswahrscheinlichkeit L gehörige Ermüdungskurve des Objektes im gleichen Diagramm dar (Bild 34 links). Hier kann auf jedem Lastniveau waagrecht die Schwingungszahl N abgelesen werden, deren Erreichen mit der Wahrscheinlichkeit L zu erwarten ist, ferner beim Lastbild die Häufigkeit n des Erreichens dieses Niveaus während der Zeit T_0 der Lastbildaufnahme. So kann die relative Schädigung n/N nach der Regel von Palmgren-Miner Niveau für Niveau berechnet werden. Diese Werte ergeben (Bild 34 rechts) die Kurve der Schadensintensität

$$\frac{dK}{d\sigma} = \frac{n}{N}(\sigma)$$

als Funktion der Beanspruchung σ . Die Fläche zwischen dieser Kurve und der

Abszisse

$$K = \int_{(\sigma)} dK = \int_{(\sigma)} \frac{n}{N} d\sigma$$

ergibt die Gesamtschädigung während der Aufnahmezeit T_0 . Multipliziert man T_0 mit dem Reziprokwert $1/K$, so erhält man die Lebensdauer T mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit

$$T = T_0 \frac{1}{K}$$

Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß die Schadensintensität um das zu seinem Modus gehörige Spannungsniveau nur eine geringe Streuung aufweist. Die Lebensdauer T kann deshalb angenähert mit dem Wert der Schadensintensität berechnet werden, der zur Höhe des Modus gehört. Angesichts der gegebenen Unbestimmtheiten ist diese Näherung bewußt angewendet völlig ausreichend. Die verbliebenen Unsicherheiten sind mit Sicherheitsfaktoren zu decken.

Es darf beim beschriebenen Verfahren nicht außer acht bleiben, daß die Lebensdauer ein stochastischer Begriff ist, d. h. daß bei einem aus mehreren Teilen zusammengesetzten Gerät deren Lebensdauer mehr oder weniger streut. Wegen der Überdeckung der Streufelder ist das Heraussuchen des kritischen Bestandteils nicht eindeutig möglich. Es kann vorkommen, daß mal der eine, mal der andere Teil zuerst bricht. Diese Unbestimmtheit ist umso häufiger, je weniger die Lebenserwartung der verschiedenen Teile von einander abweicht. Bei gleicher Lebensdauer, wenn die Dauerhaftigkeit aller Elemente die gleiche ist, ist es gleichgültig welches zuerst ausfällt. Wenn dagegen die Lebensdauer eines bestimmten Teils im Verhältnis besonders kurz ist, kann zurecht angenommen werden, daß dieses zuerst unbrauchbar wird, seine Lebensdauer also zugleich auch diejenige des ganzen Gerätes ist. Kommt keines dieser Extreme vor, muß neben dem Erwartungswert der Lebensdauer der Teile auch ihre Streuung ermittelt werden. Zu diesem Zweck wird die Berechnung mit mehreren Ermüdungskurven, die verschiedenen Überlebenswahrscheinlichkeiten entsprechen, wiederholt. Die Lebensdauer des Gerätes ergibt sich aus den erhaltenen Verteilungen nach der Reihen- oder parallelen Schaltung der Unterteile, dem statisch bestimmten oder unbestimmten Aufbau der Konstruktion.

5.5.4 Der Versuchsaufwand

Wegen des stochastischen Charakters der Ermüdung sind selbst für die brauchbare versuchsmäßige Bestimmung des Erwartungswertes der Lebensdauer allein — für Vergleichszwecke ist dies meist ausreichend — mindestens 6 bis 8 Probestücke erforderlich. Wünscht man auch die Streuung dieses

Wertes zu ermitteln, sind bereits dreimal so viel Proben notwendig. Dies gilt für solche Versuche, deren Ergebnis eindeutig ist, der Bruch immer am selben kritischen Unterteil erfolgt. Erscheint der Riß zufallsartig mal hier, mal dort, so sind entsprechend mehr Stücke zu prüfen. Die meisten Maschinen und Bauwerke, so auch Fahrzeuge, sind jedoch so zusammengesetzte und teure Gebilde, daß nicht mehrere Exemplare für eine solche Versuchsreihe geopfert werden können. Komplette Produkte stehen für derartige Zwecke nur ausnahmsweise in genügender Anzahl zur Verfügung, höchstens mal ausgemusterte Stücke zur nachträglichen Überprüfung.

