

DYNAMISCHE BERECHNUNG VON WAGENKÄSTEN

Von

P. MICHELBERGER, M. FERENCZI, A. ÁGOSTON und Z. UJHELYI

Lehrstuhl für Mechanik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 8. Juni 1975)

1. Einleitung

Wagenkästen wurden bis zur letzten Zeit nach statischen Methoden berechnet. Bei der Berechnung wurden die schwingungstheoretischen Eigenschaften der Fahrwerke nicht berücksichtigt, der Wagenkasten wurde zwar als elastisch, die Last jedoch als zeitlich konstant betrachtet. Der bei der Berechnung willkürlich bzw. teils erfahrungsgemäß angesetzte dynamische Faktor spiegelt eigentlich nicht das dynamische Verhalten der Konstruktion, sondern er darf als verhüllter Sicherheitsfaktor gelten.

Die schwingungstheoretische Prüfung der Fahrzeuge war — vor allem um den Reisekomfort zu erhöhen — auf die Analyse der Federung eingestellt. Bei diesen Untersuchungen wurde der Wagenkasten in der Regel als steifer Körper betrachtet, für die Übersichtlichkeit der Berechnungen wurde jedoch versucht, auch dieses Modell womöglich zu vereinfachen (Abb. 1) [1]. Selbst bei verwickelten Modellen mit vielen Freiheitsgraden begnügte man sich mit dem steifen Wagenkasten. (Von SPERLING [2] wurde z. B. für Eisenbahnwagen ein räumliches Modell mit 25 Freiheitsgraden ausgearbeitet, als biegsamer Stab wurde jedoch der Wagenkasten von ihm nur in besonderen ergänzenden Berechnungen betrachtet.)

Mit der Verbreitung der Leichtbauweise wurde es offenbar, daß auch der Wagenkörper selbst in nicht vernachlässigbare Biege- und Torsionsschwingungen versetzt werden kann, durch die in der Stahlkonstruktion des Wagenkastens bedeutende Beanspruchungen entstehen. Durch an Omnibussen bei Versuchsfahrten auf der Straße durch dynamische Belastungsprüfungen erhaltene Ergebnisse wurde diese Erkenntnis auch meßtechnisch unterstützt. Es

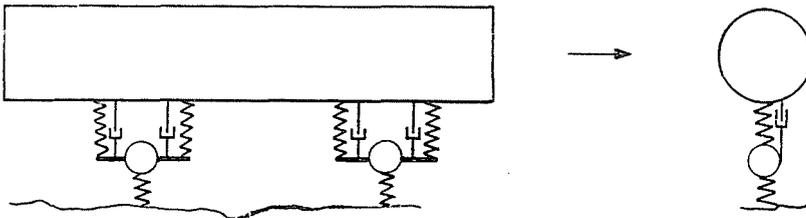


Abb. 1

wurde von mehreren Verfassern (z. B. von HALBGBAUER [3]) versucht, den elastischen Wagenkasten mit einem kontinuierlichen Modell zu beschreiben. Das einfache Trägermodell von in Längsrichtung unveränderlicher oder mit einer geschlossenen Formel angegebener veränderlicher Steifigkeit (Abb. 2) kann jedoch in der Regel lediglich als sehr grobe Näherung gelten. Trotzdem wurden von RÁCZ [4] für Flugzeugflügel auch mit solchen analytisch beschreibbaren Modellen recht befriedigende Ergebnisse erzielt.

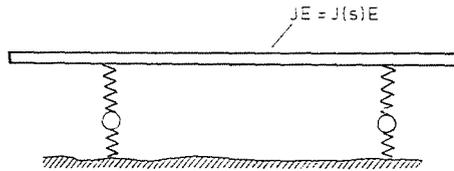


Abb. 2

Bei konkreten Berechnungen müssen die Träger mit unregelmäßig veränderlicher Steife auf diskrete Abschnitte zerlegt werden (z. B. diskontinuierliches Matrixverfahren), dabei taucht auch der Gedanke auf, den Wagenkasten von vornherein als ein aus diskreten Massenpunkten, steifen Körpern und masselosen Federn aufgebautes System zu modellieren. Das ist auch durch den Umstand gerechtfertigt, daß besonders bei Straßenfahrzeugen (z. B. bei Omnibussen) die Hauptaggregate (Motor, Getriebe, Akkumulator, Brennstofftank usw.) auch im Falle eines kontinuierlichen Modells auf jeden Fall im Vergleich mit der Tragkonstruktion als diskrete Massenpunkte bzw. Körper zu betrachten sind. Ein so ausgestaltetes Modell ist — besonders bei räumlichen Untersuchungen — ziemlich verwickelt, die Bewegungsgleichungen lassen sich nur umständlich aufstellen und die Lösung ist auch auf einem leistungsfähigen Rechner schwerfällig.

Nach dem Gesagten ist es verständlich, daß sich auch im Prinzip nur wenig Wissenschaftler mit diesem Problem beschäftigten und noch weniger konkrete Rechenergebnisse vorliegen. Der Vollständigkeit halber soll hinzugesetzt werden, daß die Simulation des Wagenkastens durch einen steifen Körper bei Fahrzeugen geringer Länge (z. B. Kfz) als sehr gute Näherung gelten darf, und daß der Großteil der Prüfungen in der ganzen Welt gegenwärtig noch derartige kurze Fahrzeuge betrifft.

