DAS INSTATIONÄRE GESCHWINDIGKEITSFELD DER ZWEIDIMENSIONALEN LAMINARSTRÖMUNG ZWISCHEN KOAXIALEN ZYLINDERN

Von

F. Konecsny

Lehrstuhl für Aero- und Thermotechnik Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 4. März 1975)

Vorgelegt von Prof. Dr. E. Pásztor

1. Problemstellung

Die nähere Untersuchung der sich zwischen koaxialen Zylindern herausbildenden Strömung zäher Flüssigkeiten ist zur Lösung vieler praktischen Aufgaben erforderlich.

Für eine Gruppe der Anwendungen soll die die mechanische Energie der Strömung vermindernde Dissipationsleistung bestimmt werden. Dazu werden hier zwei Beispiele angeführt.

Der störungsfreie Betrieb von Gleitlagern ist gesichert, wenn die Schmierölviskosität zu jedem Zeitpunkt dem vom Konstrukteur bei der Annahme des Gleitlagerspieles berücksichtigten Wert entspricht. Dies erfordert bei einer gegebenen Schmierölsorte das Konstanthalten der Gleitlagertemperatur auf einem bestimmten Wert; die während des Betriebes entwickelte Reibungswärme soll also kontinuierlich abgeführt werden. Bei einem richtig bemessenen Gleitlager ist die Reibung eine reine Flüssigkeitsreibung, somit ist die je Zeiteinheit entstandene Wärme gleich der Dissipationsleistung.

Zur Dämpfung von Torsionsschwingungen mit nicht all zu grosser Energie (z. B. bei Filmprojektoren) wird oft eine zähe Flüssigkeit verwendet, um den Zwischenraum zwischen zwei gegeneianander verdrehbaren, koaxialen Zylindern auszufüllen. Durch die kontinuierliche Abführung der in der Flüssigkeit irreversibel in Wärme umgewandelten mechanischen Energie aus dem mit den Zylindern in Verbindung stehenden Schwingungssystem werden die Torsionschwingungen gedämpft. In Kenntnis der während der vollen Schwingungsdauer geleisteten Dissipationsarbeit kann das für die Schwingung kennzeichnende logarithmische Dekrement berechnet werden.

Um die in den beiden herausgegriffenen Beispielen erwähnte Dissipationsleistung bzw. Dissipationsarbeit zu bestimmen, ist die Kenntnis der räumlichen und zeitlichen Geschwindigkeitsverteilung erforderlich, da die Dissipationsfunktion aus den partiellen Differentialquotienten der Geschwindigkeitskomponenten aufgebaut ist. (S. z. B. [1] [2].)

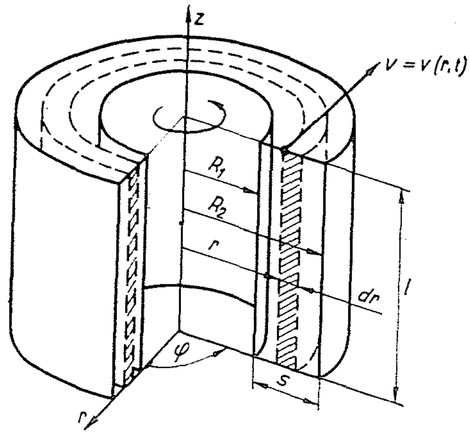

Abb. 1

Das Gebiet der in rotationssymmetrischen Räumen entstehenden konvektiven Wärmeübertragung bildet eine nicht minder wichtige Gruppe der Anwendungen, wo die Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes zum Zwecke der Berechnung der Wärmeübergangszahl unerläßlich ist.