Der Aufwand kann etwas gemindert werden, wenn man das System zerlegt, bauteilweise untersucht; hauptsächlich, wenn von gleichen Elementen bereits frühere Meßergebnisse oder gesammelte Literaturangaben zur Verfügung stehen, die man dem Aufbau des Fabrikats entsprechend statistisch auswerten kann.

Günstige Umstände können — ähnlich wie bei statischen Versuchen — mehrere Messungen am selben Exemplar ermöglichen. Da aber jeder Ermüdungsversuch wohl mit einem Bruch endet, wird dies nur selten der Fall sein, z. B. wenn die Bruchstelle ohne für den weiteren Versuch verzerrende Folgen repariert werden kann, oder der gebrochene Unterteil gleichwertig auswechselbar ist. Ein solcher Eingriff hat aber meist eine Verstärkung der Bruchstelle zur Folge, so daß der nächste Bruch aller Wahrscheinlichkeit nach anderswo, an der nächstschwächsten Stelle erfolgt. Deshalb können an ein bis zwei Exemplaren nur nach einander die schwachen Stellen des Objektes abgetastet werden, um diese nacheinander beseitigen zu können. Zwecks Verstärkung solcher schwacher Stellen oder Teile genügt es dann, diese notfalls getrennt zu untersuchen, was mit relativ geringen Kosten schon in genügender Zahl möglich ist.

Ein derartiges Vorgehen kann dann über die Dauerhaftigkeit zusammengesetzter Konstruktionen eine ganz gute Orientierung verschaffen. Die ersten Risse erscheinen nämlich naturgemäß dort, wo die Spannungen am größten, die Streuung der Lebensdauer aber glücklicherweise am geringsten ist. Die Gefahr, aus einem einzelnen Meßwert auf eine übermäßig große, nur ausnahmsweise erreichbare Lebensdauer zu schließen, ist also relativ klein. Nach Hemmung des Rißfortschrittes oder Ausbesserung erscheinen die weiteren Risse bei der Fortsetzung des Versuches auf immer niedrigeren Spannungsniveaus, mit größer werdender Streuung, die Folgerungen auf die Lebensdauer werden daher immer unsicherer.

Wenn es *nicht* um die *Ermittlung* der Lebensdauer geht, sondern nur um das Bestätigen stark streuender Schätzungen oder Berechnungen mit ihren vielen Ungewisheiten, können bereits Versuche mit ein bis zwei Probekörpern — kritisch aufgearbeitet — brauchbare Hinweise geben.

5.5.5 Das Versuchsprogramm

Das Gesagte gilt natürlich dann, wenn man den Ermüdungsversuch mit der erforderlichen großen Sorgfalt, entsprechend dem Spiel der zu erwartenden Belastungen, somit — da die Gesetzmäßigkeiten der Schadensakkumulation noch nicht hinreichend bekannt sind — im allgemeinen nach einem Programm, das den Betriebsumständen möglichst treu entspricht, durchführt. Die Wirtschaftlichkeit erfordert dabei die Verdichtung der Lebensdauer des Probestückes auf eine möglichst kurze Zeit.

In erster Reihe erfordert die Abbildung der Belastungen große Aufmerksamkeit. Es gibt hierfür vier Methoden:

a) die Steuerung der Ermüdungsprüfmaschine (des Pulsators) unmittelbar mit einem im Betrieb aufgenommenen Oszillogramm (z. B. Bild 5) oder einem längeren Abschnitt davon;

b) das rein zufallsmäßige Mischen der Reihenfolge der Amplituden des Histogramms (Bild 35.a);

c) die Wiederholung dem Histogramm ähnlicher, durch proportionales Verkleinern der Häufigkeiten gewonnener Lastblöcke (Bild 35. b und c; Betriebsfestigkeitsprüfung [46] nach *Gaßner*);

d) das Vereinigen der beiden letzten Methoden, d. h. das zufallsmäßige Mischen der Stufen der nach c) gewonnenen Blöcke (Bild 35. d; Methode von *HELLER* [47]).