2. Probleme der dynamischen Berechnung

Die dynamische Berechnung der Wagenkästen läßt sich in zwei methodologisch verschiedene Probleme zerlegen:

2.1 Extreme Einzellast

Infolge von extremen Einzelfehlern der Straßendecke entstehen transiente Beanspruchungen die u. U. einen unmittelbaren Bruch verursachen oder auch bei geringer Vorkommenshäufigkeit eine Kumulation der Schädigung herbeiführen können und so mittelbar die Dauerlastfähigkeit beeinflussen. Die Extrembelastungen haben besonders beim Betrieb im Stadtverkehr eine große Bedeutung, wo Fahrbahnreparaturen bzw. künstliche Wellen in der Straßendecke als Langsamfahrtsignale (velocity bump) bei Linienbussen auch mehrmals täglich Extrembeanspruchungen verursachen können.

Derartige transiente Belastungen können in gewissen Frequenzbereichen bedeutend größere Beanspruchungen als eine stationäre sinusoidale Erregungskraft herbeiführen.

Diese Erscheinung läßt sich auch bereits in einem einfachen, ungedämpften Schwingungssystem mit einem einzigen Freiheitsgrad gut veranschaulichen. Es wirke auf die Masse im Zeitintervall $0 \leq t \leq T/2$ eine Erregungskraft $F(t)$ halbsinusoidaler Form. (T bedeutet die Periodenzeit der Erregungskraft.) Vergleichen wir die Maxima der erzeugten Federkraft und der Erregungskraft in Abhängigkeit von ω/α (ω = Kreisfrequenz der Erregungskraft, α = die eigene Kreisfrequenz des Systems) (Abb. 3). Anhaltsweise wurden auch die zur stationären sinusoidalen Erregung gehörenden maximalen Federkraftwerte angegeben (Resonanzkurve). Ergebnisvolle und sehr aufschlußreiche Untersuchungen in diesem Sinne wurden von RÁCZ [5] über Flugzeugfahrwerke durchgeführt.

Die Prüfung transienter Belastungen läßt sich auch auf nichtlineare Systeme leicht ausdehnen. Die Zeitfunktion der Beanspruchungen kann au

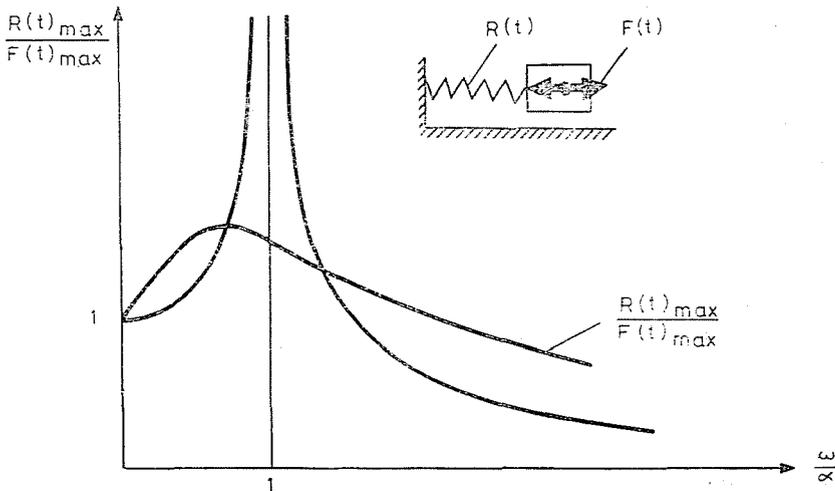


Abb. 3

einem Digital- oder Analogrechner mit verhältnismäßig geringer Kapazität bestimmt werden.

Auch der Ansatz des inversen Problems läßt sich vorstellen: Straßenwellen welcher Form und Größe dürfen ohne Schädigung des Fahrzeuges z. B. als Kennzeichen der Geschwindigkeitsbegrenzung ausgestaltet bzw. Straßenbelagfehler welcher Größe zugelassen werden? Beim inversen Problem ergibt sich selbstverständlich eine Schwierigkeit daraus, daß die Antwort je Fahrzeugtyp bzw. je Lastzustand verschieden ist. (Sie ist nämlich von Masse, Steifigkeit, Achsabstand usw. des Fahrzeugs abhängig.)

2.2 Stochastische Belastung

Auf das Fahrzeug und damit auch auf den Wagenkörper wirken die Lastkräfte stochastisch. Als stochastisch darf auch die Änderung der Nutzlast (z. B. die Änderung der Fahrgastzahlen) gelten, die nach MATOLCSY [6] und IMÉCS [7] durch eine oben begrenzte exponentielle Verteilungsfunktion beschrieben werden kann. Die betreffenden Messungen befinden sich jedoch noch im Anfangszustand, daher ist es zweckmäßiger, bei den Untersuchungen statt des konkreten Typs der Verteilungsfunktion von einem aus den zur Verfügung stehenden Meßergebnissen ermittelten Histogramm auszugehen. Es sei hinzugefügt, daß sich die Nutzlast in Abhängigkeit von der Zeit sehr langsam ändert sich daraus (angenommen, daß das Fahrzeug bei der Laständerung steht) keine bedeutende dynamische Wirkung ergibt.

