AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN MECHANISCHER SCHWINGUNGSSYSTEME MIT ENDLICHEN FREIHEITSGRADEN UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DES PROBLEMS DER FAHRZEUGSCHWINGUNGEN

Von

M. FERENCZI

Lehrstuhl für Eisenbahnfahrzeuge, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 30. Juni 1975.

Vorgelegt von Prof. Dr. K. HORVÁTH

I. Einleitung

Die dynamische Entwicklung des Straßen- und Schienenverkehrs brachte eine Steigerung der an die Fahrzeuge gestellten Forderungen mit sich. Einerseits müssen durch die Fahrzeuge herkömmliche Anforderungen — wie z. B. Lebensdauer, Sicherheit, Wirtschaftlichkeit, Reisekomfort, günstige fahrdynamische Eigenschaften usw. — hochgradig erfüllt werden, andererseits müssen sie auch hinsichtlich verhältnismäßig neuer Forderungen — wie z. B. die Überlastung des Massenverkehrs, außerordentliche Beanspruchungen infolge Aufbrechens der Straßendecken, wachsende Geschwindigkeiten auf traditionellen Eisenbahnstrecken, Mehrzwecknutzung, ästhetisches Aussehen usw. — die Probe bestehen.

Während die gestiegenen Forderungen zu einer immer genaueren Durchführung der Berechnungen zwingen, wird diese auch durch den Fortschritt der Rechen- und Meßtechnik ermöglicht und Anreiz dazu gegeben.

In diesem Beitrag möchten wir die Lösungsmethoden des grundlegenden Problems der dynamischen Untersuchung von Fahrzeugen auf rechnerischem Wege behandeln, nämlich die Ableitung der Bewegungsleichungen eines gegebenen mechanischen Schwingungssystems. Dabei soll gezeigt werden, daß die Verallgemeinerung der aus der Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen bekannte »Deformationsmethode« ein gut brauchbares, vielseitiges Verfahren ergibt.

Fahrzeugschwingungen werden durch die lineare Differentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t) \tag{1}$$

beschrieben, wo

t die Zeit

$\mathbf{q}$ den Vektor der verallgemeinerten — freien — Koordinaten

u den Vektor der Zwangskoordinaten infolge von Umgebungswirkungen (z. B. die Fahrbahn) bedeuten,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}$$

f der Vektor der allgemeinen Erregungskräfte
M die Matrix der Trägheitskennwerte (Massenmatrix)
K die Matrix der zu den verallgemeinerten Koordinaten gehörenden Dämpfungskennwerte (Dämpfungsmatrix)
S die Matrix der zu den verallgemeinerten Koordinaten gehörenden Steifigkeitskennwerte (Steifigkeitsmatrix)
G die Matrix der zu den Zwangskoordinaten gehörenden Dämpfungskennwerte
H die Matrix der zu den Zwangskoordinaten gehörenden Steifigkeitskennwerte

sind.

Es sei bemerkt, daß — je nach dem Problemenkreis — sich Gl. (1) weiter zerlegen läßt, wodurch die Rolle gewisser Wechselwirkungen herausgestellt wird. Bemerkenswerte Ergebnisse von besonderem Interesse erhält man bei der Untersuchung der Querschwingungen von Eisenbahnfahrzeugen.

Bei dem gegebenen Modell besteht die Aufgabe in der Bestimmung der Elemente der Matrizen **M**, **K**, **S**, **G**, **H**.

2. Klassische Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen*

Es ist bekannt, daß für die Anwendung einer jeden Methode das untersuchte System in dem Niveau der Modellbildung entsprechende Teile zu zerlegen ist. Als Ergebnis dieser Dekomposition erhält man ein Schema, das alle wesentlichen Informationen über das geprüfte System und seine Umgebung enthält. Solche Informationen sind z. B. die geometrischen Abmessungen, die Massenverteilung, Größe und räumliche Anordnung der elastischen und Dämpfungselemente, geometrische, kinematische sowie dynamische Zwangs-

* Die auf elektrischer Analogie basierenden Methoden werden in diesem Beitrag nicht behandelt.

bedingungen usw. Dann folgt notwendigerweise eine Synthese, die als traditionell bezeichnet wird, wenn die vorgenannten kleinsten Elemente des Systems unmittelbar verwendet werden, ohne allgemeine Möglichkeit der gemeinsamen Behandlung der zu je einem Teilsystem gehörenden Elemente.