Als Beispiel kann die Kühlung der Wellen der Rauchgasventilatoren in Kesselbetrieben erwähnt werden, wo die zu kühlende Welle von den heißen Rauchgasen durch ein koaxiales Rohr mit Wärmeisolierung getrennt ist. Die Kühlluft durchströmt den durch Welle und Rohr begrenzten kreisringförmigen Querschnitt in der Richtung von der atmosphärischen Umgebung nach dem Ventillatorausstrittsstump (s. [3] Abb. 116). Eine im wesentlichen ähnliche Lösung der Kühlaufgabe findet man auch bei den Wellen einiger Gasturbinenanlagen. Die Kühlwirkung der Strömung zwischen koaxialen Zylinderflächen wird bei den neuerdings stark verbreiteten Rotations-Wärmetauschern großer Leistungsdichten ausgenützt, wo die Intensität des Wärmeüberganges durch die Rotation des die eine Wärmeübertragungsfläche bildenden Zylinders erhöht wird [4].

Für jedes der angeführten Beispiele ist kennzeichnend, daß sich die beiden das Strömungsfeld begrenzenden Zylinder im Verhältnis zueinander um eine gemeinsame z-Achse mit in der Zeit konstanter oder veränderlicher Winkelgeschwindigkeit ω verdrehen. (Die Geometrie der Aufgabe siehe in Abb. 1). Wegen der Haftbedingung der zähen Flüssigkeiten wird — unabhängig davon, ob eine axiale Durchströmung vorhanden ist (z. B. bei Rotationswärmetäuschern) oder nicht (z. B. bei den Torsionsschwingungsdämpfern) —, die Strömungsgeschwindigkeit auf jeden Fall eine Komponente in der auf die z-Achse senkrechten Ebene haben. Ist im Vergleich mit der Breite $R_2 - R_1 = s$ der durch die Zylinder gebildeten kreisringförmigen Spaltes die Länge l des Kanals genügend groß, dann sind die Verteilungen der Strömungskenngrößen in den zueinander parallelen Ebenen z = const. gleich.

In diesem Beitrag beschäftigen wir uns mit einer solchen rotationssymmetrischen zweidimensionalen Strömung unter den folgenden Voraussetzungen:

— das strömende Medium ist eine inkompressible, zähe Newtonsche Flüssigkeit;

— der Strömungsraum in Abb. 1 wird durch die unendlich langen ($l \to \infty$) koaxialen Zylinder mit den Radien R_1 und R_2 begrenzt und die Punkte dieses Raumes können mit den Zylinderkoordinaten r, φ und z angegeben werden;

— die Strömung ist in den Ebenen $z =$ const. eine laminare Strömung, deren Stromlinien konzentrische Kreise sind.

Unter Berücksichtigung der genannten Bedingungen darf ausgesagt werden, daß die Strömungskenngrößen nur von der Koordinate r und von der Zeit t abhängen, ferner sind die axiale und die radiale Komponente des Geschwindigkeitsvektors $\bar{v}$ gleich Null. Damit genügt für die Kennzeichnung des Strömungsfeldes die die azimutale Geschwindigkeitskomponente beschreibende Funktion $v = v(r, t)$ (wobei $v = |\bar{v}|$).

Das Ziel dieses Beitrages ist die Bestimmung dieser Funktion für den allgemeineren Fall, in dem die Umfangsgeschwindigkeit V des inneren Zylinders mit dem Radius R_1 in der Zeit veränderlich ist: $V = V(t)$.

Die Voraussetzung der Laminarität bedeutet, daß die auf den Trennfächen der sich übereinander verschiebenden Flüssigkeitsschichten auftretenden Schubspannungen τ nach Newton als dem auf die Strömungsrichtung senkrechten Geschwindigkeitsgradienten proportional betrachtet werden.

Im angesetzten Koordinatensystem kann diese Bedingung mit der gesuchten Geschwindigkeit $v(r, t)$ in der Form

$$\tau = \varrho \nu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)$$

aufgeschrieben werden, wobei ϱ die Dichte und ν die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit bedeuten. Unter Anwendung des obigen Zusammenhanges kann aus der Bewegungsleichung des sich um die z-Achse mit einer Umfangsgeschwindigkeit $v(r, t)$ drehenden Flüssigkeitselements mit den Volumen $2\pi r dr l$ die folgende lineare, homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten abgeleitet werden [5]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \tag{1}$$

deren die Nebenbedingungen befriedigendes Integral $v = v(r, t)$ die Lösung der Aufgabe ergibt.