Zur Anwendung aller vier Methoden sind programmgesteuerte Pulsatoren nötig. Die ersten zwei Verfahren enthalten große Lastsprünge, denen die meisten Pulsatoren nicht ohne Verzögerung folgen können. Zu den drei letzten Methoden müssen die Amplituden nach ihrer Größe in Gruppen geordnet werden, wobei sehr darauf zu achten ist, daß weder die selten vorkommenden

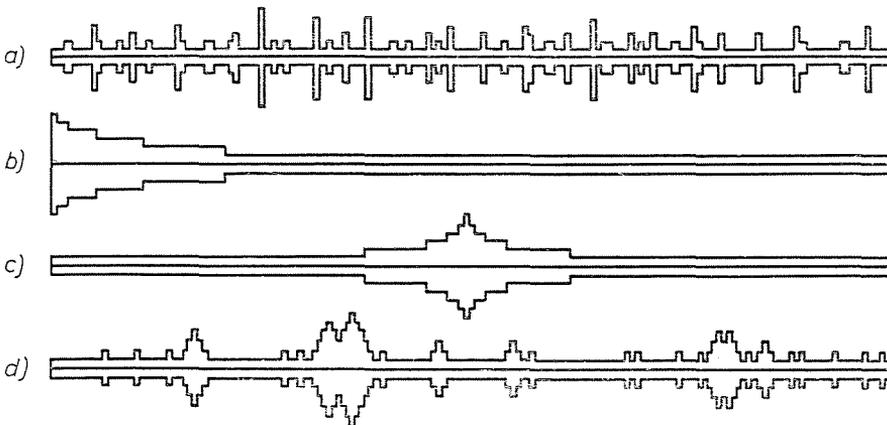


Abb. 35

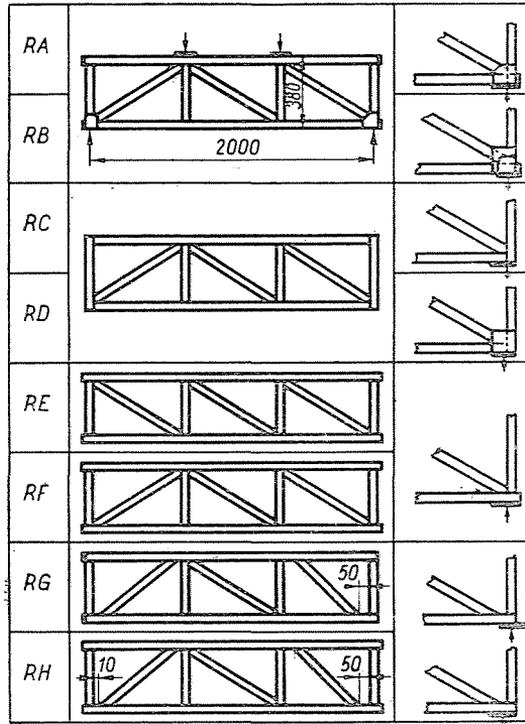


Abb. 36

sehr großen Lasten fortbleiben, noch die kleinen (etwa über der Hälfte der Ermüdungsgrenze). Die Wirkung keiner der beiden Arten ist zu vernachlässigen.

Alle diese Methoden verwandeln die ursprünglich zufallartigen Lastspiele in mehr oder minder zyklische; bei der dritten bildet jeweils ein Block, bei der zweiten die Gruppe sich wiederholender gemischter Amplituden des Zykluses. Selbst bei der ersten Methode reicht das Oszillogramm meist nicht bis zum Bruch und muß wiederholt abgespielt werden; seine Länge bildet also den Zyklus. Es hängt von den konkreten Umständen ab, welches Ergebnis die Wirklichkeit am besten annähert.

Bei größeren Bauteilen, z. B. Querträgern von Autobussen (Bild 36), bringt ein solches Verfahren (wenn man die Fehler inzwischen ausbessert) die gegen Ermüdung schwachen Stellen der Konstruktion nach einander an den Tag und ist ein wirksames Mittel der Fortentwicklung des Bauteils.

5.6 Konstruktionsgrundsätze

Aufgrund der bisherigen Ausführungen können einige Grundsätze für die Ausbildung der Konstruktion auch von jedem Versuch unabhängig festgelegt werden.