A) *Direkte Anwendung des Grundgesetzes der Dynamik*

Das Wesen dieses Vorgehens ist, daß auf die die einzelnen Koordinaten entlang auftretenden Kräfte (Momente) das zweite NEWTONsche Gesetz bzw. seine Folgen — bei weitgehender Ausnutzung der Anschaulichkeit — angewandt werden. Die Matrizen der Differentialgleichung (1) können im allgemeinen nur nachträglich aufgeschrieben werden [1], [2]. Die Übersichtlichkeit des Verfahrens verschlechtert sich bedeutend im Falle eines verwickelteren Modells (z. B. bei einer großen Anzahl von Bauteilen, räumlicher Erweiterung, statisch unbestimmten Konstruktionen usw.). Die bei der Anwendung dieses Verfahrens gemachten Erfahrungen trugen dennoch zu der Formulierung des Gedankenganges des in Abschnitt 3 erörterten Aufstellungsverfahrens wesentlich bei.

B) *Anwendung der* LAGRANGE*schen Bewegungsgleichungen zweiter Art*

Diese Methode dürfte — besonders bei Systemen aus für Vereinheitlichung geeigneten konstruktiven Baugruppen — als eine Zwischenstufe zwischen den Herleitungen nach herkömmlicher und nach systemtheoretischer Auffassung betrachtet werden. Sie hat den Vorteil, daß sie sich für rechentechnische Bearbeitung eignet, bzw. mechanisierbare Schritte enthält, sowie daß sich die Anwendung nicht nur auf die mechanischen Wechselwirkungen beschränkt [2].

Obwohl die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen zweiter Art hinsichtlich mechanischer Wechselwirkungen eine indirekte Anwendung des D'ALEMBERT-Prinzips darstellen, besteht zwischen den beiden Methoden ein wesentlicher Unterschied in der technischen Ausführung der Rechenarbeit. Auch zwischen der im weiteren zu beschreibenden und den vorigen Methoden zeigt sich ein bemerkenswerter Unterschied.

3. Die Verallgemeinerung der »Deformationsmethode«

Nehmen wir an, daß die Koeffizientenmatrizen der Differentialgleichung (1) bekannt sind. Untersuchen wir den Sonderfall, wo $\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{q}^T = [q_1 = 0, q_2 = 0, \ldots, q_i = 1, \ldots, q_n = 0]$.

In anschaulicher Weise entspricht dieser Zustand dem Fall, wo alle Massen in den Ursprüngen der zu ihnen gehörenden Koordinaten befestigt sind, mit Ausnahme der i-ten Koordinate, welche die zu ihr gehörende Masse entlang in positivem Sinn auf Einheitsabstand verschoben wurde. Die Differentialgleichung (1) vereinfacht sich zur Gleichung

$$\mathbf{S}\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}$$

aus der unnittelbar abgelesen werden kann, daß der »Erregungsvektor« f, der diesen Zustand herbeigeführt hat, der i-ten Spalte der Matrix S — als Vektor — Gleichgewicht hält.

Wird die Differentialgleichung (1) in dem Sonderfall untersucht, wo $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} = 0$ und $\dot{\mathbf{q}}^T = [\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0, \ldots, \dot{q}_i = 1, \ldots, \dot{q}_n = 0]$, läßt sich ähnlich wie im vorigen Fall feststellen, daß der »Erregungsvektor« der i-ten Spalte der Matrix **K** Gleichgewicht hält. Daraus ist zu erkennen, daß durch eine geeignete Wahl der Vektoren $\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$ die Spalten der Matrizen der Differentialgleichung (1) eine nach der anderen untersucht werden können.

Aufgrund des Gesagten läßt sich ein anschauliches Verfahren konstruieren, um die Elemente der gesuchten Matrizen zu ermitteln. Betrachten wir beispielsweise wieder den ersten Fall:

Jede Masse sei im Ursprung der zu ihr gehörenden Koordinate befestigt. (Es ist klar, daß es zweckmäßig ist, die Koordinatenursprünge so zu wählen, daß die dem Ruhestand $\mathbf{f} = \ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u} = \mathbf{0}$ entsprechen.) Man löst die die Freiheit der i-ten — aber nur der i-ten — Koordinate blockierende Bedingung auf und verschiebt die dazugehörige Masse in Einheitsentfernung — aus Gründen der Zweckmäßigkeit — *in negativer Richtung*. Dann befestigt man sie in der neuen Lage wieder. So ergeben die in den einzelnen *Befestigungspunkten* wirkenden Kräfte bzw. die Momente nacheinander *vorzeichenrichtig* die Elemente der i-ten Spalte der Matrix S.

