

EINE GEOMETRISCHE BEGRÜNDUNG DER THEORIE DER AFFIN-REGULÄREN n -ECKE VON F. BACHMANN UND E. SCHMIDT

Von

G. KORCHMÁROS

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 16. März. 1975

Vorgelegt von Prof. Dr. G. Szász

Eine zyklische Permutation von n -geordneten Punkten einer affinen Ebene wird n -Eck genannt. Es seien P einer dieser Punkte und q die genannte Permutation, dann führt man für die Punkte die Bezeichnung $P_i = q^i(P)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ein, und beschreibt mit dem Ausdruck $P_0P_1\dots P_{n-1}$ das betrachtete n -Eck. Es kann vorkommen, daß unter den Punkten mehrere identisch sind oder drei in einer Geraden liegen. Diese n -Ecke werden als entartete n -Ecke hervorgehoben.

Es ist bekannt (siehe [3], Satz 2), daß in der euklidischen Ebene die affin-regulären n -Ecke, das heißt die affinen Bilder der mit der euklidischen Metrik definierten regelmäßigen und regelmäßig-sternförmigen n -Ecke*, auch ohne die metrischen Elemente allein durch die Parallelitäten der Seiten und Sehnen genau charakterisiert werden können.

In der euklidischen Ebene ist ein n -Eck $P_0P_1\dots P_{n-1}$ genau dann und nur dann das affine Bild eines regelmäßigen oder regelmäßig-sternförmigen n -Ecks, wenn für jedes regelmäßige bzw. regelmäßig-sternförmige n -Eck $R_0R_1\dots R_{n-1}$ bei der durch $R_i \rightarrow P_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) definierten Abbildung die Parallelität der Seiten und Sehnen erhalten bleibt. Das bedeutet, daß für jedes $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} P_iP_{i+1} \parallel P_{i-j}P_{i-j-1} \quad j = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-2}{2} \right] \\ P_{i-1}P_{i+1} \parallel P_{i-j-1}P_{i+j+1} \quad j = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-3}{2} \right] \end{array} \right.$$

gelten muß, wobei die Indizes modulo n zu lesen sind.

* Das n -Eck $R_0R_1\dots R_{n-1}$ ist ein affines Bild des n -Ecks $P_0P_1\dots P_{n-1}$, wenn eine Affinität α besteht, bei der $P_i^{\alpha} = R_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Der zitierte Satz ermöglicht die Einführung des Begriffes des affin-regulären n -Ecks in einer beliebigen affinen Ebene und die Untersuchung seiner Eigenschaften in analoger Weise:

Definition. In einer affinen Ebene nennen wir das n -Eck $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ affin-regulär, falls seine Seiten und Sehnen den Bedingungen (*) genügen.

Im Hinblick auf die weitere Behandlung werden wir uns auf diese Definition unter der Bezeichnung »geometrische Definition des affin-regulären n -Ecks« berufen.

Es seien $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ ein affin-reguläres n -Eck und $m < n$ eine natürliche Zahl. Wenn jede Ecke von $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ mit der m -ten nachfolgenden Ecke verbunden ist und $(m, n) = 1$, so ergibt sich wieder ein affin-reguläres n -Eck. Gilt aber $(m, n) = t > 1$, dann zerfällt $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ für $t < \frac{n}{2}$ in t affin-reguläre n/t -Ecke und für $t = \frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ Punktpaare.

Wegen der besseren Formulierung gewisser Ergebnisse wird es sich zum Teil günstig erweisen, diese affin-regulären n/t -Ecke ebenfalls zu den affin-regulären n -Ecke zu zählen. Dies läßt sich formell auf folgende Weise erreichen:

Es seien n eine natürliche Zahl, m ein Teiler von n und $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ ein affin-reguläres n -Eck. Dann nennen wir das entartete n -Eck $P_0P_mP_{2m} \dots P_{(n-1)m}$ ein m -fach belegtes affin-reguläres n -Eck.

Es ist klar, daß ein solches entartetes n -Eck $\frac{n}{m} = t$ Ecken besitzt und jede dieser Ecken m -fach gezählt wird.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns im weiteren mit affinen Ebenen, deren Koordinatenstruktur sich auf einen kommutativen Körper zweier verschiedener Charakteristiken aufbaut. Es sei jedoch bemerkt, daß in anderen, z. B. nichtdesarguesschen, endlichen Ebenen ebenfalls affin-reguläre n -Ecke konstruiert werden können (vgl. [3]).

Es seien also ein kommutativer Körper K der Charakteristik $q (\neq 2)$ und eine über diesem Körper definierte affine Ebene gegeben. Es ist bekannt, daß zwischen den Punkten der Ebene und den Vektoren eines über K definierten zweidimensionalen Vektorraums (durch V bezeichnet) eine eindeutige Zuordnung mit folgender Eigenschaft erklärt werden kann. Werden zwei Punkte P und R der Ebene und dem variablen Punkt S der zu P und R gehörenden Geraden die Vektoren \mathbf{p} , \mathbf{r} und \mathbf{s} aus V zugeordnet, dann gibt es ein $c \in K$ mit $\mathbf{s} = c\mathbf{p} + (1 - c)\mathbf{r}$, wobei 1 das Einheitselement des Körpers K ist.

Ausgehend von einem Vektorraum, der einer über einem kommutativen Körper errichteten Ebene in der obigen Weise zugeordnet ist, untersuchten F. Bachmann und E. Schmidt die affinen Eigenschaften der n -Ecke nach den Methoden der linearen Algebra: Die n -Tupel von Elementen aus $V(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1})$ nannten sie n -Ecke. Der so eingeführten Menge der n -Ecke kann durch

Definition einer Addition und einer Vielfachbildung die Struktur eines Vektorraums verliehen werden:

$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}) + (\mathbf{p}'_0, \mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}'_{n-1}) = (\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}'_0, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}'_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}'_{n-1})$$

$$c(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}) = (c\mathbf{p}_0, c\mathbf{p}_1, \dots, c\mathbf{p}_{n-1}) \quad c \in K.$$

Diesen Vektorraum werden wir mit \mathcal{W} bezeichnen. Offensichtlich ist $\mathcal{W} = V \oplus V \oplus \dots \oplus V$. F. Bachmann und E. Schmidt bezeichnen diesen Vektorraum in ihrer Arbeit als Vektorraum der n -Ecke.