Die die für den Mantel des inneren Zylinders vorgeschriebenen Randbedingung $v(R_1, t) = V(t)$ befriedigende Lösung wird mit einer Funktion der

Form $\psi = \psi(r, t)$ hergestellt, die in dem Kreisringbereich $R_1 \leqq r \leqq R_2$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right] \tag{2}$$

die Anfangsbedingung bezogen auf $t = 0$

$$\psi(r, 0) = 0 \tag{3}$$

und schließlich die auf die Orte $r = R_1$ und $r = R_2$ bezogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \psi(R_1, t) &= 1 \\ \psi(R_2, t) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

erfüllt. Aus den Gl.(2), (3) und (4) ist ersichtlich, daß die Funktion ψ physikalisch als die zu dem Einheitssprung,

$$\begin{aligned} V(t) &= 0 \qquad t \leqq 0 \\ V(t) &= 1 \qquad t > 0 \end{aligned}$$

als durch den Zylinder mit dem Radius R_1 bedingter Randbedingung, gehörende Geschwindigkeitsfunktion angegeben werden kann.

Die allgemeine Lösung der Probleme (2)—(4) wird in der Form

$$\psi(r, t) = \psi_{\mathrm{I}}(r) + \psi_{\mathrm{II}}(r, t) \tag{5}$$

gesucht, wobei die Funktion $\psi_{\mathrm{I}}(r)$ die dem inhomogenen Randbedingungssystem

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{I}}(R_1, t) &= 1 \\ \psi_{\mathrm{I}}(R_2, t) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

der Gl.(6) entsprechende partikulare Lösung, und $\psi_{\mathrm{II}}(r, t)$ die das Randbedingungssystem

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{II}}(R_1, t) &= 0 \\ \psi_{\mathrm{II}}(R_2, t) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

und die Anfangsbedingung

$$\psi_{\mathrm{II}}(r, 0) = -\psi_{\mathrm{I}}(r) \tag{8}$$

befriedingende allgemeine Lösung ist.

2. Die Lösung bei einheitssprungförmiger Randbedingung

Zu einer Partikulärlösung der Form $\psi_I(r)$ führt die Überlegung, daß nach einer von dem Zeitpunkt $t = 0$ gerechneten (theoreitsch unendlich langen) Anlaufzeit sich in der Flüssigkeit die dem stationären Zustand entsprechende Geschwindigkeitsverteilung einstellt, die nur eine Funktion des Ortes ist. Wird dieser Annahme gemäß die Lösung der Form

$$\psi_I(r) = \frac{a}{r} + br$$

der aus der Differentialgleichung (2) erhaltenen bekannten Eulerschen gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 \psi_I}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\psi_I}{dr} - \frac{\psi_I}{r^2} = 0$$

als die gesuchte Partikulärlösung betrachtet, können die Werte der Konstanten a und b unter Anwendung der Randbedingungen (4) bestimmt werden:

$$a = \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} R_2^2,$$

$$b = \frac{-R_1}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Somit ergibt sich die die Randbedingungen der inhomogenen Gleichung befriedigende Partikulärlösung zu

$$\psi_I(r) = \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right). \tag{9}$$

Es ist zu erkennen, daß die Funktion ψ_I die Anfangsbedingung (3) nicht befriedigt. Es ist verständlich, daß von der allgemeinen Lösung $\psi_{II}(r, t)$ der homogenen Aufgabe die Erfüllung der Anfangsbedingung (8) gefordert wird.