Den Technikern und Ingenieuren ist schon lange bekannt, daß bei der Ausbildung von Maschinen, Geräten und ihren Unterteilen im Interesse der Ermüdbarkeit das Auftreten von Spannungsspitzen möglichst ganz zu vermeiden ist. Während die Eignung, die Leistung und die Zeitgemäßheit der Maschinen in der Hand des Hauptkonstruktors liegt, wird deren Lebensdauer hauptsächlich von den Detailkonstruktoren entschieden. Heutzutage findet man auch an recht sorgfältig konstruierten Geräten noch zahlreiche Stellen der Spannungskonzentration, und es bleiben auch nach der diesbezüglichen Fortentwicklung der Prototypen meist noch genug davon übrig. Die erste Forderung ist daher das beträchtliche Heben des Niveaus der Detailkonstruktion.

Natürlich kann auch die Wirkung nicht vernachlässigt werden, die die technologischen Vorschriften der Fertigung und ihre genaue Einhaltung auf die Lebensdauer der Produkte ausüben. Hier ist Nachlässigkeit umso gefährlicher, weil der Ausschuß, der die Brauchbarkeit und Festigkeit beeinträchtigt, meist rasch genug auffällt, während die Verkürzung der Lebensdauer erst viel später große Sorgen macht. Während der Herstellung muß daher jede Beschädigung der Teiloberfläche vermieden werden, bei der Montage sind schädliche Vorspannungen zu vermeiden, und es sind alle Maßnahmen zur Verhütung von Korrosion zu treffen, besonders in den Fugen sich berührender Teile.

Die Vorbedingungen sorgfältiger Kontrolle sind durch gute Zugänglichkeit bereits bei der Konstruktion zu sichern. Wo eine Gewichtserhöhung unbedingt auszuschließen ist, z. B. bei Luftfahrzeugen, ist (durch konstruktive Maßnahmen) dafür zu sorgen, daß sich die Folgen eines trotz größter Sorgfalt bei der Behandlung doch entstandenen Bruches nicht katastrophal ausbreiten können. Zu diesem Ziel führen zwei Wege.

5.6.1 Gesicherte Lebensdauer (*»Safe Life«*)

Die untere Grenze des Streufeldes der Lebensdauerkurve umschließt ein Gebiet, in dem das Auftreten eines Bruches kaum zu erwarten ist. Wenn diese untere Grenze nur bis auf einem Sicherheitsabstand angenähert wird — dies heißt englisch *»Safe-Life«*-Konstruktion —, so kann bei gut organisiertem Betrieb gründlich kontrollierter Maschinen zuverlässig mit dem Erreichen der vorgesehenen Lebensdauer gerechnet werden. Die Ursache etwaiger trotzdem vorkommender Unfälle ist dann kein Konstruktionsmangel mehr, sondern ein Betriebsfehler oder ein anderer unvorhergesehener Notstand.

Es ist natürlich zu beachten, daß der Betrieb eines solchen empfindlichen Gerätes unter der Lenkung und Aufsicht von Menschen vor sich geht. Je seltener sich Schadensfälle ereignen, umso sorgfältiger müssen Wartung und Instandhaltung, und umso gewissenhafter insbesondere die Aufsicht sein, um die auftretenden Fehler trotz ihrer Seltenheit zu entdecken. Es müssen besonders auch etwaige unvorhergesehene Änderungen der Betriebsumstände aufmerksam wahrgenommen werden. Die Lebensdauer ist so stark abhängig von einer systematischen und sorgfältigen Kontrolle.