Bei einer solchen Begründung wird der Begriff des affin-regulären n -Ecks natürlich ebenfalls auf algebraischem Wege eingeführt. Wir zitieren hier eine äquivalente Form dieser Definition (siehe [2], Seite 164 Satz 7), auf die wir uns im weiteren unter der Bezeichnung »*algebraische Definition des affin-regulären n -Ecks*« berufen werden:

Definition. Sei $x^2 - cx + 1$ ein symmetrischer Teiler des n -ten Kreisteilungspolynoms über K . Gilt $c \in K$ ist, nennen wir die aus den Lösungen $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}$ des zyklischen Gleichungssystems

$$(**) \quad \mathbf{p}_0 - c\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_1 - c\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}, \quad \dots, \quad \mathbf{p}_{n-1} - c\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$$

gebildeten n -Eck affin-reguläre n -Ecke.

Auch hier kann der Begriff des m -fach belegten affinregulären n -Ecks eingeführt werden:

Sei $m > 2$ ein echter Teiler von n und $x^2 - cx + 1$ ein symmetrischer Teiler des $\frac{n}{m}$ -ten Kreisteilungspolynoms über K . Gilt $c \in K$, dann nennen wir die aus den Lösungen $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1})$ des zyklischen Gleichungssystems (***) gebildeten n -Ecke m -fach belegte affin-reguläre n -Ecke.

Es kann unmittelbar verifiziert werden, daß die gewissen $x^2 - cx + 1$ ($c \in K$) zugeordneten und als affin-regulär oder m -fach belegt affin-regulär genannten n -Ecke einen linearen Unterraum in \mathcal{W} bilden. F. Bachmann und E. Schmidt beweisen, daß die direkte Summe dieser Unterräume \mathcal{W} ergibt ([2], S. 166).

Naturgemäß stellt sich die Frage, ob die Klassen der zu Beginn dieser Arbeit durch geometrische Definition und später durch vektor-algebraische Definition erfaßten affinregulären n -Ecke identisch sind, das heißt, ob es richtig ist, daß wenn $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ in geometrischem Sinne ein affin-reguläres n -Eck ist und \mathbf{p}_i die in dessen Eckpunkte zeigenden Ortsvektoren sind, dann $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1})$ im algebraischen Sinne affin-regulär ist und umgekehrt. In [2] finden wir einen kurzen Hinweis darauf, daß in der euklidischen Ebene

die beiden Klassen identisch sind, falls die entarteten Fälle ausgeschlossen werden. Diese Tatsache ist auch gültig für alle affine Ebenen über kommutativen Körpern mit der Charakteristik $q = 0$. Ist q ungerade, dann existieren aber solche affin-regulären n -Ecke, die durch die algebraische Definition nicht berücksichtigt werden. Diese Ergebnisse sind in Abschnitt 2^o bewiesen.

In Abschnitt 3^o formulieren wir ein algebraisches Gleichungssystem, das dem Gleichungssystem in der algebraischen Definition des affin-regulären n -Ecks verwandt ist. Es besteht aus Gleichungen, die in bezug auf eine zyklische Verschiebung der Ecken modulo n invariant sind, und beschreibt für $(q, n) = 1$ die gleichen regulären n -Ecke wie die beiden erstgenannten Definitionen. Für $q|n$ — genauer im Sinne des Satzes 1 c aus Abschnitt 1^o für $q = n$ — beschreibt dieses Gleichungssystem gerade dann die affin-regulären n -Ecke in geometrischem Sinne, wobei von der entarteten abgesehen wird. Falls wir die das Gleichungssystem (3.1) erfüllenden und nicht entarteten n -Ecke affin-reguläre n -Ecke nennen, haben wir genau das algebraische Äquivalent des geometrischen Begriffes gefunden.

Schließlich besteht noch eine schwache Analogie zwischen den Fällen $(q, n) = 1$ und $q = n$; werden diejenigen affin-regulären n -Ecke des Raumes W in einer Klasse zusammengefaßt einschließlich der m -fach belegten affin-regulären n -Ecke, die in der Ebene einander affin äquivalenten n -Ecken entsprechen, dann ist die Anzahl der Klassen im Falle $(q, n) = 1$ gleich $[n/2]$; diese Tatsache spiegelt sich auch in dem von F. Bachmann und E. Schmidt zitierten Satz wider. Im Falle $q = n$ hingegen gibt es nur eine einzige Klasse.

1^o. Elementare Eigenschaften affin-regulärer n -Ecke in einer affinen Ebene über einem kommutativen Körper von Charakteristik $q(\neq 2)$

In diesem Abschnitt werden die affin-regulären n -Ecke mit geometrischen Mitteln, genauer mit den Mitteln der analytischen Geometrie untersucht. In Übereinstimmung damit stützen wir uns auf die geometrische Definition der affin-regulären n -Ecke.

Zu Beginn zeigen wir Beispiele für affin-reguläre n -Ecke, die in Ebenen über Körpern mit bestimmten Eigenschaften liegen. Eine gemeinsame Eigenschaft dieser n -Ecke ist, daß um sie ein nicht entarteter Kegelschnitt geschrieben werden kann.