Auch die Zusatzlast infolge von Straßenunebenheiten ist stochastischer Art. Sie läßt sich nach MATOLCSY durch eine zeitlich nicht begrenzte exponentielle Verteilungsfunktion angeben. Von anderen Verfassern (z.B. MITSCHKE [8]) wurde die dynamische Beanspruchung infolge von Fahrbahnunebenheiten als Zufallsgröße von Normalverteilung mit dem Erwartungswert Null betrachtet. Dieser Standpunkt wurde auch durch einige in Ungarn durchgeführte Messungen bekräftigt [9] (Abb. 4). Für eine einfachere Berechnung wird die dynamische Belastung infolge von Fahrbahnunebenheiten im weiteren auch hier als normalverteilt betrachtet.

Auch durch Schweiß- bzw. Montierungsspannungen infolge von Fertigungsungenauigkeiten werden im Wagenkasten zufallsbestimmte Beanspruchungen verursacht [10]. Diese zusätzlichen Beanspruchungen zeigen in der Regel in Abhängigkeit von der Betriebszeit eine abnehmende Tendenz.

Von den drei zufallsbestimmten Beanspruchungen kann nur die Wirkung der durch die Beschaffenheit der Fahrbahn erregten als dynamisch gelten. Die Änderung der Nutzlast und die aus dem Fertigungsprozeß herrührenden Beanspruchungen sind statischer Art. Durch die Größe der Nutzlast werden die dynamischen Systemeigenschaften (z. B. die Masse, durch körniges Fördergut auch die Dämpfung) stark beeinflusst. Durch die aus der Fertigung her-

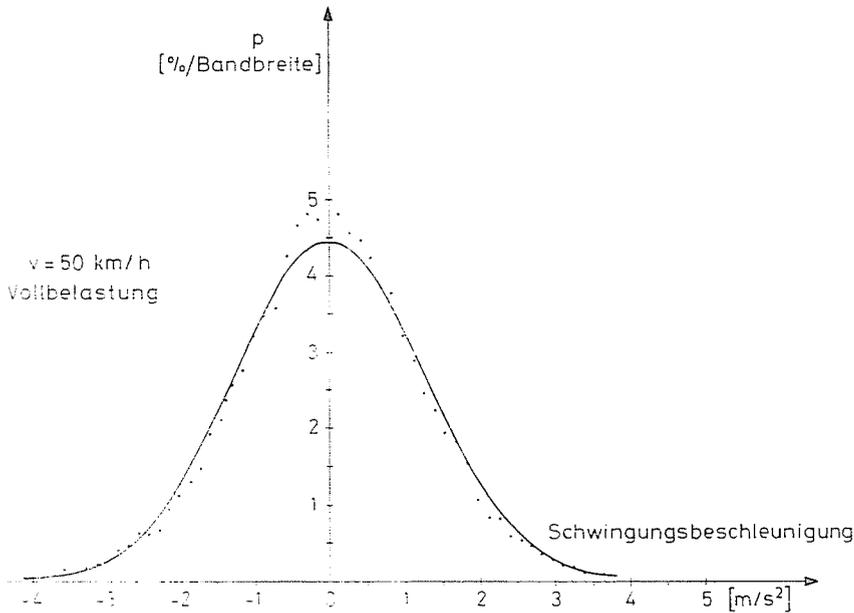


Abb. 4

rührenden Beanspruchungen wird im Verein mit der Nutzlast auch die statische mittlere Beanspruchung bestimmt.

Die zusätzlichen Beanspruchungen infolge von sog. fahrdynamischen Wirkungen (Bremsen, Beschleunigung, Kurvenfahrt, Bergabfahrt usw.) wurden hier nicht analysiert. Diese lassen sich in der Regel nach deterministischen Methoden bestimmen — in diesem Sinne können sie also zu den Einzel-Extrembelastungen gezählt werden —, ihre Vorkommenshäufigkeit im Betrieb ist jedoch sehr hoch und ihre Größe zufallsbestimmt. Mit der statistischen Bearbeitung dieser Frage beschäftigt sich gegenwärtig ΓΥ. ΤÓΤΗ Ι. im Forschungsinstitut AUTÓKUT, seine Untersuchungsergebnisse stehen jedoch Verfassern noch nicht zur Verfügung.

3. Das Rechenmodell

Einführend wurde bereits angedeutet, daß es sich empfiehlt, für die dynamische Prüfung des Wagenkastens ein diskretes Modell zu wählen. Das ist auch deshalb begründet, weil die kritischen Punkte der Karosserie (die Ecken der Fenster- und Türpfosten) im vereinfachten kontinuierlichen Modell verschwinden oder nur durch eine sehr verwickelte Berechnung berücksichtigt werden können. Wir möchten bemerken, daß die im weiteren beschriebene Modellgestaltung zwar viele heuristische Elemente enthält, sich jedoch infolge der direkten Berücksichtigung der Erfahrungen und der Anschaulichkeit des Verfahrens in der Praxis gut bewährt.