5.6.2 Rißunempfindlichkeit (»Fail-Safe«)

Der zweite Weg ist eine gegen das Auftreten von Rissen unempfindliche Konstruktion, gekennzeichnet durch folgende Maßnahmen:

a) Redundanz des Aufbaus. Die Verdoppelung eines Teiles oder Elementes der Konstruktion kann die Gefahr seines Ausfalles praktisch beseitigen, wenn von beiden jeweils nur einer wirksam ist und beim Versagen dessen Funktion vom anderen automatisch übernommen wird. Auf Flugzeugen ist z. B. ein dritter Pilot nicht nötig, da der zweite die Gefahr des Ausfalles des Flugzeugführers — wenigstens bis zur nächsten Zwischenlandung — vollständig aufhebt. Den Forderungen des Leichtbaus könnte aber ein Tragwerk nicht mehr entsprechen, wo man jedes Element zur Sicherheit mit einem überzähligen vollwertigen Ersatz als Reserve verdoppeln würde. Die Reserve ist daher auf das Notwendigste zu beschränken. Hierfür muß man das Kräftespiel der Konstruktion gründlich analysieren und sie so bemessen, daß die Gefahr einer Kettenreaktion ausgeschlossen ist. So entsteht eine statisch hochgradig unbestimmte Konstruktion.

b) Ausbildung des Bereichs der bruchgefährdeten Stellen in der Weise, daß das Fortschreiten eines evtl. Risses in Richtung auf einen gut sichtbaren Bereich erfolgt, wo der Riß bei der nächsten Kontrolle leicht auffällt. Die anderen Richtungen müssen blockiert werden.

c) Die Richtung der Risse soll in Bereiche geringerer Spannung weisen, wo sie möglichst von selbst aufhören. Solche Bereiche sind nötigenfalls auch durch Hindernisse zu schaffen.

Je größer und komplizierter die Konstruktion ist, umso mehr schwer kontrollierbare Stellen gibt es, und umso schwieriger ist die Erfüllung der Regeln b und c. Auch zugängliche Risse sind oft schwer zu finden und erfordern viel Sorgfalt und Aufmerksamkeit. Nur gründlich ausgebildete und erfahrene Prüfer vermögen zu entscheiden, ob ein entdeckter Riß gefährlich oder vielleicht ruhend und ungefährlich ist. Sicherer ist es das Schlimmere anzunehmen.

Ein Rißunempfindliches Gebilde kann im Betrieb mehr als eine Lastspitze ertragen. Eine wirkliche Gefahr entsteht nur, wenn eine — im Betrieb seltene — Spitzenlast mit dem ebenfalls seltenen Fall zusammentrifft, daß das

Gebilde bereits gefährlich ermüdet ist, also nach längerem Betrieb. Bekanntlich ist die Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammentreffens um eine Größenordnung kleiner, als die der zusammentreffenden Ereignisse für sich. Eine rißunempfindliche Konstruktion ist daher viel wirtschaftlicher, als eine mit gesicherter Lebensdauer. Freilich enthält jedes wirtschaftliche rißunempfindliche Gebilde auch zahlreiche Elemente von gesicherter Lebensdauer, z. B. Verbindungselemente, bei denen eine Vervielfältigung ihrer Zahl aus funktionellen, wirtschaftlichen, Kontroll- oder sonstigen Gründen nicht angebracht ist.

6. Lebensdauer und Sicherheit

Die Lebensdauer von Maschinen und Tragsystemen ist nach den vorhergehenden Ausführungen eine stochastische Veränderliche, die nur mit einer Verteilungsfunktion und nicht mit einem Zahlenwert beschrieben werden kann. Das Überleben einer Lebensdauer kann mit voller (100%) Gewißheit nicht angegeben werden. Innerhalb einer gewünschten Lebensdauer kann die Wahrscheinlichkeit einer Schädigung beliebig vermindert, aber nicht vollständig ausgeschlossen werden. Dies wird durch die Erfahrung in vollem Maße bestätigt, da selbst bei den am stärksten bemessenen Konstruktionen ein Bruch oder Einsturz — zwar selten, aber doch — vorkommt. Es entsteht so das Problem, wie weit man im gegebenen Falle die Gefahr des Zusammenbruches beschränken muß, d. h. die Frage der Sicherheit eines Bauwerkes.