Die Parallelitäten der Sekanten und Tangenten eines Kegelschnittes spiegeln sich in den Parametern seiner Normalform sehr einfach wider. Hier werden in der üblichen Weise unter der Normalform der Hyperbeln, Ellipsen und Parabeln die quadratischen Formen $xy - 1 = 0$, $x^2 - sy^2 - 1 = 0$ bzw. $y - x^2 = 0$ verstanden, wobei s kein quadratisches Element des Grundkörpers K ist. Die Punkte der Kegelschnitte $xy - 1 = 0$ und $y - x^2 = 0$ beschreiben

wir durch das Element z aus K als Parameter in der Form (z, z^{-1}) bzw. (z, z^2) . Den Punkten der Ellipse $x^2 - sy^2 - 1 = 0$ schließlich ordnen wir als Parameter das Element $z = x + \vartheta y$ des Körpers $K^* = \{K, \vartheta \mid \vartheta^2 = s\}$ zu. Im letzteren Fall ist der Parameterbereich eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe von K^* . Wird das konjugierte Element $z = x - \vartheta y$ von $\bar{z} = x + \vartheta y$ eingeführt, gilt nämlich daß der Parameterbereich die Menge derjenigen Elemente z aus K^* ist, für die $z\bar{z} = 1$ gilt, das ist aber gerade der Kern des Homomorphismus $z \rightarrow z\bar{z}$.

Hilfssatz: Gegeben seien vier Parameterwerte z_0, z_1, z_2 und z_3 eines in Normalform gegebenen Kegelschnittes. Dann gilt: Die durch die zu den Parametern z_0 und z_3 bzw. z_1 und z_2 gehörenden Punkte P_0 und P_3 bzw. P_1 und P_2 gegebenen Sekanten dieses Kegelschnittes sind genau dann parallel, wenn im Fall der Hyperbel oder der Ellipse die Bedingung $z_0 z_3 = z_1 z_2$ und im Falle der Parabel die Bedingung $z_0 + z_3 = z_1 + z_2$ erfüllt ist. Falls $P_0 = P_3$ bzw. $P_1 = P_2$, tritt an die Stelle der Sekante $P_0 P_3$ bzw. $P_1 P_2$ die Tangente des Kegelschnittes in dem jeweiligen doppelt belegten Punkt.

Die Behauptung des Hilfssatzes läßt sich durch kurze Berechnung, analog zu dem klassischen Fall, wo der Grundkörper der reellen Zahlen und $s = -1$ ist, schnell verifizieren.

Satz 1/a. Sei G eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe des kommutativen Körpers K und es gelte $|G| = n$, dann kann in der affinen Ebene über K in der Hyperbel $xy - 1 = 0$ mindestens ein affin-reguläres n -Eck einbeschrieben werden. Ist nämlich z ein erzeugendes Element von G , dann ist das n -Eck $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$, in dem P_i Punkt der Hyperbel mit dem Parameter z^i bezeichnet, ein solches n -Eck.

1/b. Es seien K^* eine quadratische Erweiterung des kommutativen Körpers der Charakteristik $q (\neq 2)$ mittels der Wurzel der über K irreduziblen Gleichung $\vartheta^2 - s = 0$, und H eine endliche Untergruppe der in K^* durch die Lösungen der Gleichung $z\bar{z} = 1$ gebildeten Untergruppe der multiplikativen Gruppe, und es gelte $|H| = n$, dann kann in der affinen Ebene über K in die Ellipse $x^2 - sy^2 - 1 = 0$ mindestens ein affin-reguläres n -Eck einbeschrieben werden. Ist nämlich z ein erzeugendes Element von H und bezeichne P_i den Punkt der Ellipse mit dem Parameter z^i ($0 \leq i \leq n - 1$), dann ist $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ ein solches affin-reguläres n -Eck.

1/c. Ist die Charakteristik des kommutativen Körpers K eine ungerade Primzahl q , dann kann in der affinen Ebene über K in die Parabel $y - x^2 = 0$ mindestens ein affin-reguläres q -Eck einbeschrieben werden. Ist nämlich z ein von 0 verschiedenes Element des Primkörpers von K , und bezeichnet P_i den Punkt der Parabel mit dem Parameter z^i ($i = 0, 1, \dots, q - 1$), dann ist $P_0 P_1 \dots P_{q-1}$ ein solches q -Eck.

Beweis. Da die Gruppe G zyklisch ist (siehe [1] Satz 26), enthält sie erzeugende Elemente. Es sei z ein solches erzeugendes Element und es bezeichne P_i den Punkt mit dem Parameter z^i auf der Hyperbel $xy - 1 = 0$.

Wir behaupten, daß $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ ein affin-reguläres n -Eck ist. Liest man nämlich die Indizes modulo n , gilt für jede natürliche Zahl i , daß die durch die Punkte P_{i-j} und P_{i+1+j} mit $j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ bzw. P_{i-1-j} und P_{i+1+j} mit $j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ bestimmten Sekanten nach dem Hilfsatz jeweils Elemente eines aus parallelen Geraden bestehenden Strahlenbündels sind. Dies ist aber gerade der geometrische Inhalt des Bedingungs-systems für affin-reguläre n -Ecke. Es ist ebenfalls klar, daß nach der gegebenen Konstruktion sich ein zu $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ gehörendes sternförmiges n -Eck bzw. ein n/d -fach belegtes n -Eck ergibt, wenn an Stelle von z das Element z^d mit $\left(d = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right)$ zur Konstruktion verwendet wird, je nachdem ob z^d ebenfalls ein erzeugendes Element von G ist oder nicht. Es sei noch bemerkt, daß man auf diese Weise die von dem affin-regulären n -Eck $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ abgeleiteten sternförmigen bzw. n/d -fach belegten affin-regulären n -Ecke genau je einmal erhält. Es sei nun v ein beliebiges Element von G .

Bezeichne nun den nach dem Punkt der mit dem Parameter v^i der Hyperbel $xy - 1 = 0$ weisenden Vektor kurz den zu diesem Punkt gehörenden Ortsvektor mit \mathbf{p}_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Eine kurze Berechnung ergibt die Gültigkeit von

$$(1.a1) \quad \mathbf{p}_{i+3} - \mathbf{p}_i = (v^2 + v + 1) v^{-1} (\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}),$$

und

$$(1.a2) \quad \mathbf{p}_{i+2} + \mathbf{p}_i = (v + v^{-1}) \mathbf{p}_{i+1}.$$

wobei die Indizes natürlich modulo n zu lesen sind.