Es wird versucht, die die Nebenbedingungen (7) und (8) erfüllende Funktion $\psi_{II}(r, t)$ als Produkt aus der nur ortsabhängigen Funktion $y(r)$ und aus der Zeitabhängigen Funktion $u(t)$ herzustellen:

$$\psi_{II}(r, t) = y(r) \cdot u(t).$$

Es ist bekannt, daß damit die Lösung von Gl.(2) auf die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dt} = -\nu \left(\frac{\lambda}{R_1}\right)^2$$

und

$$\frac{d^2 y}{dr^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{dy}{dr} + \left(\frac{\lambda^2}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right) y = 0$$

zurückgeführt wird, wo λ eine beliebige reelle Konstante ist.

Nach Trennung der Variablen erhält man:

$$u(t) = C_1 e^{-\nu\left(\frac{\lambda}{R_1}\right)^2 t}.$$

Dies zeigt, daß die Funktion $\psi_{II}(r, t)$ (die eigentlich die Abweichung von dem stationären Zustand zum Ausdruck bringt) mit vorrückender Zeit eine immer geringere Rolle spielt. (Damit läßt sich die Annahme der negativen Konstante $-(\lambda/R_1)^2$ begründen).

Die allgemeine Lösung der auf y bezogenen Besselschen Gleichung ersten Grades lautet bekanntlich:

$$y(r) = Z_1\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right) = C_2\, I_1\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right) + C_3 N_1\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right),$$

wobei $I_1\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right)$ bzw. $N_1\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right)$ Besselfunktionen erster bzw. zweiter Art mit dem Index 1 und mit dem Argument $\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right)$ sind.

Mit den Bezeichnungen $C_1 C_2 = A$ und $C_1 C_3 = B$ erhält man die allgemeine Lösung der homogenen Aufgabe dem Produktenansatz gemäß in der Form

$$\psi_{II}(r, t) = e^{-\nu\left(\frac{\lambda}{R_1}\right)^2 t}\left[A I_1\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right) + B N_1\left(\frac{\lambda}{R_1} r\right)\right]. \tag{10}$$

Die Randbedingung (7) und die Anfangsbedingung (8) dienen zur Bestimmung der Konstanten A, B und λ.

Die Bestimmung der Unbekannten A und B führt unter Anwendung der Randbedingung (7) mit der Bezeichnung $k = R_2/R_1$ zu einem linearen homogenen Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} A I_1(\lambda) + B N_1(\lambda) &= 0 \\ A I_1(\lambda k) + B N_1(\lambda k) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

dessen nichttriviale Lösung bei Erfüllung der Bedingung

$$\Delta(\lambda, k) = \begin{vmatrix} I_1(\lambda) & N_1(\lambda) \\ I_1(\lambda k) & N_1(\lambda k) \end{vmatrix} = 0$$

erhalten wird. (Wegen ihrer Rolle in der Schwingungstechnik wird diese Gleichung auch als Frequenzgleichung bezeichnet.) Bei einem festgelegten Parameter k besitzt die Frequenzgleichung unendlich viele Nullstellen (Eigenwerte), die sich mit den unendlich vielen Eigenfunktionen der Form

$$y_i = A_i\, I_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right) + B_i\, N_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right)$$

ergebenden Funktionen

$$\psi_{\mathrm{II}\cdot i}(r, t) = e^{-\nu\left(\frac{\lambda_i}{R_1}\right)^2 t}\left[A_i\, I_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right) + B_i\, N_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right)\right]$$

können also alle die Lösungen der homogenen Aufgabe sein.

Dasselbe kann wegen der Linearität der Differentialgleichung (2) von der aus den Funktionen $\psi_{\mathrm{II}\cdot i}$ gebildeten unendlichen Reihe

$$\psi_{\mathrm{II}}(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\nu\left(\frac{\lambda_i}{R_1}\right)^2 t}\left[A_i I_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right) + B_i\, N_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right)\right] \tag{12}$$

ausgesagt werden.

Das Gleichungssystem (11) bestimmt in Kenntnis der Eigenwerte nur das Verhältnis der entsprechenden Koeffizienten:

$$\frac{B_i}{A_i} = -\frac{I_1(\lambda_i k)}{N_1(\lambda_i k)} = -\frac{I_1(\lambda_i)}{N_1(\lambda_i)}\,. \tag{13}$$

Einer der Koeffizienten — z. B. der Wert von A_i — kann aus der Anfangsbedingung (8) berechnet werden, danach ergibt sich der andere aus (13).