4. Vorteile der Analyse durch Verallgemeinerung der »Deformationsmethode«

a) Ohne die Berechnung tatsächlich durchzuführen, erhält man einen guten Überblick über die Struktur der für das untersuchte System kennzeichnenden Matrizen. Das ist eine wichtige Hilfe bei der weiteren Arbeit, weil die Blöcke, die in gleicher Weise gleich Null sind, im voraus bestimmt werden können. Dadurch erhält man eine zweckmäßige erste Zerlegung des Systems, die das Bauen in Maßordnung ermöglicht, d. h. die in den gleichen Koordinaten aufgeschriebenen Modelle mit den gleichen Freitheitsgraden eines Systems, die jedoch im übrigen unterschiedlich sind, lassen sich einfach auswechseln.

b) Das Verfahren läßt sich auch auf einfache Fälle zweckmäßig und gut anwenden, da es einer wohldurchdachten, methodischen Anwendung des D'ALEMBERT-Prinzips entspricht.

Dieses Verfahren kann auch mit den LAGRANGEschen Bewegungsgleichung zweiter Art gut verbunden werden. Diese Möglichkeit läßt sich in gewissen Fällen günstig ausnutzen.

c) Ein jedes Teilsystem kann ein beliebiges — stabiles — mechanisches System sein, z. B. ein steifer Körper oder ein anderes Fahrzeug oder ein statisch mehrfach unbestimmter Träger usw. Die vorgeschlagene Methode erfordert es nicht, daß ein noch so großes System in jedem Falle bis auf die kleinsten Teile zerlegt und von diesen aus gebaut wird; trotzdem können die Teile mit der höchsten Genauigkeit modelliert werden.

d) Oft — besonders im Falle von großen oder verwickelte konstruktive Lösungen enthaltenden Systemen — können für die Matrizenelemente keine einfachen Zusammenhänge angegeben werden, sondern sie müssen in jedem einzelnen Fall numerisch ermittelt werden. Das läßt sich auf dem Rechner leicht ausführen, da die bei statischen Berechnungen angewandten Methoden und Verfahren ohne jede Änderung übernommen werden können [3]. Die empfohlene Methode beruht zwar auf der »Deformationsmethode«, durch Einführung des Begriffs der kinetischen Last kann aber auch nach dem »Kraftgrößenverfahren« gerechnet werden. Aus alldem ist zu sehen, daß diese Methode schon im Augenblick ihrer Formulierung mechanisiert ist.

e) In vielen praktischen Fällen stößt es auf keine unüberwindliche Schwierigkeit, die Elemente der Matrizen **S** und **H** zu messen (z. B. beim Federausgleich von Fahrzeugen). So können auch Wirkungen zahlenmäßig berücksichtigt werden, die durch die klassische Synthese kaum erfaßt wurden — wie z. B. Eigenelastizität und -dämpfung —, gleichzeitig machen sich die untersuchten Koordinaten die wirklichen Charakteristiken des Systems entlang geltend, nicht die Charakteristiken des unter zahlreichen Vernachlässigungen herausgebildeten Modells.

5. Anwendung der verschiedenen Methoden

Abb. 1 zeigt ein mechanisches Schwingungssystem mit vier Freiheitsgraden. Das erörterte Modell läßt sich z. B. für die Beschreibung der Schwingungen in senkrechter Ebene eines zweiachsigen, gummibereiften Straßenfahrzeugs verwenden, dessen Kasten durch einen steifen Körper ersetzt wer-

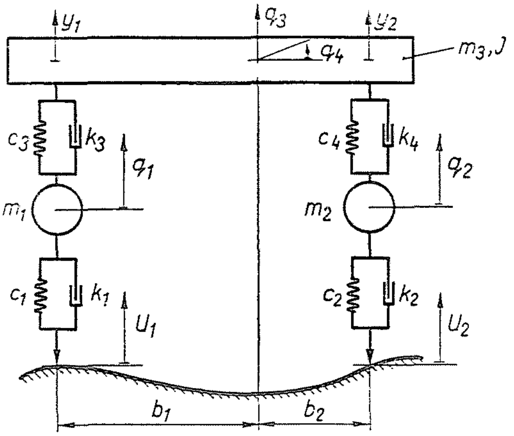

Abb. 1. Modell für die Beschreibung der Schwingungen in senkrechter Ebene eines zweiachsigen, gummibereiften Straßenfahrzeugs