Es sei nun wieder z ein erzeugendes Element von G , wobei v die Elemente mit $d = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Man kann leicht nachprüfen, daß sowohl alle Elemente $(v^2 + v + 1) v^{-1}$ als auch $(v + v^2)$ der Reche nach verschiedene Werte annehmen. Mit anderen Worten gehören (wenn P_i der Punkt der Hyperbel $xy - 1 = 0$ mit dem Parameter z^i ist) zu dem affin-regulären n -Eck $P_0P_1 \dots P_{n-1}$, und den von ihm abgeleiteten sternförmigen und n/d -fach belegten affin-regulären n -Ecken jeweils unterschiedliche Elemente $(v^2 + v + 1) v^{-1}$ bzw. $(v + v^{-1})$ in (1.a1) bzw. (1.a2).

Der Beweis der Sätze 1/b und 1/c wird ganz ähnlich wie für 1/a geführt, nur die Bedeutung von P_i ist zu ändern. Im Falle 1/b sei P_i der Punkt der Ellipse $x^2 - sy^2 - 1 = 0$ mit dem Parameter z^i , wobei z ein erzeugendes Element von H ist, und im Falle 1/c der Punkt der Parabel $y - x^2 = 0$ mit dem Parameter zi , wobei z ein von 0 verschiedenes Element des Primkörpers von K ist und der Indizer i natürlich über die Zahlen $0, 1, \dots, n - 1$ bzw. $0, 1, \dots, q - 1$ läuft.

Wir formulieren nun die zu (1.a1) und (1.a2) analogen Beziehungen. Sei v ein beliebiges Element von H und der zu dem Punkt der Ellipse $x^2 - sy^2 - 1 = 0$ mit dem Parameter v^i gehörende Ortsvektor \mathbf{p}_i , dann gilt für jedes $i = 0, 1, \dots, n - 1$

$$(1.b1) \quad \mathbf{p}_{i+3} - \mathbf{p}_i = (v^2 + v + 1) v^{-1} (\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1})$$

und

$$(1.b2) \quad \mathbf{p}_{i+2} + \mathbf{p}_i = (v + v^{-1}) \mathbf{p}_{i+1}$$

und wird an die Stelle von $G H$ gesetzt, gelten auch hier die zu (1.a1) und (1.a2) gemachten Bemerkungen.

Sei nun v ein von 0 verschiedenes Element des Primkörpers von K und wie gewohnt \mathbf{p}_i der zu dem Punkt der Parabel mit dem Parameter vi gehörende Ortsvektor. Es gilt dann die Beziehung:

$$(1.c1) \quad \mathbf{p}_{i+3} - \mathbf{p}_i = 3(\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}) \quad i = 0, 1, \dots, q - 1; \pmod{q}.$$

Im Gegensatz zu den Formeln (1.a1) und (1.b1) ist der Koeffizient von $\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}$ in (1.c1) von v unabhängig. Diese algebraische Tatsache entspricht einer überraschenden geometrischen Eigenschaft:

Wird eines der in den Sätzen 1/a bzw. 1/b betrachteten affin-regulären n -Ecke gewählt und werden die von ihm abgeleiteten sternförmigen und n/d -fach belegten affin-regulären n -Ecke gebildet, dann findet man unter diesen Vielecken keine zwei affin-äquivalenten n -Ecke. Das ist analog zum klassischen Fall. Für jedes der in 1/c gegebenen affin-regulären q -Ecke gilt aber, daß es seinen abgeleiteten sternförmigen-affin-regulären q -Ecken affin-äquivalent ist. Es gilt nämlich das folgende Lemma:

Lemma 1. *Es seien \mathbf{p}_i und \mathbf{r}_i $i = 0, 1, \dots, n - 1$ Ortsvektoren, die die Gleichungen*

$$(1.2) \quad \mathbf{p}_{i+3} - \mathbf{p}_i = u(\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1})$$

$$u \in K$$

$$(1.3) \quad \mathbf{r}_{i+3} - \mathbf{r}_i = u(\mathbf{r}_{i+2} - \mathbf{r}_i)$$

erfüllen und P_i bzw. R_i die entsprechenden zugehörigen Punkte. Wenn die Punkte P_i nicht alle in einer Geraden liegen, dann gibt es eine Affinität — eventuell eine entartete Affinität —, welche die Punkte P_i der Reihe nach in die Punkte R_i überführt ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

Beweis. Sind drei beliebige, unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte kollinear, dann sind wegen (1.2) alle Punkte kollinear. Im Sinne der gestellten Bedingung existieren demnach drei aufeinander folgende nicht kollineare Punkte. Ohne die Allgemeingültigkeit einzuschränken, kann angenommen werden, daß diese die Punkte P_0, P_1 und P_3 sind. Bedeute α diejenige Affinität, die das Dreieck $P_0P_1P_2$ in das Dreieck $R_0R_1R_2$ überführt. Werden (1.2) und (1.3) auf $i = 0$ angewendet, erhält man $P_3^{\alpha} = R_3$ und im Falle $n \geq 5$ werden (1.2) und (1.3) der Reihe nach auf $i = 1, 2, \dots, n - 4$ angewandt, erhält man $P_k^{\alpha} = R_k$ für $k = 5, 6, \dots, n - 1$.

Im abschließenden Teil von 1° soll gezeigt werden, daß die angeführten Beispiele und diesen affin äquivalenten n -Ecke die Menge der affin-regulären n -Ecke ausschöpfen. Zu diesem Zweck soll zuerst die Allgemeingültigkeit einer in der euklidischen Ebene wohlbekannten Eigenschaft der affin-regulären n -Ecke nachgewiesen werden.