3.1 Nachbildung im Modell der Massen- und Federverteilung

Im Modell werden die im Verhältnis zu der Karosserie kleinen Körper (von einer Größe unter $1/10$ der entsprechenden Abmessung der Karosserie) durch einen Massenpunkt, die größeren (z. B. Motor, Getriebe usw.) durch einen steifen Körper ersetzt. Das Schema des in dieser Weise ausgestalteten Modells für einen Omnibus mit Heckmotor ist in Abb. 5 zu sehen. Der besseren Übersichtlichkeit halber ist in der Abbildung die rechte Seite des Wagenkastens weggelassen. In diesem System ist die Zahl der diskreten Massenpunkte ziemlich hoch. Die Massen am Oberteil der Seitenwand (die die Deckenmasse

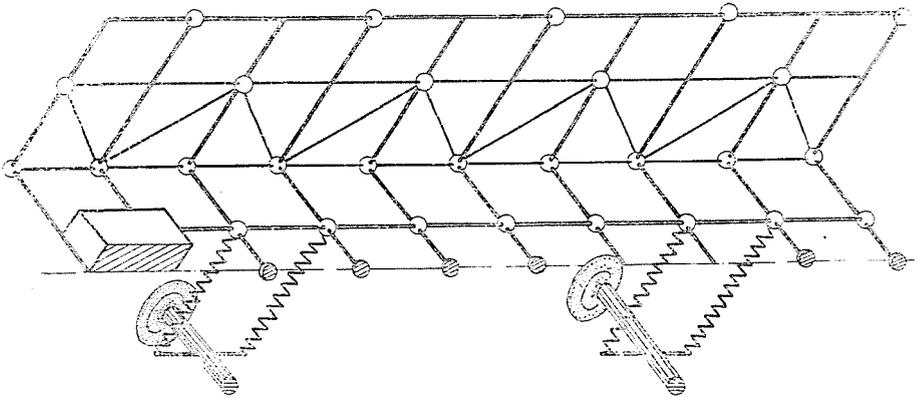


Abb. 5

symbolisieren) sind mindestens um eine Größenordnung kleiner als die konzentrierte Masse des Bodengerippes, daher dürfen sie in erster Näherung den ersteren gegenüber vernachlässigt werden; andererseits bewegen sie sich in vertikaler Richtung, wegen der großen Steifigkeit der Pfosten, mit den Massenpunkten zusammen, die sich unter ihnen im Bodengerippe befinden; die Horizontalbewegung bleibt in erster Näherung unberücksichtigt. Eine weitere Vereinfachung wird erzielt, wenn man die Querträger als unendlich steif betrachtet. Frühere statische Berechnungen [11] zeigten, daß Querträger von größenordnungsmäßig gleicher Steife wie die Seitenwände bzw. Längsträger mit sehr guter Näherung als unendlich steif betrachtet werden dürfen. Diese Näherung ist noch mehr zulässig im Vergleich zu den Verfahren, die den gesamten Wagenkörper als steif modellieren. Bei steifen Querträgern nimmt die Zahl der Freiheitsgrade des Systems wesentlich ab.

Werden die Untersuchungen auf Biegeschwingungen beschränkt — und hat das Fahrzeug viele (mindestens 8 bis 10) Querträger —, genügt es ein Modell mit einem einzigen Massenpunkt je Querträger zu benutzen (Abb. 6). (Die Seitenwand wurde der Einfachheit halber durch eine einzige Linie be-

zeichnet.) Die dynamische Untersuchung kann so schließlich an einem ebenen Modell durchgeführt werden, wo jedoch das Tragsystem (die Federn) von räumlicher Anordnung ist.

Die Klarheit der Untersuchungen wird durch den Umstand gestört, daß sich bei Omnibussen Fahrgasttüren nur auf der einen Seite des Wagenkastens befinden; dadurch hat das Fahrzeug keine Steifigkeitssymmetrieachse und damit ist die Reduktion des Systems auf die Ebene nicht vollkommen eindeutig. In der vorliegenden Arbeit wird auf diese Frage nicht eingegangen, es sei nur bemerkt, daß eine derartige Konstruktion auch auf Erregungswirkung

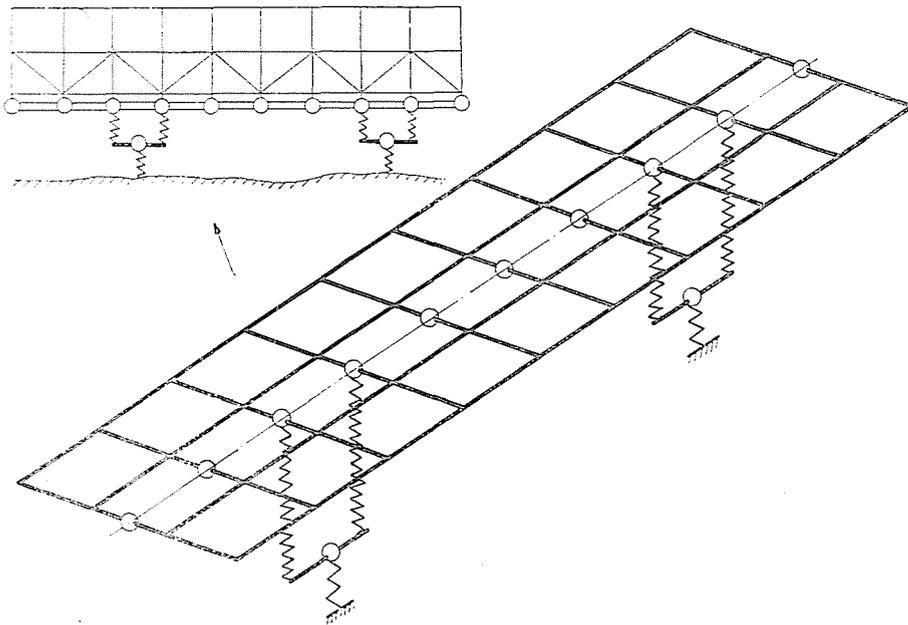


Abb. 6

eines symmetrischen Straßenprofils in Torsionsschwingung geraten kann und umgekehrt auch eine rein antimetrische Erregung Biegeschwingung herbeiführen kann.