Unter Berücksichtigung des Zusammenhanges (13) zwischen den Koeffizienten A_i und B_i besteht der Anfangsbedingung gemäß die Identität

$$-\psi_{\mathrm{I}}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i\left[I_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right) - \frac{I_1(\lambda_i k)}{N_1(\lambda_i k)} N_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r\right)\right]. \tag{14}$$

Dies bedeutet, daß man die mit Gl.(9) angegebene Funktion in ihrem Deutungsbereich in eine nach Zylinderfunktionen verlaufende Reihe zu entwickeln hat. Die Aufgabe ist eindeutig lösbar, die unendliche Reihe stellt die Funktionen her, da die in Reihe zu entwickelnde Funktion $-\psi(r)$ im Deutungsbereich $R_1 \leqq r \leqq R_2$ den dirichletschen Reihenentwicklungsbedingungen hinsichtlich der Stetigkeit und Monotonie entspricht. Als einziges Problem bleibt somit die Bestimmung der Koeffizienten A_i der Reihe.

Für diesen Zweck wird die Eigenschaft der unter Berücksichtigung von (13) in der Form

$$y_{i1} = A_i \left[I_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) - \frac{I_1(\lambda_i k)}{N_1(\lambda_i k)} N_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \right]$$

geschriebenen Eigenfunktion und der in der folgenden Form definierten Konjugierten

$$\bar{y}_{j1} = A_j \left[I_j \left(\frac{\lambda_j}{R_1} r \right) + \frac{I_1(\lambda_j k)}{N_1(\lambda_j k)} N_1 \left(\frac{\lambda_j}{R_1} r \right) \right]$$

einer anderen Eigenfunktion y_{j1} verwendet, daß im Kreisringbereich $F: R_1 \leqq$ $\leqq r \leqq R_2$ das Produkt ihrer Flächenintegrale verschwindet:

$$\int_F y_{i1} \bar{y}_{j1} \, dF = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} y_{i1} \bar{y}_{j1} \, r dr = 0 \qquad (i \neq j).$$

(Das Nachweisen der als Orthogonalität der Funktionen y_{i1} und $\bar{y}_{j1}$ bezeichneten Eigenschaft siehe z. B. in [5].)

Zur Bestimmung der Koeffizienten A_i sollen die beiden Seiten der Gl.(14) mit dem Ausdruck

$$r \left[I_1 \left(\frac{\lambda_j}{R_1} r \right) + \frac{I_1(\lambda_j k)}{N_1(\lambda_j k)} N_1 \left(\frac{\lambda_j}{R_1} r \right) \right]$$

multipliziert werden, wonach eine Integration zwischen den Grenzen R_1 und R_2 durchzuführen ist. In diesem Fall verschwinden wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen alle Glieder der rechten Seite mit Ausnahme des Gliedes mit dem index $j = i$. Aus dem nicht verschwindenden Glied erhält man

$$A_i = -\frac{1}{\chi} \int_{R_1}^{R_2} \psi_1(r) \left[I_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) + \frac{I_1(\lambda_i k)}{N_1(\lambda_i k)} N_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \right] dr \ ,$$

wobei

$$\chi = \int_{R_1}^{R_2} \left[I_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) - \frac{I_1(\lambda_i k)}{N_1(\lambda_i k)} N_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \right] \left[I_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) + \frac{I_1(\lambda_i k)}{N_1(\lambda_i k)} N_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \right] r dr$$

ist.