Lemma 2. *In einer affinen Ebene über dem kommutativen Körper K der Charakteristik $q (\neq 2)$ kann um jedes nichtentartete affin-reguläre n -Eck einen Kegelschnitt umbeschrieben werden. Für $n \geq 5$ ist dieser Kegelschnitt eindeutig bestimmt, und seine Tangente ist in jedem beliebigen n -Eck der durch die beiden Nachbarecken bestimmten Sekante parallel. Unterschreitet die Anzahl der Punkte 5, dann gibt es unter den umbeschriebenen Kegelschnitten einen und nur einen einzigen, für den die letzte Behauptung des vorigen Satzes gültig ist.*

Beweis. Sei zuerst $n = 3$, d. h. $P_0P_1P_2$ ein Dreieck. Mit t_0, t_1 und t_2 werden die durch die Punkte P_0, P_1 und P_2 verlaufenden und den jeweiligen gegenüberliegenden Seiten P_1P_2, P_0P_2 und P_0P_1 parallelen Geraden, ferner durch Γ derjenige Kegelschnitt bezeichnet, der t_0 bzw. t_1 in dem Punkt P_0 bzw. P_1 berührt und auch P_2 enthält. Im Pascalschen Sechseck $P_0P_0P_2P_2P_1P_1$ werden die beiden, aus gegenüberliegenden Seiten bestehenden Seitenpaare t_0 und P_2P_1 bzw. t_1 und P_0P_2 durch parallele Geraden gebildet, und daraus folgt, daß auch die Tangente in Punkt P_2 parallel zu der gegenüberliegenden Seite P_0P_1 ist. Das bedeutet, daß auch t_2 eine Tangente ist, und aus dem Beweis folgt auch, daß dieser Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist.

Ein analoger Weg wird im Falle der affin-regulären Vierecke der Parallelogramma verfolgt. Sei $P_0P_1P_2P_3$ ein Parallelogramma, und bezeichne t_i die durch den Punkt P_i verlaufende und zu der durch die Nachbarecken P_{i-1} und P_{i+1} bestimmten Diagonalen parallele Gerade $i = 0, 1, 2, 3; \text{ mod } 4$. Durch Γ_i bezeichnen wir den Kegelschnitt, der die Gerade t_i im Punkt P_i berührt und auch die anderen Ecken des Vierecks enthält. Im Pascalschen Sechseck $P_iP_iP_{i+1}P_{i+1}P_{i-1}P_{i-1}$ für Γ_i gelten: $t_i = P_iP_i \parallel P_{i+1}P_{i-1}$ und

$P_i P_{i+1} \parallel P_{i-1} P_{i+2}$ und deshalb folgt auch, daß die Γ_i im Punkt P_{i+1} berührende Gerade $t_{i+2} = P_{i+2} P_{i+2}$ parallel zu $P_i P_{i+2}$ ist, d. h. t_{i+2} ist die Tangente von Γ_i im Punkt P_{i+2} . Demnach besitzen die Kegelschnitte Γ_i und Γ_{i+1} vier gemeinsame Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 und eine gemeinsame Tangente im Punkt P_{i+1} , das bedeutet aber, daß sie identisch sind. Wird dieses Ergebnis der Reihe nach auf $i = 0, 1, 2, 3$, angewendet, erhält man $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$. Für $n = 4$ ist damit das Lemma ebenfalls bewiesen.

Es sei nun $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ ein affin-reguläres n -Eck, in dem beliebige fünf, unmittelbar aufeinander folgende Eckpunkte voneinander verschieden sind. Es ergibt sich sofort, daß für $i = 0, 1, \dots, n-1$, die Indizes modulo n gelesen, das Fünfeck $P_{i-2} P_{i-1} P_i P_{i+1} P_{i+2}$ die Eigenschaft besitzt:

$$P_{i-1} P_i \parallel P_{i-2} P_{i+1} \quad \text{und} \quad P_{i-1} P_{i+1} \parallel P_{i-2} P_{i+2},$$

die wir im weiteren kurz π Eigenschaft nennen werden.

Betrachten wir nun den durch das einbeschriebene Fünfeck $P_{i-3} P_{i-2} P_{i-1} P_i P_{i+1}$ eindeutig bestimmten Kegelschnitt Γ_i . Auf Grund der π -Eigenschaft sind in dem Pascalschen Sechseck $P_{i-3} P_{i+1} P_{i-2} P_{i-1} P_{i-1} P_i$ zwei aus gegenüberliegenden Seiten bestehende Seitenpaare Parallelenpaare, und daraus folgt, daß auch das dritte Paar, d. h. die Seiten $t_{i-1} = P_{i-1} P_{i-1}$ und $P_{i-3} P_{i+1}$, ein Parallelepaa bilden, wobei t_{i-1} die Tangente von Γ_i im Punkt P_{i-1} ist. Verföhrt man ähnlich mit dem Pascalschen Sechseck $P_{i-3} P_{i+1} P_{i-2} P_{i-2} P_{i-1} P_i$ ähnlich operieren, erhalten wir daß $t_{i-2} = P_{i-2} P_{i-2} \parallel P_{i-3} P_{i-1}$ gilt.

Dieses Ergebnis wenden wir jetzt auf $i+1$ an, d. h. an die Stelle des betrachteten Fünfecks tritt das Fünfeck $P_{i-2} P_{i-1} P_i P_{i+1} P_{i+2}$. Der um dieses Fünfeck umbeschriebene Kegelschnitt sei Γ_{i+1} und seine Tangenten in P_i und P_{i-1} seien f_i und f_{i-1} . Es gelten $f_i \parallel P_{i-1} P_{i+1}$ und $f_{i-1} \parallel P_{i-2} P_i$.

Da aber wegen der π -Eigenschaften $P_{i-2} P_i \parallel P_{i-3} P_{i+1}$ gilt, folgt für die durch den Punkt P_{i-1} verlaufenden Tangenten $t_{i-1} = f_{i-1}$. Die Kegelschnitte Γ_i und Γ_{i+1} haben also die gemeinsamen Punkte P_{i-2}, P_{i-1}, P_i und P_{i+1} sowie eine gemeinsame Tangente in Punkt P_{i-1} , sind also identisch. Dieses Ergebnis der Reihe nach auf $i = 0, 1, \dots, n-1$ angewendet, erhält man $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \dots = \Gamma_{n-1}$, und das ergibt zusammen mit der Eigenschaft $t_1 \parallel P_{i-1} P_{i+1}$ die Behauptung des Lemmas.