den kann, und das Vorder- und Hinterachsenbrücken großer Biegesteifigkeit besitzt. Dabei bedeuten:

m_1	die Masse des Vorderlaufwerks
m_2	die Masse des Hinterlaufwerks
m_3	die Masse des Wagenkastens
J	das auf die eigene Schwerpunktachse bezogene Trägheitsmoment das Wagenkastens
k_1, k_2	die Dämpfungsbeiwerte der Reifen
k_3, k_4	die Dämpfungsbeiwerte der Kastenaufhängung
c_1, c_2	die Steifigkeitsfaktoren der Reifen
c_3, c_4	die Steifigkeitsfaktoren der Kastenaufhängung

Die Bewegung soll durch die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q}^T = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ und die Zwangskoordinaten $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2]$ gekennzeichnet werden. In Abb. 1 sind auch die eine leichtere Berechnung fördernden Hilfskoordinaten $\mathbf{y}^T = [y_1, y_2]$ dargestellt. Das Differentialgleichungssystem, das die Bewegung dieses Modells beschreibt, soll nach jeder der erörterten Methoden abgeleitet werden, in der Hoffnung, daß dieses Problem — trotz seiner bescheidenen Maße — die im vorigen dargelegten Gedanken gut veranschaulichen wird.

Vorangehend sei bemerkt, daß die Lösung wie folgt lautet:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_3 & 0 & -k_3 & k_3 b_1 \\ 0 & k_2 + k_4 & -k_4 & -k_4 b_2 \\ -k_3 & -k_4 & k_3 + k_4 & k_4 k_2 - k_3 b_1 \\ k_3 b_1 & -k_4 k_2 & k_4 b_2 - k_3 b_1 & k_3 b_1^2 + k_4 b_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & 0 & -c_3 & c_3 b_1 \\ 0 & c_2 + c_4 & -c_4 & -c_4 b_2 \\ -c_3 & -c_4 & c_3 + c_4 & c_4 b_2 - c_3 b_1 \\ c_3 b_1 & -c_4 b_2 & c_4 b_2 - c_3 b_1 & c_3 b_1^2 + c_4 b_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Um die Wiederholungen einzuschränken, werden im weiteren die Gleichungen in Matrixform nicht angeschrieben.

A) *Direkte Anwendung des dynamischen Grundgesetzes*

Es sei dem System jede seiner Koordinaten entlang eine »ziemlich« kleine Verschiebung — statischer Art — in positivem Sinn aufgezwungen. Die Gleichgewichtsgleichungen für den Augenblick nach dem gleichzeitigen Aufheben aller Zwänge lauten:

Gleichgewicht des Vorderlaufwerks:

$$m_1 \ddot{q}_1 = -c_1(q_1 - u_1) + c_3(y_1 - q_1) - k_1(\dot{q}_1 - \dot{u}_1) + k_3(\dot{y}_1 - \dot{q}_1)$$

Gleichgewicht des Hinterlaufwerks:

$$m_2 \ddot{q}_2 = -c_1(q_2 - u_2) + c_4(y_2 - q_2) - k_2(\dot{q}_2 - \dot{u}_2) + k_4(\dot{y}_2 - \dot{q}_2)$$

Gleichgewicht des Wagenkastens

$$m_3 \ddot{q}_3 = -c_3(y_1 - q_1) - c_4(y_2 - q_2) - k_3(\dot{y}_1 - \dot{q}_1) - k_4(\dot{y}_2 - \dot{q}_2)$$

$$J \ddot{q}_4 = c_3 b_1(y_1 - q_1) - c_4 b_2(y_2 - q_2) + k_3 b_1(\dot{y}_1 - \dot{q}_1) - k_4 b_2(\dot{y}_2 - \dot{q}_2)$$

Die geometrischen Zusammenhänge zwischen der Koordinaten lauten:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= q_3 - b_1 q_4 \\ y_2 &= q_3 + b_2 q_4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{und} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{q}_3 - b_1 \dot{q}_4 \\ \dot{y}_2 &= \dot{q}_3 + b_2 \dot{q}_4 \end{aligned}\right\}$$