Bei statischer Dimensionierung versteht man unter Sicherheit das Verhältnis der Tragfähigkeit R zur Belastung S :

$$\nu = \frac{R}{S} = \frac{R - S}{S} + 1 > 1$$

ν — der »Sicherheitsfaktor« — ist gemeinhin ein Zahlenwert, da die verglichenen Werte gegeben und als konstant vorausgesetzt sind. Dieser Faktor zeigt, eine wievielmals größere Last als berechnet das Objekt bis zum Einsturz ertragen könnte, bzw. eine wievielmals kleinere Tragfähigkeit bereits ausreichend wäre. Auf diese Art vermag der »Sicherheitsfaktor« bis zur Grenze seines Wertes die Unsicherheiten der Kenntnis von Belastung und Tragfähigkeit zu decken, sagt aber über die tatsächliche Sicherheit des Gegenstandes nichts aus, da er die unvermeidliche Streuung der Werte R , S außer Acht läßt. Auf diese Weise erscheint jedes statische System gleich sicher, dessen »Sicherheitsfaktor« größer als $\nu = 1$ ist. Ein kleinerer Faktor ist bekanntlich unzulässig.

Bei der Dimensionierung gegen dynamische Beanspruchungen macht die Vermengung ruhender und wechselnder Inanspruchnahmen eine derartige

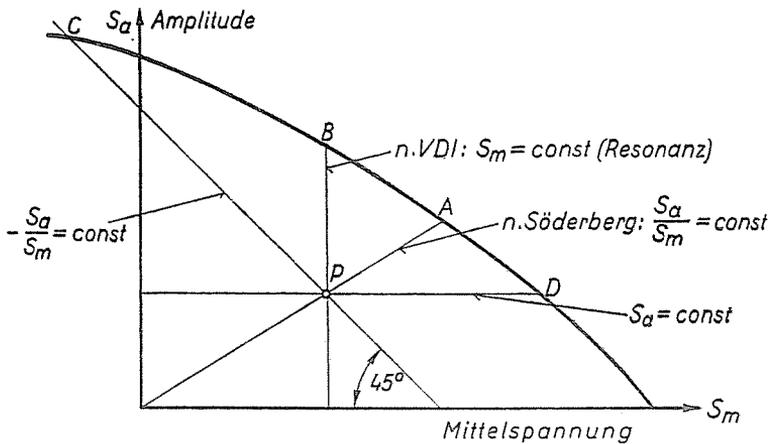


Abb. 37

lineare Deutung der Sicherheit an sich schon zweifelhaft. Stellt man den Mittelwert der Tragfähigkeit einer Konstruktion im Haigh-Diagramm dar (Bild 37), so kann die maßgebende Beanspruchung S dort eingetragen werden. Legt man durch diesen Punkt eine Gerade, so ergibt das Verhältnis der Strecken vom Ruhezustand bis zur Tragfähigkeitskurve bzw. bis zum Punkt S den Sicherheitsfaktor ν . Nun können in das Diagramm mehrere Geraden eingezeichnet werden, je nachdem, was man als Ruhezustand annimmt, und entsprechend der Form der Tragfähigkeitskurve läßt sich im allgemeinen von jeder ein anderer Wert für den Sicherheitsfaktor ablesen. Dieser Wert wird u. a. von der Grundbeanspruchung durch das Eigengewicht, die zurückgebliebenen inneren Spannungen, eine innere Verspannung usw. beeinflußt. Die dynamische Sicherheit ist demnach nicht eindeutig, ihr Wert hängt von Art und Vermengung der Beanspruchungskomponenten ab.

Jedoch selbst dann, wenn man solche Störungen eliminiert, etwa die Unbestimmtheit durch eindeutige Definition des Sicherheitsbegriffes ausschaltet, verbleibt die erfahrungsmäßige Tatsache, daß die Sicherheit gleicher Strukturen nicht gleich ist. Die gleichen Strukturen bilden einen statistischen Haufen, mit jeweils abweichenden Betriebsumständen und Eigenschaften; die Größe ihrer Sicherheit hat auch eine Streuung.