Wird aus Gl.(9) der Wert von $\psi_1(r)$ eingesetzt, sind bei der Berechnung von A_1 und χ Integrale folgender Typen zu bestimmen:

$$I_1 = \int Z_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) dr \qquad (I_1)$$

$$I_2 = \int Z_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) r^2\, dr \qquad (I_2)$$

$$I_3 = \int \left[Z_1 \frac{\lambda_i}{R_1} \right]^2 r dr \qquad (I_3)$$

wobei $Z_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right)$ die Besselsche Funktion erster oder zweiter Art mit dem Argument $\left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right)$ bedeuten kann.

Die Berechnung der Integrale (I_1) und (I_2) erfolgt mit der neuen Variablen $\xi = \frac{\lambda_i}{R_1} r$. Somit erhält man

$$r = \xi \frac{R_1}{\lambda_i} \quad \text{und} \quad dr = \frac{R_1}{\lambda_i} d\xi .$$

Für das Integral Typ I_1 ergibt sich somit (s. z. B. [6] S. 148, Gl. 68)

$$I_1 = \frac{R_1}{\lambda_i} \int Z_1(\xi)\, d\xi = - \frac{R_1}{\lambda_i} Z_1(\xi) ,$$

und für das Integral Typ I_2 (s. z. B. [6] S. 149, Gl.6.2. und S. 148, Gl. 4.1.)

$$I_2 = \left(\frac{R_1}{\lambda_i} \right)^3 \int Z_1(\xi)\, \xi^2 d\xi = \left(\frac{R_1}{\lambda_i} \right)^2 \xi^2 \left[\frac{2}{\xi} Z_1(\xi) - Z_0(\xi) \right] .$$

Das Integral Typ I_3 kann ohne Substitution unmittelbar berechnet werden (s. z. B. [6] S. 149, Gl. 6.6. und S. 148, Gl. 4.8.):

$$I_3 = \int \left[Z_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \right]^2 r dr =$$

$$= \frac{r^2}{2} \left\{ \left[Z_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \right]^2 - Z_0 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \left[2 \frac{R_1}{\lambda_i} Z_1 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) - Z_0 \left(\frac{\lambda_i}{R_1} r \right) \right] \right\} .$$

Nach dem Einsetzen der Grenzen $r = R_1$ und $r = R_2$ (bzw. der entsprechenden $\xi = \lambda_i$ und $\xi = \lambda_i k$) in die Integrale erhält man nach einiger Zwischenberechnung:

$$A_i = \frac{1}{\lambda_i (k^2 - 1)} \; \frac{\frac{4k}{\lambda_i} [I_1(\lambda_i k) - I_1(\lambda_i)] + (1 - k^2) I_1(\lambda_i) \left[\frac{I_0(\lambda_i)}{I_1(\lambda_i)} + \frac{N_0(\lambda_i)}{N_1(\lambda_i)} \right]}{k^2 g(\lambda_i k) - (\lambda_i)}$$

wobei

$$g(\alpha)=[I_1(\alpha)]^2\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\frac{N_0(\alpha)}{N_1(\alpha)}-\frac{I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)}\right]-\left[\left(\frac{N_0(\alpha)}{N_1(\alpha)}\right)^2-\left(\frac{I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)}\right)\right]\right\}$$

ist.

Die homogene Aufgabe wird mit der Bestimmung der Koeffizienten A_i und B_i nach Gl. (13) vollkommen gelöst. Bei einer einheitssprungartigen Randbedingung nach (5) wird also für die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung die Funktion

$$\psi(r,t)=\frac{R_1}{R_2^2-R_1^2}\left(\frac{R_2^2}{r}-r\right)+\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\nu\left(\frac{\lambda_i}{R_1}\right)t}\left[A_iI_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1}r\right)+B_iN_1\left(\frac{\lambda_i}{R_1}r\right)\right] \tag{15}$$

als eine orts- und zeitabhängige Funktion erhalten.