$R_0 R_1 \dots R_{n-1}$ sei nun ein nicht entartetes affin-reguläres n -Eck. Da die affine Regularität affin invariant ist, wird die Untersuchung Eigenschaft nicht beeinträchtigt, wenn das zu benutzende affine Bezugssystem frei angesetzt wird. Wie wählen es nach dem Muster des euklidischen Falls so, daß sich die zugehörige quadratische Form des dem n -Eck umbeschriebenen Kegelschnittes auf eine der Normalformen $xy - 1 = 0$, $y - x^2 = 0$ oder $x^2 - sy^2 - 1 = 0$ reduziert. In der letzten Normalform ist s ein nichtquadratisches Element von K (siehe [3], Lemma 2.58, 2.59). Unter Beibehalten der im

Abschnitt vor dem Hilfssatz eingeführten Parametrisierung bezeichne z_i den Parameter des Punktes R_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Dann kann mit dem Hilfssatz die zweite Aussage des Lemmas 2 in folgende algebraische Form überführt werden.

Ist Γ eine Hyperbel oder eine Ellipse, dann gilt für alle i , die Indizes modulo n gelesen, $z_i^2 = z_{i-1}z_{i+1}$. Wenn Γ eine Parabel, dann gilt ebenfalls für alle i (modulo n) $2z_i = z_{i-1} + z_{i+1}$.

Nun sei Γ eine Hyperbel oder eine Ellipse. Aus dem Zusammenhang $z_i^2 = z_{i-1}z_{i+1}$ kann der Parameter z_i rekursiv als Funktion lediglich von z_0 und z_1 errechnet werden: $z_i = z_1^i z_0^{1-i}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Bezeichne \mathbf{r}_i den zu R_i gehörenden Ortsvektor, dann kann das Verhältnis der Vektoren $\mathbf{r}_{i+3} - \mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_{i+2} - \mathbf{r}_{i+1}$ von der Formel $z_i = z_1^i z_0^{1-i}$ ausgehend den aus der euklidischen Geometrie gewohnten Methoden entsprechend mit Hilfe der Parameter ausgedrückt werden:

$$(1.4) \quad \mathbf{r}_{i+3} - \mathbf{r}_i = (z_1^2 + z_0 + 1) z_1^{-1} (\mathbf{r}_{i+2} - \mathbf{r}_{i+1}); \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beachten wir noch eine weitere Folge von $z_i = z_1^i z_0^{1-i}$: Da $z_{i+n} = z_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), ist z_1 ein Element n -ter Ordnung, und es können die Sätze 1 a und 1 b angewendet werden: Es seien der Punkt mit dem Parameter z_i^i und \mathbf{p}_i der zugehörige Ortsvektor. Dann ist $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ ein affin-reguläres n -Eck und es gilt:

$$(1.5) \quad \mathbf{p}_{i+3} - \mathbf{p}_i = (z_1^2 + z_1 + 1) z_1^{-1} (\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}); \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Wird der obige Gedankengang verfolgt, erhält man wenn eine Parabel ist, zuerst: $z_i = z_0 + (z_1 - z_0) i$, und daraus im weiteren $z_{i+n} = z_i$ $i = 0, 1, \dots, n-1$. Da die Punkte R_i und damit auch alle Parameter z_i verschieden sind, ergibt sich $n = q$, wobei q die Charakteristik des Körpers K bedeutet. Es sei bemerkt, daß die Behauptung in (1.4) jetzt die folgende Form annimmt:

$$(1.6) \quad \mathbf{r}_{i+3} - \mathbf{r}_i = 3(\mathbf{r}_{i+2} - \mathbf{r}_{i+1}); \quad i = 0, 1, \dots, q-1.$$

Es sei nun P_i der Punkt der Parabel mit der Koordinaten (i, i^2) $i = 0, 1, \dots, q-1$. Nach dem Satz 1/c ist $P_0 P_1 \dots P_{q-1}$ ein affin-reguläres q -Eck und es gilt für die zugehörigen Vektoren \mathbf{p}_i :

$$(1.7) \quad \mathbf{p}_{i+3} - \mathbf{p}_i = 3(\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}) \quad i = 0, 1, \dots, q-1.$$

Aus der Zusammenfassung von 1.4 und 1.5 sowie 1.6 und 1.7 ergibt sich auf der Grundlage des Lemmas 1 für nicht entartete Vielecke der folgende Satz:

Satz 2. In einer affinen Ebene über einem kommutativen Körper der Charakteristik $q (\neq 2)$ sind die affin-regulären Vielecke und deren affine Bilder.

Wir bemerken hier, daß dieser Satz Gültigkeit offensichtlich auch für n/d -fach belegte, affin-reguläre n -Ecke behält. Tatsächlich sind auch die aus affin-äquivalenten, affin-regulären n -Ecken abgeleiteten, n/d -fach belegten, affin-regulären n -Ecken abenfalls affin-äquivalent.

2°. Die Untersuchung der nach geometrischen Gesichtspunkten beziehungsweise auf algebraischem Wege definierten Begriffe des affin-regulären Vielecks auf ihre Äquivalenz

Es seien K ein kommutativer Körper der Charakteristik $q (\neq 2)$ und $F_n(x)$ das zu K gehörige Kreisteilungspolynom n -ter Ordnung falls $(q, n) = 1$ (siehe [2] § 188). Es ist bekannt, daß in einem zu $x^n - 1$ gehörigen Zerlegungskörper $F_n(x)$ die folgende Form besitzt:

$$F_n(x) = \begin{cases} (x - 1) G_n(x) & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (x^2 - 1) G_n(x) & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

wobei $G_n(x)$ das Produkt von symmetrischen quadratischen Faktoren ist. In jedem dieser Faktoren $x^2 - cx + 1$ ergibt sich der Koeffizient c als Summe einer primitiven n -ten Einheitswurzel und deren Inversen, und umgekehrt liefert die Summe jeder primitiven n -ten Einheitswurzel und deren Inversen einen solchen Koeffizienten c .