Für die Ermüdung sind von den Betriebsumständen die Belastung $S(n)$, von den Eigenschaften die Tragfähigkeit $R(n)$ maßgebend. Beide sind Wahrscheinlichkeitsveränderliche und Funktionen der Dienstzeit (Bild 38), wir haben sie mit Andeutung ihrer Streufelder dargestellt. Die Abnahme der Tragfähigkeit ist erst nach dem Erscheinen von Rissen wahrnehmbar, einfachheitshalber ist sie stetig dargestellt. Die Größe der zu erwartenden Höchstlast nimmt dagegen im Verlauf der Dienstzeit zu (s. unter 4.2). Die Kreuzung der Streufelder ist eine schiefe viereckige Fläche, deren Länge in Abszissen-

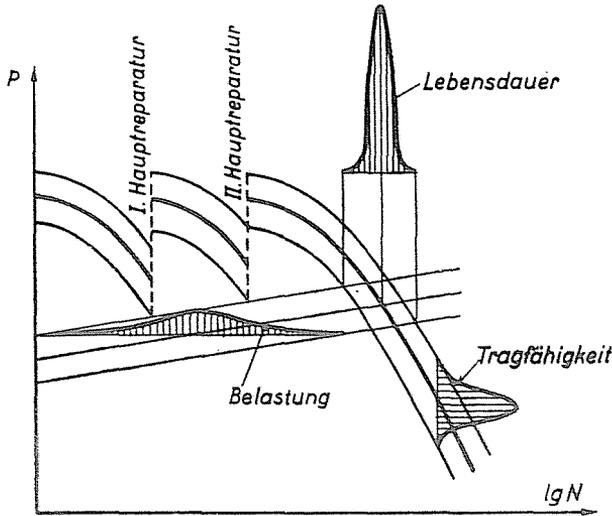


Abb. 38

richtung der Streuung der Lebensdauer entspricht. Diese ist umso größer, je größer die Streuung der Belastung bzw. der Tragfähigkeit für sich und je flacher die Kreuzung der beiden Kurven ist.

Die Belastung hängt von den Dienst- (Betriebs-) umständen ab, die der Entwerfer und Konstrukteur recht wenig beeinflussen können. Daher hängt die untere Grenze der Lebensdauer — neben ihrem Erwartungswert — hauptsächlich von der Breite des Streufeldes und der Steilheit der Abnahme der Tragfähigkeit ab. Dies zeigt den entscheidenden Einfluß der Güte der Konstruktion. Es ist anzustreben, daß neben einer genügenden Größe der Tragfähigkeit deren Streuung möglichst klein und ihr Abfall am Ende möglichst steil sei. Dies ist dann zu erreichen, wenn die Streuung der Festigkeit der Unterteile möglichst klein und ihre Lebensdauer möglichst gleich ist, die Tragfähigkeit der Konstruktion also nach Ablauf der vorhergesehenen Dienstzeit schnell endet. Mit anderen Worten sollen solche Strukturen möglichst gleicher Festigkeit hergestellt werden, bei denen die untere Begrenzung (Quantil) des Streufeldes der Tragfähigkeit die obere Begrenzung (Quantil) des Streufeldes der Belastung gerade bei der festgesetzten Lebensdauer kreuzt. Die Werte der beiden Quantile sind so festzulegen, daß ihr Produkt eine kleinere Bruchwahrscheinlichkeit ergibt, als von der Konstruktion aus Gründen der Wirtschaftlichkeit oder der persönlichen Sicherheit gefordert wird.

Diese kleine Bruchwahrscheinlichkeit ist das Risiko

$$R = \int_0^T r(n) dr = 1 - \nu$$

(vgl. unter 5.1), in dem sich Projektierung, Konstruktion und Herstellung teilen müssen. Der Anteil der Produktion ist meist aus der Erfahrung mit früheren Produkten bekannt, oder er läßt sich verhältnismäßig leicht bestimmen. Schwierigkeiten ergeben sich meist bei der Festlegung des Maßes der unvermeidlichen Verantwortung des Konstrukteurs, da die Verminderung des Risikos mit einem stetigen Steigen der Produktionskosten verbunden ist, und daher nicht willkürlich erfolgen kann.

Ist die drohende Schädigung rein materieller Art, so ist die Lösung ziemlich einfach: deren Größe kann berechnet und ins Verhältnis gesetzt werden zu den Kosten der Änderungen, die zu ihrer Verzögerung oder Vermeidung erforderlich sind.