3. Die Randbedingung ist eine stetige Funktion der Zeit

Um die Geschwindigkeitsverteilung $v(r,t)$ — die die Lösung der Aufgabe in Pkt. 1 darstellt — der instationären Randbedingung

$$v(R_1,t)=V(t) \tag{16}$$

anzupaßen, die durch den sich mit in der Zeit stetig veränderlicher Umfangsgeschwindigkeit $V=V(t)$ drehenden Zylinder mit einem Radius R_1 der Strömung aufgezwungen wird, wird — analog zu dem Gedankengang auf den Seiten 353—354 in [7] — die durch Gl. (15) angegebenen Funktion $\psi(r,t)$ für negative t-Werte in der Weise definiert, daß sie an der Stelle $r=R_1$ die Eigenschaften

$$\psi(R_1,t)=0 \qquad t<0 \tag{17}$$

habe.

Mit Rücksicht auf die physikalisch als die Haftbedingung der zähen Flüßigkeit interpretierten Randbedingungen (4) kann dann behauptet werden, daß die Funktion $\psi(r,t)$ an der Stelle R_1 im Zeitpunkt $t=0$ einen Einheitssprung aufweist. Damit wird mit Hilfe von ψ das Ansetzen einer Funktion $v_1(r,t)$ möglich die die folgenden Randbedingungen erfüllt (s. Abb. 2a):

$$v_1(R_1,t)=\begin{cases}0, & \text{wenn } t\leqq t_1\\ V_1, & \text{wenn } t_1<t\leqq t_2\,.\\ 0, & \text{wenn } t>t_2\end{cases} \tag{18}$$

Diese Funktion wird durch die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit realisiert, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders, im Zeitpunkt

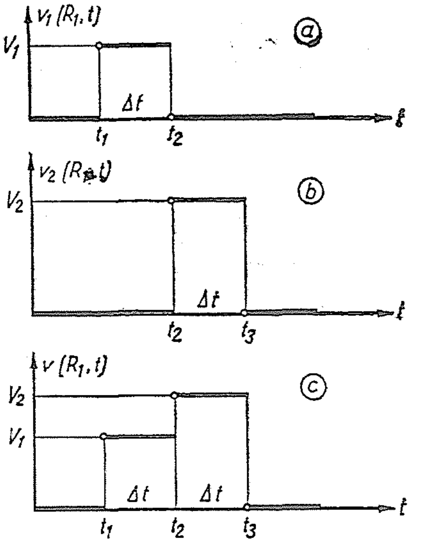

Abb. 2

$t = t_1$ vom Null plötzlich auf V_1 ansteigt, im Zeitintervall $t_1 < t \leq t_2$ den konstanten Wert V_1 hat und im Zeitpunkt $t = t_2$ wieder auf Null abfällt. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften (4) und (17) der Funktion $\psi(r, t)$ ist es leicht einzusehen, daß die Randbedingung (18) durch die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Form

$$v_1(r, t) = V_1[\psi(r, t - t_1) - \psi(r, t - t_2)]$$

erfüllt wird.

Die aus den Funktionen $v_1(r, t)$ und

$$v_2(r, t) = V_2[\psi(r, t - t_2) - \psi(r, t - t_3)]$$

(deren Bild an der Stelle $r = R_1$ Abb. 2b zeigt) additiv zusammengesetzte Geschwindigkeitsverteilung $v(r, t) = v_1 + v_2$ bildet sich in der Flüssigkeit dann heraus, wenn im Zeitpunkt $t = t_2$ die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders plötzlich von V_1 auf V_2 ansteigt und im Zeitpunkt $t = t_3$ auf Null abfällt. (Abb. 2c zeigt den Verlauf der Randbedingung $v(R_1, t)$).