Gegeben sei eine affine Ebene, deren Koordinatenstruktur der vorgegebene Körper K ist und nehmen wir an, daß $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1})$ ein in algebraischem Sinne affin-reguläres n -Eck in dieser Ebene ist. Nach der Definition bedeutet das, daß für ein beliebiges $i = 0, 1, \dots, n - 1$ die Indizes mod n gedeutet

$$(2.1) \quad \mathbf{r}_{i+2} - c\mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$$

gilt, wobei $c \in K$, und $x^2 - cx + 1$ ein symmetrischer quadratischer Faktor von $F_n(x)$ ist. Da sich in jedem dieser Faktoren c als Summe einer geeigneten primitiven n -ten Einheitswurzel — durch v bezeichnet — und deren Inversen darstellen läßt, ist (2.1) gleichwertig mit

$$(2.2) \quad \mathbf{r}_{i+2} + \mathbf{r}_i = (v + v^{-1}) \mathbf{r}_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1; \text{ mod } n).$$

Wenn $v \in K$ gilt, dann ist v ein Element n -ter Ordnung des Körpers K , d. h. im Sinne des Satzes 1/a ist den Punkt der Hyperbel $xy - 1 = 0$ mit dem Parameter v^i durch P_i bezeichnet, ist $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ ein im geometrischen Sinne

affin-reguläres n -Eck. Wir bezeichnen mit \mathbf{p}_i die zu den P_i gehörenden Ortsvektoren. Auf der Grundlage von Formel (1.a2) gilt dann

$$(2.3) \quad \mathbf{p}_{i-2} + \mathbf{p}_i = (v + v^{-1}) \mathbf{p}_{i-1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; \text{ mod } n)$$

und aus den Formeln (2.2) und (2.3) erhalten wir mit Hilfe des Lemmas 1 das Ergebnis:

Wenn $v \in K$ gilt, d. h. wenn der entsprechende symmetrische quadratische Faktor von $G_n(x)$ als Produkt linearer Faktoren über K dargestellt werden kann, dann ist jedes zu diesem Faktor gehörige und in algebraischem Sinne affin-reguläre n -Eck das affine Bild eines in eine Hyperbel einbeschriebenen in geometrischem Sinne affin-regulären n -Ecks, auch die entarteten Fälle inbegriffen.

In analoger Art gehen wir auch im Falle $v \notin K$ vor. Im Zerlegungskörper von x^{n-1} ist der durch K und v erzeugte Teilkörper eine Erweiterung zweiter Ordnung von K durch K^* bezeichnet —, da v eine Wurzel der über K irreduziblen Gleichung $x^2 - cx + 1 = 0$ ist. Diese Erweiterung kann auch mit der Wurzel θ der über K ebenfalls irreduziblen Gleichung $\theta^2 = c^2 - 4$ und deren Adjungierten verwirklicht werden; $K^* = \{K, \theta \mid \theta^2 = c^2 - 4\}$. In der multiplikativen Gruppe von K ist v offensichtlich ein Element n -ter Ordnung, und da jetzt $v = (c + \theta)/2$ sowie $\bar{v} = (c - \theta)/2$ gelten, folgt auch $v\bar{v} = 1$. Es kann also der Satz 1 b angewendet werden: Der Punkt der Ellipse $x^2 - (c^2 - 4)y^2 - 1 = 0$ mit dem Parameter v^i sei durch P_i und der dazugehörige Ortsvektor durch \mathbf{p}_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) bezeichnet. Dann ist $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ ein in geometrischem Sinne affin-reguläres n -Eck und es gilt

$$(2.4) \quad \mathbf{p}_{i-3} + \mathbf{p}_i = (v + v^{-1}) \mathbf{p}_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \text{ mod } n).$$

Ähnlich wie im vorigen Fall folgt aus (2.2) und (2.4) mit Hilfe des Lemma 1 das Ergebnis:

Wenn $v \notin K$, d. h. falls der entsprechende symmetrische quadratische Faktor von $G_n(x)$ über K nicht in zwei lineare Faktoren über K zerfällt, dann ist jedes zu diesem Faktor gehörige im algebraischen Sinne affin-reguläre n -Eck das affine Bild eines in eine Ellipse einbeschriebenen, in geometrischem Sinne affin-regulären n -Ecks, auch die entarteten Fälle inbegriffen.

$P_0P_1 \dots P_{n-1}$ sei nun ein im geometrischen Sinne affin-reguläres n -Eck, dessen umbeschriebener Kegelschnitt eine Hyperbel oder eine Ellipse ist. Nach dem letzten Satz in Abschnitt 1° ist $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ einem 1/a bzw. 1/b entsprechend gegebenen, im geometrischen Sinne affin-regulären n -Eck affin äquivalent. Aus den Formeln (1.a2) bzw., (1.b2) ergibt sich, da $\mathbf{p}_{i+2} + \mathbf{p}_i = (v + v^{-1}) \mathbf{p}_{i+1}$ gilt, wobei der zu P_i gehörige Ortsvektor \mathbf{p}_i ist und v eine primitive n -te Einheitswurzel bedeutet. Bemerken wir noch, da $v + v^{-1} \in K$ gilt, und beachten wir weiterhin, daß jetzt $x^2 - (v + v^{-1})x + 1$ ein sym-

metrischer quadratischer Faktor von $F_n x$ ist, dann erhält man, daß $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1})$ ein im algebraischen Sinne affin-reguläres n -Eck ist.