3.2 Simulation der Dämpfung

Viel verwickelter als die Simulation der Massen- und Federverteilung ist die Simulation der Dämpfung. Die Charakteristik der zwischen Fahrwerk und Wagenkasten eingebauten Schwingungsdämpfer ist im allgemeinen nicht-linear, in vielen Fällen (z. B. bei Fahrzeugen mit Blattfedern) ist auch die Dämpfung durch Trockenreibung zu berücksichtigen [12].

Neben der Werkstoffdämpfung im Wagenkörper, im Tragsystem, tritt auch innere Dämpfung im Fördergut bzw. in den Fahrgästen auf. Zwischen locker montierten Einzelteilen bzw. bei Schrauben- und Nietverbindungen (z. B. die Befestigung von Abdeckblechen), kann Trockenreibung vorkommen. Die hysteretische Dämpfung in den in der Karosserie befindlichen Bauteilen aus Gummi und anderer nichtmetallischen Stoffen ist verhältnismäßig groß.

Von den in der Karosserie auftretenden, angeführten Dämpfungen läßt sich allein die Werkstoffdämpfung im Tragsystem rechnerisch verfolgen (obwohl auch diese von den in der Konstruktion angewandten Verbindungen stark abhängig ist); für die übrigen Dämpfungswirkungen stehen zur Zeit weder Berechnungsverfahren noch Meßergebnisse zur Verfügung. Es ist hinzuzusetzen, daß deren Dämpfwirkung erwartungsgemäß viel größer als die Werkstoffdämpfung des Tragsystems ist.

Bei der hier behandelten Untersuchung wurde die Dämpfung im Wagenkasten gänzlich vernachlässigt, da deren Charakter und Größe zur Zeit unbekannt sind. Für die zwischen Fahrwerk und Wagenkasten eingebauten hydraulischen Schwingungsdämpfer wurde eine lineare Charakteristik angenommen.

Die Hauptaufgabe der dynamischen Forschungen der nächsten Zeit wird die Trennung der verschiedenen Dämpfungsbeiwerte und deren Ausmessung bzw. die Bestimmung des linearen Ersatz-Dämpfungsbeiwerts sein.*

3.3 Simulation der Erregung

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Erregung des Systems in jedem Falle von Fahrbahnebenheiten herrührt. Mit Hilfe der im weiteren behandelten Methoden läßt sich auch die Wirkung jeder anderen Erregung analysieren. Es wird angenommen, daß sich die Fahrbahn unter dem Fahrzeuggewicht nicht verformt. Rad und Fahrbahn sind in ständiger Berührung; im Gegensatz zu der Wirklichkeit erfolgt die Berührung nicht auf einer Fläche endlicher Größe, sondern in einem einzigen Punkt je Rad. Für das Straßenprofil wird als Bedingung gesetzt, daß wenigstens die erste Ableitung bestehe (diese Bedingung ist wegen der Dämpfung des Reifens erforderlich).

* Bei der Berechnung der Antwortfunktion auf eine stochastische Erregung spielt die Übertragungsfunktion des Systems eine entscheidende Rolle. In der vorliegenden Arbeit wird weiter unten ein Berechnungsverfahren für diese Funktion empfohlen. Die Übertragungsfunktion läßt sich jedoch im Prinzip auch meßtechnisch ermitteln. Die Größenordnung des Dämpfungsbeiwerts kann durch einen Vergleich der gemessenen und berechneten Übergangsfunktionen abgeschätzt werden. Es ist zu erwarten, daß sich ein frequenzempfindlicher Dämpfungsbeiwert ergibt. Wahrscheinlich erhält man ein statistisch richtigeres Ergebnis, wenn der Dämpfungsbeiwert durch den Vergleich der gemessenen und berechneten Streuung der Antwortfunktion auf eine Erregung mit vorgegebenem Spektrum bewertet wird. Solche Messungen bzw. Berechnungen sollen im nächsten Jahr mit dem Forschungsinstitut AUTÓKUT gemeinsam unternommen werden.

Der extreme Einzelfehler der Fahrbahn wird im späteren Beispiel in Form einer einzigen Kosinuswelle bei dem Vorderrad

$$x = h \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} \right)$$

angesetzt, wo λ die Wellenlänge der Straße, h die Hälfte der Gesamtwellenhöhe, v die Fahrzeuggeschwindigkeit bedeuten.

Das Leistungsdichtespektrum der stochastischen Fahrbahnerregung wird nach fremden Messungen [13], [14] angesetzt und nach MITSCHE [8] wird angenommen, daß es im Log-Log-Koordinatensystem annähernd eine Gerade ergibt.

Sowohl bei deterministischer als auch bei stochastischer Erregung wird angenommen, daß Vorder- und Hinterfahrwerk auf der gleichen Spur fahren, also die gleiche Erregung durch die Fahrbahn erhalten, selbstverständlich mit der von dem Achsenabstand und der Geschwindigkeit abhängigen Phasenverschiebung.