In ähnlicher Weise können gleiche Zeitintervalle Δt der Anzahl n zusammengeschlossen werden, innerhalb deren die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders einen konstanten Wert hat. Die Geschwindgkeitsverteilung der Flüßigkeit wird in diesem Fall offenbar durch die Funktion

$$v(r, t) = \sum_{m=1}^{n} V_m[\psi(r, t - t_m) - \psi(r, t - t_{m+1})]$$

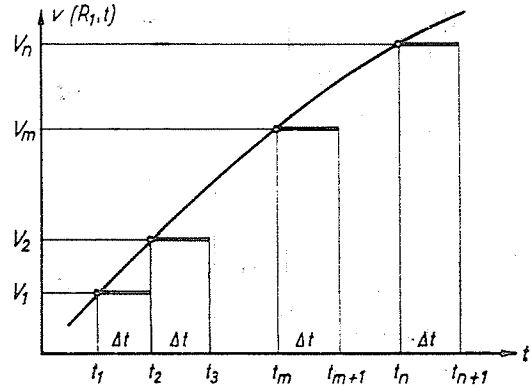

Abb. 3

beschreiben. Hier bedeutet V_m die Umfangsgeschwindgkeit des Zylinders im m-ten ($m = 1, 2, \ldots, n$) Δt-Zeitintervall. (S. dazu Abb. 3.) Diese Gleichung läßt sich — alle Glieder der rechten Seite mit Δt multipliziert und dividiert und unter Berücksichtigung des Zusammenhangs $t_m = t_{m+1} - \Delta t$ — in der folgenden Form aufschreiben:

$$V(r, t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\psi(r, t - t_{m+1} + \Delta t) - \psi(r, t - t_{m+1})}{\Delta t} \Delta t .$$

Man sieht, daß der Bruch dem Differenzenquotienten der Funktion $\psi(r, t - t_{m+1})$ nach der Variablen t entspricht.

Nehmen wir weiterhin an, daß die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders nach einem sich in der Zeit stetig ändernden Gesetz verläuft, dann bedeutet dies mathematisch, daß die Umfangsgeschwindigkeit eine stetige Funktion der Zeit ist (Abb. 3, ausgezogene Linie):

$$V_m = V(t_m) . \tag{19}$$

Bei einer Vermindenung der Δt-Intervalle unter alle Grenzen gilt dann $t_{m+1} \to t_m$, der Grenzwert des Differenzenquotienten wird die partielleAbleitung

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t - t_m)$$

sein und anstelle des Summierens ist eine Integration nach t_m zwischen den Grenzen 0 und t durchzuführen. Als endgültige Lösung der gestellten Aufgabe ergibt sich somit bei einer gemäß (19) zeitabhängigen Randbedingung für die Berechnung der Geschwindigkeit als Funktion von Zeit und Ort die Gleichung:

$$v(r,t)=\int_{0} V(t_m)\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t-t_m)\mathrm{d}t_m\,. \tag{20}$$

Zusammenfassung

Im Beitrag wird eine Funktion $v = v(r, t)$ abgeleitet, die die Berechnung des instationären Geschwindigkeitsfeldes der sich zwischen unendlich langen koaxialen Zylindern herausbildenden laminaren Strömung ermöglicht, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des sich drehenden inneren Zylinders eine Funktion der Zeit ist. Den Berechnungen wurde eine in der auf die Zylinderachse senkrechten Ebene liegende und durch konzentrische Stromlinien gekennzeichnete zweidimensionale Strömung zugrunde gelegt.

Literatur

1. Gruber, J.—Blahó, M.: Die Mechanik der Flüssigkeiten.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
2. Truckenbrodt, E.: Strömungsmechanik Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1968.
3. Gruber, J.: Ventilatoren.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966.
4. Pattenden, R. F.: Heat Transfer from a Rotating Tube with Controlled Fluid Flow. Journal Mechanical Engineering Science *6* (1964) p. 144—149.
5. Konecsny, F.: Die rotationssymmetrische ebene Strömung der viskosen Flüssigkeit bei einer instationären Randbedingung.* Hefte der Arbeitsgruppe für Angewandte Verkehrsmathematik 74, *5* (1974), p. 25—44. Budapest.
6. Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen, Teubner, Leipzig, 1952.
7. Hort-Thoma: Differentialgleichungen der Technik und Physik. Barth, Leipzig, 1954.

* In ungarischer Sprache.

Dr. Ferenc Konecsny H-1521 Budapest Bertalan L. u. 4-6