Nach Ordnen:

$$m_1 \ddot{q}_1 + (k_1 + k_3)\, \dot{q}_1 - k_3 \dot{q}_3 + k_3 b_1 \dot{q}_4 + (c_1 + c_3)\, q_1 - c_3 q_3 + c_3 b_1 q_4 =$$
$$= k_1 \dot{u}_1 + c_1 u_1$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + (k_2 + k_4)\, \dot{q}_2 - k_4 \dot{q}_3 - k_4 b_2 \dot{q}_4 + (c_2 + c_4) q_2 - c_4 q_3 - c_4 b_2 c_4 = k_2 \dot{u}_2 + c_2 u_2$$

$$m_3 \ddot{q}_3 - k_3 \dot{q}_1 - k_4 \dot{q}_2 + (k_3 + k_4)\, \dot{q}_3 + (k_4 b_2 - k_3 b_1)\, \dot{q}_4 - c_3 q_1 - c_4 q_2 +$$
$$+ c_3 + c_4 q_3 + c_4 b_2 - c_3 b_1\, q_4 = 0 \tag{2}$$

$$J \ddot{q}_4 + k_3 b_1 \dot{q}_1 - k_4 b_2 \dot{q}_2 + (k_4 b_2 - k_3 b_1)\, \dot{q}_3 + (k_3 b_1^2 + k_4 b_2^2)\, \dot{q}_4 +$$
$$+ c_3 b_1 q_1 - c_4 b_2 q_2 + (c_4 b_2 - c_3 b_1)\, q_3 + (c_3 b_1^2 + c_4 b_2^2) q_4 = 0$$

B) *Anwendung der* LAGRANGE*schen Bewegungsgleichungen zweiter Art*

In einem beliebigen — jedoch zulässigen — Bewegungszustand des Systems sind

die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_4^2$$

die Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2} k_1 (q_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_2 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_1 - q_1)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_2 - q_2)^2$$

die in den elastischen Elementen gespeicherte Potentialenergie

$$U = \frac{1}{2} c_1 (q_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_2 - u_2)^2 + \frac{1}{2} c_3 (y_1 - q_1)^2 + \frac{1}{2} c_4 (y_2 - q_2)^2$$

die geometrischen Zusammenhänge zwischen den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= q_3 - b_1 q_4 \\ y_2 &= q_3 + b_2 q_4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{und} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{q}_3 - b_1 \dot{q}_4 \\ \dot{y}_2 &= \dot{q}_3 + b_2 \dot{q}_4 \end{aligned}\right\}$$

Die LAGRANGE-Gleichungen lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

Die Arbeit wird durch folgende Bemerkungen vereinfacht:

a) $$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

b) $$Q_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

c) Sind in der Dissipationsfunktion die Substitutionen

$$\left.\begin{matrix} k_i := c_i \\ q_i := q_i \end{matrix}\right\} \; (i = 1, 2, 3, 4) \text{ und } \left.\begin{matrix} \dot{u}_j := u_j \\ \dot{y}_j := y_j \end{matrix}\right\} \; (j = 1, 2)$$

durchgeführt, erhält man gerade die Potentialenergie. Daher genügt es, von den Größen $\frac{\partial D}{\partial q_i}$ und $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ nur die eine zu berechnen, die andere kann aufgrund der Analogie direkt aufgeschrieben werden. Damit gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = m_1\ddot{q}_1; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2\ddot{q}_2; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right) = m_3\ddot{q}_3;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4}\right) = J\ddot{q}_4$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = c_1(q_1 - u_1) - c_3(q_3 - b_1q_4 - q_1) \;;$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = c_2(q_2 - u_2) - c_4(q_3 + b_2q_4 - q_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_3} = c_3(q_3 - b_1q_4 - q_1) + c_4(q_3 + b_2q_4 - q_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_4} = -c_3b_1(q_3 - b_1q_4 - q_1) + c_4b_2(q_3 + b_2q_4 - q_2)$$

Werden unter Berücksichtigung der Analogie von U und D die erhaltenen Ausdrücke in die LAGRANGE-Gleichung (3) eingesetzt, erhält man die Gleichungsfamilie (2), der die gesuchten Matrizenelemente unmittelbar entnommen werden.