Die stochastische Erregungsfunktion darf für ein ebenes Modell als durch Messungen hinreichend untermauert gelten. Bei stochastischer Erregung eines räumlichen Modells ist jedoch die Phasenverschiebung der auf die rechts- und linksseitigen Räder des Fahrzeugs wirkenden Eingangssignale einstweilen unbekannt. (Das Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals darf nach MITSCHE und auch nach technischen Überlegungen als für eine beliebige Spur gleich betrachtet werden.) In der vorliegenden Arbeit wurde die Untersuchung vor allem wegen der Unsicherheit der Erregungsfunktion mit vier oder mehreren Eingängen auf das System in ebener Bewegung beschränkt, obwohl die herangezogene mechanisch-mathematische Methode auch die Lösung des räumlichen Problems ermöglicht.

4. Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Systems

Die Bewegungsgleichung des aus diskreten Massenpunkten und steifen Körpern bestehenden Schwingungssystems in ebener Bewegung läßt sich mit den Bezeichnungen der Matrizenrechnung in folgender knapper Form anschreiben:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{S}\mathbf{y} = \mathbf{D}\dot{\mathbf{f}} + \mathbf{G}\mathbf{f} \quad (1)$$

Dabei bedeuten:

M — die aus Massen und Trägheitsmomenten aufgebaute Matrix, die eine Diagonalmatrix ist, wenn das Koordinatensystem an die Massenpunkte bzw. bei steifen Körpern an die Schwerpunkträgheitshauptrichtungen gebunden wird)

- K** — die aus den auf die einzelnen Massenpunkte (steifen Körper) wirkenden Dämpfungen bestehende quadratische symmetrische Matrix (in der vorliegenden Arbeit ist lediglich die Dämpfung der in das System eingebauten hydraulischen Schwingungsdämpfer und des Reifens von Null verschieden)
- S** — die Steifigkeitsmatrix (quadratische, symmetrische)
- D** — die auf die Fahrbahnfläche als Bedingungskoordinaten bezogene, von den Fahrzeugelementen (Reifen) stammende Dämpfungsmatrix
- G** — die auf die Fahrbahnfläche als Bedingungskoordinaten bezogene, von den Fahrzeugelementen (Reifen) stammende Steifigkeitsmatrix
- y** — den aus den Koordinaten der vertikalen Verschiebung der einzelnen Massenpunkte (auch der Drehung von steifen Körpern um den Schwerpunkt) aufgebauten Spaltenvektor
- f** — den auch die Phasenverschiebung berücksichtigenden Spaltenvektor der die Fahrbahnerregung (das Straßenprofil) beschreibenden Zeitfunktion.

Im Beitrag werden alle physikalischen Wirkungen und konstruktiven Lösungen außer acht gelassen, durch die die Differentialgleichung zeitabhängig — nichtautonom — oder koordinatenabhängig — nichtlinear — wird.

Bei Aufstellen der gegebenen Differentialgleichung ist im Falle des in den vorigen Ausführungen beschriebenen Simulationsverfahrens lediglich die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix S arbeitsaufwendig. Ihre Elemente können nach folgender einfacher Überlegung berechnet werden:

Legen wir in Gedanken die Massenpunkte (und auch die etwaigen steifen Körper) des Modells fest, mit der Ausnahme des i -ten Punktes. Es wird eine Verschiebung von Einheitsgröße des Massenpunktes m_i (bei einem steifen Körper kommt auch Drehung vor) in Richtung der negativen Koordinate y_i erzwungen. Auf Wirkung der vorgeschriebenen Verschiebung werden infolge des zusammenhängenden Aufbaues des Tragsystems auf jeden Massenpunkt (und auch auf die steifen Körper) Zwangskräfte wirken [15]. Die auf den k -ten Massenpunkt wirkende Zwangskraft ergibt gerade das s_{ik} -te Element der Matrix S . Dieses Prinzip beruht auf der Deformationsmethode, doch kann durch Einführen des Begriffs der kinematischen Last (Belastungsverschiebungen) auch nach dem bei der statischen Berechnung von Fahrzeugen bewährten Kraftgrößenverfahren gerechnet werden. In letzterem Falle empfiehlt es sich, alle kinematischen Lasten mit Hilfe eines einzigen Grundsystems (Abb. 7) zu berechnen, das Grundsystem selbst ist aber in der für Fahrzeugtragsysteme empfohlenen Weise [16] zu wählen, damit bei der Lösung des Lineargleichungssystems ein womöglich kleiner numerischer Fehler anfällt.

Es sei erwähnt, daß die Aufgabe statt der direkten Berechnung der Steifigkeitsmatrix S auch durch Bestimmung der Flexibilitätsmatrix C gelöst

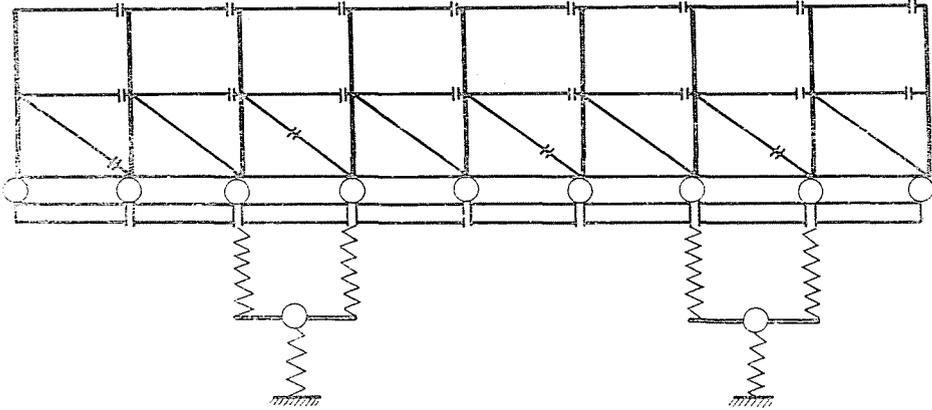


Abb. 7

werden kann, da $S = C^{-1}$. Bei numerischen Untersuchungen stellte sich jedoch heraus, daß bei Systemen mit größeren Freiheitsgraden das Inverse von C mit keiner hinreichenden Genauigkeit hergestellt werden kann.*