Die in diesem Abschnitt hervorgehobenen zwei Ergebnisse und die Erkenntnisse aus dem letzten Abschnitt liefern die Gültigkeit des Satzes:

Satz 3. *Die im algebraischen Sinne affin-regulären n -Ecke sind mit jenen im geometrischen Sinne affin-regulären n -Ecken identisch, deren umbeschriebener Kegelschnitt eine Hyperbel oder eine Ellipse ist, beziehungsweise mit denen die als Projektion letzterer auf eine Gerade gewonnen werden können oder mit einem einzigen n -fach belegten Punkt, dem Grundpunkt des Bezugssystems.*

Führen wir nochmals den abschließenden Satz aus 1° an: Ein im geometrischen Sinne affin-reguläres n -Eck ist das affine Bild eines der in Satz 1 angegebenen affin-regulären n -Ecke. Demnach ist der umbeschriebene Kegelschnitt stets eine Hyperbel oder eine Ellipse, falls die Charakteristik des Koordinatenkörpers K gleich 0 ist; im Falle einer ungeraden Charakteristik kann hingegen der Kegelschnitt auch eine Parabel sein. Auf Satz 3 zurückblickend ergibt sich neben gewissen Voraussetzungen die Gleichheit der zwei unterschiedlichen, auf geometrischen bzw. algebraischen Gesichtspunkten beruhenden Definitionen des affin-regulären n -Ecks.

Satz 4. *Wenn die Koordinatenstruktur einer affinen Ebene ein Körper von Charakteristik 0 ist, dann umfassen unter Ausschluß der Entartungen die in geometrischem bzw. die in algebraischem Sinne affin-regulären Vielecke die gleiche Klasse von Vielecken. Falls aber die Charakteristik des Koordinatenkörpers eine mit q bezeichnete ungerade Primzahl ist, dann gibt es q -Ecke, die im geometrischen Sinne affin-regulär sind und im algebraischen Sinne nicht. Die letztere Klasse wird durch die in Satz 1/c angegebenen, im geometrischen Sinne affin-regulären q -Ecke und deren affinen Bildern gebildet.*

3°. Die algebraische Entsprechung des im geometrischen Sinne affin-regulären n -Ecks

Es seien K ein kommutativer Körper der Charakteristik q ($\neq 2$) und d ein von 0 verschiedenes Element von K . Je nachdem ob $(d-1)^2 - 4$ ein quadratisches Element in K ist oder nicht, hat d entweder in K oder in $K^* = \{K, \vartheta \mid \vartheta^2 = (d-1)^2 - 4\}$ die Form $d = (v^2 + v + 1) v^{-1}$.

Beim Beweis von Satz 1, genauer bei den zu den Formeln (1.a1) und (1.b1) gemachten Behauptungen, sahen wir da, falls $v \neq 1$ gilt und v eine n -te Einheitswurzel ist, daß ein solches affin-reguläres n -Eck oder n/d -fach belegtes affin-reguläres n -Eck $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ existiert, daß

$$(3.1) \quad \mathbf{p}_{i+3} - \mathbf{p}_i = (v^2 + v + 1) v^{-1} (\mathbf{p}_{i+2} - \mathbf{p}_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

modulo n gilt, wobei \mathbf{p}_i der zum Punkt P_i gehörende Ortsvektor ist. Das bedeutet im betrachteten Fall, daß v ein Element n -ter Ordnung der multiplikativen Gruppe von K bzw. K^* ist. Wir bemerken, daß es im Falle einer ungeraden Primzahl q auch bei $v = 1$, d. h. $d = 3$ ein solches affin-reguläres q -Eck $P_0P_1 \dots P_{q-1}$ gibt, so daß die zu den Eckpunkten P_i gehörenden Ortsvektoren \mathbf{p}_i die Bedingungen 3.1 erfüllen. Solche sind zum Beispiel die im Satz 1/c betrachteten affin-regulären q -Ecke.

Da jedes n -Eck $R_0R_1 \dots R_{n-1}$ — die entarteten Fälle mitinbegriffen — dessen zugehörige Orstvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}$ das Gleichungssystem (3.1) erfüllen, d. h. wo für alle ganzen Zahlen i , wobei die Indizes modulo n gelesen

$$(3.2) \quad \mathbf{r}_{i+3} - \mathbf{r}_i = (v^2 + v + 1) v^{-1} (\mathbf{r}_{i+2} - \mathbf{r}_{i+1})$$

gilt, wobei v eine n -te Einheitswurzel, nach Lemma 1 das affine Bild eines geeigneten affin-regulären bzw. n/d -fach belegten affin-regulären n -Eck $P_0P_1 \dots P_{n-1}$ ist (die entarteten Affinitäten inbegriffen), sind die aus den Lösungen des Gleichungssystems 3.2 gewonnen $R_0R_1 \dots R_{n-1}$ n -Ecke nichts anderes als die im geometrischen Sinn affin-regulären n -Ecke, n/d -fach belegten affin-regulären n -Ecke sowie deren Projektionen auf eine Gerade oder die Punkte der Ebene. Im letzten Fall ist der Punkt als n -fach belegt anzusehen.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird näher analysiert, wie sich der in [2] definierte Begriff des affin-regulären n -Ecks zu der geometrischen Vorstellung von einem affinen Bild eines regulären n -Ecks verhält.

Literatur

1. ARTIN E.: *Galoissche Theorie*. Leipzig, 1959.
2. BACHMANN F.—SCHMIDT E.: *n-Ecke*. Hochschultaschenb. Verlag Mannheim, Wien, Zürich, 1970.
3. KORCHMÁROS G.: *Véges affin síkok oválisaiból kiválasztható reguláris pontalakzatok*. Doktori értekezés Budapest, 1972.
4. G. KORCHMÁROS: *Poligoni affin-regolari nei piani di Galois d'ordine dispari*. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti, 8, LVI-I, sem fasc. V. pp. 690—697, 1974.
5. F. PIPER—D. HUGHES: *Projectiv Planes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, Band 6. 1973.

Dr. Gábor KORCHMÁROS, H-1521 Budapest