C) *Anwendung der in Abschnitt 3 beschriebenen Methode*

Fixieren wir alle freien und Zwangskoordinaten des Systems und heben wir dann die die Freiheit der Koordinate q_1 ausschaltende Sperre auf. Verschiebt sich die Masse m_1 die Koordinate q_1 entlang um »1«, dann wirken

auf m_1 die Kraft	$c_1 + c_2$
auf m_2 eine Kraft gleich	0
auf m_3 die Kraft	$-c_3$
und das Moment	$c_3 b_1$

Das ist die erste Spalte der gesuchten Matrix S. Nachdem die Koordinate q_1 wieder im Punkt 0 fixiert wurde, heben wir die die Freiheit der Koordinate q_2 ausschaltende Sperre auf. Verschiebt sich die Masse m_2 die Koordinate q_2 entlang um »1«, dann wirken

auf m_1 eine Kraft gleich	0
auf m_2 die Kraft	$c_2 + c_4$
auf m_3 die Kraft	$-c_4$
und das Moment	$-c_4 b_2$

In dieser Reihenfolge geschrieben ergibt das die zweite Spalte der Matrix S. Wird das Verfahren in ähnlicher Weise fortgesetzt, können alle Spalten der Matrix S ausgefüllt werden. Für die Kontrolle läßt sich der Umstand benutzen, daß im gewählten Beispiel S und K symmetrische Matrizes sind. Unter Anwendung der in Punkt B) angedeuteten Analogie kann die Matrix K — in Kenntnis von S — unmittelbar aufgeschrieben werden. Wird diese Möglichkeit außer acht gelassen, kann z. B. die dritte Spalte der Matrix K in folgender Weise gewonnen werden:

Nachdem mit Ausnahme von q_3 sämtliche Koordinaten fixiert wurden, geben wir der Masse m_3 die Koordinate q_3 entlang eine Geschwindigkeit »-1«. Dann wirken von den Dämpfungselementen

auf m_1 die Kraft	$-k_3$
auf m_2 die Kraft	$-k_4$
auf m_3 die Kraft	$k_3 + k_4$
und das Moment	$k_4 b_2 - k_3 b_1$

Das ist die dritte Spalte der gesuchten Matrix **K**. Die Herstellung der Matrizes **G** und **H** enthält dem Gesagten gegenüber keine neuen Gedanken. Als Beispiel betrachten wir die Bestimmung der ersten Spalte der Matrix **H**: alle Massen in der Ursprüngen der zu ihnen gehörenden verallgemeinerten Koordinaten sowie auch u_2 fixiert, werden — unter Berücksichtigung des Umstands, daß **H** auf der rechten Seite der Differentialgleichung (1) steht — auf Wirkung einer u_1 entlang eingetragenen Verschiebung um »$+1$«

auf m_1 die Kraft c_1
auf m_2 eine Kraft 0
auf m_3 eine Kraft 0
und ein Moment 0

wirken.

In ähnlicher Weise erhält man die noch fehlenden Elemente der Matrix **H**.

Die Matrix **G** erhält man entweder nach der in Punkt B) beschriebenen Analogie oder in der Weise wie die Matrix **H**.

In Kenntnis des Gesagten hat die Herstellung der Matrix **M** — bei der Wahl der Koordinaten im Beispiel — keine Schwierigkeit.

Aus dem Vergleich der drei Methoden ergibt sich, daß die Methode unter Punkt *C* die geringste Rechenarbeit erfordert, es sind keine Ordnungsoperationen notwendig: diese Methode liefert unmittelbar die Elemente der gesuchten Matrizes, sie ist also die schnellste.

Zusammenfassung

Im Beitrag wird die Aufstellung der Bewegungsgleichungen von Schwingungssystemen mit endlichen Freiheitsgraden behandelt. Nach Durchsicht der im Maschinenbau allgemein gebräuchlichen Methoden werden die Grundlagen eines mit Hilfe der aus der Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen bekannten »Deformationsmethode« günstig mechanisierbaren Ableitungsverfahrens dargelegt. Es werden die Vorteile der Anwendung geprüft und die Beziehungen zu dem D'ALEMBERT-Prinzip und zu den LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen zweiter Art analysiert. Die angeführten Verfahren werden auf ein Fahrzeugmodell mit vier Freiheitsgraden angewandt und dann hinsichtlich des Rechenaufwands und der Schnelligkeit verglichen.

Verfasser spricht Herrn Prof. Dr. Pál Michelberger für die bei der Ausarbeitung der Beitrage gewährte selbstlose Hilfe seinen aufrichtigsten Dank aus.

Literatur

1. BOSZNAY, Á.: Technische Schwingungslehre.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
2. LUDWIG, GY.: Die Dynamik der Maschinen.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
3. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Theorie und Berechnung der Stabwerke.* Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1971.

Mihály FERENCZI, 1144 Budapest, Füredi park 2—4. VII. 178.

* In ungarischer Sprache.