5. Untersuchung der extremen (transienten) Einzelbeanspruchung

Nach Lösung der Gl. (1) läßt sich die Beanspruchung des Wagenkastens sehr einfach berechnen. $M(s, t)$ sei im Zeitpunkt t die dynamische (Biege-, Torsions-, Scher- usw.) Beanspruchung eines Querschnitts mit der Koordinate s des Tragsystems und stellen wir ferner den Reihenvektor der durch die an den Orten der einzelnen Massenpunkte in Richtung der negativen y -Koordinaten wirkenden Einheitskräfte erzeugten und zu dem Punkt s gehörenden Beanspruchungen in der Form $\mathbf{m}^T(s)$ dar. Mit deren Hilfe erhält man

$$M(s, t) = \mathbf{m}^T(s) \mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) \quad (2)$$

Es hat auch kein Hindernis, den Zusammenhang (2) gleichzeitig auf eine endlich große Anzahl der Punkte des Tragsystems auszudehnen. In diesem Falle erhält man die Beanspruchungen in Form eines Spaltenvektors. Die Beanspruchungen können selbstverständlich auch aufgrund des Verschiebungs-

* Werden der Freiheitsgrad des durch ein ebenes Modell gekennzeichneten Systems durch γ und die Unbestimmtheit des Wagenkastens durch β bezeichnet, sind um C zu bestimmen $(\gamma - 2)$ Gleichungssysteme mit β Unbekannten wiederholt zu lösen; dann werden die Verschiebungen der einzelnen Massenpunkte berechnet und das Inverse einer Matrix von $\gamma \times \gamma$ Größe gebildet, so erhält man die erforderliche Matrix S . Im entgegengesetzten Falle (also bei direkter Berechnung von S) sind $(\gamma - 4)$ Gleichungssysteme mit $(\beta + \gamma - 4)$ Unbekannten (die Koeffizientenmatrix der Unbekannten ist stets die gleiche) zu lösen.

zustands $y(t)$ bestimmt werden; das letztere Verfahren ist sogar zweckmäßig, wenn auch die Eigendämpfung der Karosserie berücksichtigt wurde.

Aus dem Zusammenhang (2) läßt sich auch feststellen, daß das grundlegende Problem der Beanspruchungsberechnung die Bestimmung von $y(t)$ bzw. $\ddot{y}(t)$, also die Lösung der Gl. (1) ist.

5.1 Herstellung einer Lösung in geschlossener Form

Der klassische Weg zur Lösung der Gl. (1) ist, die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung zu summieren, dann die unbestimmten Konstanten aufgrund der Anfangs- bzw. Randbedingungen zu bestimmen. (Im vorliegenden Falle kommt nur das Anfangswertproblem in Frage.) Von einem einzigen Teil abgesehen ist dieser Weg im Falle des hier untersuchten, verwickelten Systems mit vielen Freiheitsgraden nicht zweckmäßig. (Wegen der bei den beiden Fahrwerken mit Phasenverschiebung auftretenden Erregung kann das Anfangswertproblem unübersichtlich verwickelt werden und gleichzeitig die numerische Zuverlässigkeit der Berechnung in Frage stellen.) Es ist die Lösung des bei der Durchführung der Aufgabe auftretenden, verallgemeinerten Eigenwertproblems — d. h. des homogenen Teils der Matrixdifferentialgleichung — die die Ausnahme bildet. Diese gibt nämlich über das Verhalten des ausgelenkten, dann sich überlassenen Systems Aufschluß. Die hier gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch bei der Untersuchung des später zu behandelnden stationären Vorgangs günstig verwenden. Im weiteren beschäftigen wir uns daher nur mit der Lösung der homogenen Gleichung.

Betrachten wir die homogene, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{S}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Es ist bekannt, daß (3) stets eine Lösung von Exponentialfunktionsform hat. Die Funktion

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} e^{\xi t}, \quad \boldsymbol{\eta} \neq \boldsymbol{\eta}(t)$$

in Gl. (3) eingesetzt, erhält man das verallgemeinerte — algebraische — Eigenwertproblem

$$(\mathbf{M}\xi^2 + \mathbf{K}\xi + \mathbf{S})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (4)$$

Aus rechentechnischen Überlegungen ist es zweckmäßig, Gl. (4) — durch Symmetriertransformation — zum äquivalenten Eigenwertproblem

$$\left(\left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{L}^{-1})^T & -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{L}^{-1})^T \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{array} \right] - \xi \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} \xi\boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (5)$$

umzuformen [17]. Hierin bedeuten \mathbf{E} die Einheitsmatrix, \mathbf{O} die Nullmatrix, \mathbf{L} die nichtsinguläre, untere Dreieckmatrix in der Choleskyschen Zerlegung der Matrix \mathbf{M} , während T das Transponieren bezeichnet. Es gelten also:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{L}^{-1})^T \boldsymbol{\delta}.$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren werden zweckmäßig mit Hilfe des numerisch sehr stabilen Algorithmus QR hergestellt. Während durch die Eigenwerte der zeitliche Verlauf der Lösung gekennzeichnet wird, kennzeichnen die Eigenvektoren die Amplituden- und Phasenverhältnisse. (Außerdem läßt sich der imaginäre Teil des Eigenwertes auch bei der Prüfung des stationären Zustands gut verwenden, da in Kenntnis der Eigenfrequenz des Systems die Berechnung der Übertragungscharakteristik viel zuverlässiger ist.)