Hart wird das Problem dann, wenn das materielle Risiko mit Gefahr für Personen verbunden ist. Die Gesundheit, und noch mehr das Leben von Menschen lassen sich mit materiellen Werten nicht messen. Daher ist mit sonstigen, wohlbegründeten Überlegungen der Wert der Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit dem man das evtl. Vorkommen persönlicher Unfälle notgedrungen in Rechnung stellen muß. Da diese Wahrscheinlichkeit naturgemäß außerordentlich klein ist, handelt es sich dabei nicht um eine Massenerscheinung, das Gesetz der großen Zahlen und die meisten üblichen statistischen Definitionen sind hier nicht gültig. Zum Vergleich unterschiedlicher Konstruktionen und ihres Verhaltens bei verschiedenen Lastbildern ist jedoch das Verhältnis der bezüglichen kleinen Wahrscheinlichkeiten recht geeignet.

Erreicht das untersuchte Gebilde die Grenze seiner nach den obigen Ausführungen bestimmten Lebensdauer, so kann es mit ruhigem Gewissen ausgemustert und abgewrackt werden, selbst wenn noch kein sichtbares Zeichen auf seine baldige Dienstuntauglichkeit hindeutet. Zahlreiche Dienstvorschriften enthalten schon jetzt diesbezügliche Bestimmungen, obwohl die Lebensdauer noch meist nur nach Erfahrung durch Schätzung festgelegt wird.

Die Einfachheit der in der technischen Praxis üblichen Bemessungsverfahren wird bei der Dimensionierung für Lebensdauer keineswegs erreicht. Die Einführung statistischer Funktionen in die herkömmlichen — »deterministischen« — Verfahren ist nicht möglich. Einen wichtigen Schritt zur Anwendung statistischer Methoden stellt die *Dimensionierung für den Grenzstand* dar, die dem statisch üblichen Verfahren nahesteht, jedoch den Sicherheitsfaktor in mehrere verschiedenartige Komponenten auflöst

$$\sum nS = m \Phi(k_1 R_1, k_2 R_2, \dots)$$

wo S der Grenzstand ist, und die rechte Seite die gewichteten Faktoren der Tragfähigkeit und den für die Funktion des Gebildes bezeichnenden Faktor m enthält. Die Faktoren n und k_i werden aufgrund gesammelter Erfahrungen über die statistischen Schwankungen der einzelnen Komponenten bestimmt.

Zusammenfassung

Der zweite Teil behandelt zunächst die Belastungsanalyse und die Anwendung ihrer Ergebnisse auf ein gegebenes Bauelement, sodann die Dimensionierung selbst in ihren Hauptarten sowie die praktische Bekräftigung der Ergebnisse durch Versuche. Schließlich werden Konstruktionsgrundsätze beschrieben und der Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Sicherheit behandelt.

Der Aufsatz bezweckt die klare Herausarbeitung der grundsätzlichen Zusammenhänge. Für Zahlenwerte wird auf die zeitgemäße Literatur verwiesen.

Literatur

35. SJÖSTRÖM, S.: Handl. K. Tekn. Högsk. No 181 (1961)
36. SCHIJVE, J.: (BARROIS-RIPLEY ed.): Fatigue of Aircr. Structr. Oxford 115. 1963.
37. Inst. f. Leichtbau: Wohlerlinien-Katalog, Dresden seit 1964.
38. Royal Aeronautical Society: Data Sheets on Fatigue: London.
39. NEUMANN, A.: Schweißtechn. Handb. f. Konstr., Berlin, 1965.
40. MUNSE, W. H.: Fat. of Welded Steel Struct. New York 1964.
41. GURNEY, T. R.: Fatigue of Welded Struct. Cambridge 1968.
42. FREUDENTHAL A. M.: Acta Tech. Hung. XXXV—XXXVI 55—81 (1961).
43. v. MISES, R.: ZAMM 8 161 (1928)
44. SINES, G.: NACA TN 3495 (1955) (S. auch: Sines — Waismann: Metal Fatigue, New York 1959)
45. LIN, Y. K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics. New York, 1967.
46. GASSNER, E.: Konstruktion 6 No. 3. 97. (1954).
47. HELLER, R. A.—FREUDENTHAL, A. M.: Proc. III. Congr. on Mat. Testing, Budapest 1964, Vol. I. p. 47—59.
- HELLER, R. A.—SHINOZUKA, M.: Technometrics (USA) 8 (1966).

Prof. em. Dr. Guido RUDNAI, 1027 Budapest, Bem rkp. 30. Ungarn