5.2 Die direkte numerische Lösung der Anfangswertprobleme

Die bei Differentialgleichungssystemen in der Praxis angewandten Methoden lassen sich auf zwei Hauptgruppen unterteilen.

I. Lineare Methoden in mehreren Schritten.

II. *Runge-Kutta*-Verfahren.

Bei der Verfahrensauswahl müssen folgende Hauptgesichtspunkte berücksichtigt werden:

- a) die Methode soll der Kumulation der bei der Berechnung notwendigerweise unterlaufenden Fehler (Abrundungs- und Formelfehler) gegenüber die erforderliche numerische Stabilität besitzen,
- b) der systematische Fehler der Methode soll schrittweise gut abschätzbar sein,
- c) je ein Schritt der Methode soll womöglich wenig Rechenarbeit (Maschinenzeit) erfordern,
- d) die Methode soll sich gut zum maschinellen Rechnen eignen (leicht algorithmisierbar und programmierbar sein),
- e) die Methode soll womöglich »selbstanlassend« sein, d. h. zum Beginnen der Berechnung keine von dem Algorithmus abweichenden Verfahren erfordern.

In dieser Arbeit soll auf keine ausführliche Analyse eingegangen werden, nach den bisherigen Erfahrungen der Verfasser soll nur erwähnt werden, daß die Methoden unter Ziffer I hinsichtlich der Forderungen unter b) und c) vorteilhafter, hinsichtlich a) und e) weniger vorteilhaft als die Methoden unter Ziffer II sind.* (Die Bedingung d) wird von beiden erfüllt.) Im Beitrag werden im weiteren *Runge-Kutta*-Verfahren behandelt. Von diesen werden in der

* Die günstigsten Varianten der Methoden unter I sind die sog. Prediktor-Korrektor-Methoden [18], die sich bereits auf mehreren Spezialgebieten als viel vorteilhafter erwiesen als die *Runge-Kutta*-Verfahren.

Praxis im allgemeinen die sog. Methoden vierter Ordnung wegen ihrer Genauigkeit und numerischen Stabilität angewandt.

Meistens wird die Differentialgleichung (1) durch Einsetzen von

$$\dot{y} = z$$

sowie durch Inversion von M in die Form

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= M^{-1}(-Kz - Sy + Df + Gf) \\ \dot{y} &= z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

geordnet, dann werden die Vektoren

$$u^T = [z^T, y^T] \quad \text{sowie} \quad g^T = [f^T, f^T]$$

eingeführt und gliedweise mit M^{-1} multipliziert formell in

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}K & -M^{-1}S \\ E & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1}D & M^{-1}G \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f \end{bmatrix} \quad (7)$$

d. h. in Form

$$\dot{u} = Au + Bg(t) \quad (8)$$

geordnet. Die Gl. (8) kann auch in Form $\dot{u} = p(t, u)$ geschrieben werden, auf die in der aus der Literatur wohlbekannten Weise jedes Runge-Kutta-Verfahren angewandt werden kann.

Das obige Verfahren hat mehrere Nachteile:

- a) Durch die Multiplikation mit M^{-1} wird die gegenseitige Größenordnung der Elemente der Koeffizientenmatrizen stark verzerrt (besonders wenn Massenpunkte und steife Körper im Modell gleichzeitig vorkommen). Sind andererseits K , S , D , G symmetrisch, verlieren die Produkte in der Regel nach der Multiplikation mit M^{-1} ihre Symmetrie. Diese Schwierigkeit läßt sich durch die Transformation unter 1.1 beseitigen.
- b) Bei den formalen Umwandlungen wird Gl. (7) doppelt so groß wie Gl. (1), wodurch die erforderliche Maschinenzeit beträchtlich zunimmt.
- c) Das genannte Verfahren gewährleistet für alle Veränderlichen (y , \dot{y}) lediglich die der Ordnung der angewandten Methode entsprechende Fehlergrenze.

Die angeführten Nachteile lassen sich zum Teil durch Anwendung des Runge-Kutta-Nyquist-Verfahrens beseitigen. Die Gl. (1) in Form

$$\ddot{y} = p(t, y, \dot{y}) \quad (10)$$

geschrieben, wenden wir den Algorithmus (vierter Ordnung) wie folgt an [19]:

$$\left. \begin{aligned}
 h &: = \Delta t; \\
 \mathbf{k}_0 &: = \frac{h^2}{2} \mathbf{p}(t_0, \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0); \\
 \mathbf{k}_1 &: = \frac{h^2}{2} \mathbf{p}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2} \dot{\mathbf{y}}_0 + \frac{1}{4} \mathbf{k}_0, \dot{\mathbf{y}}_0 + \frac{1}{h} \mathbf{k}_0\right); \\
 \mathbf{k}_2 &: = \frac{h^2}{2} \mathbf{p}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2} \dot{\mathbf{y}}_0 + \frac{1}{4} \mathbf{k}_1, \dot{\mathbf{y}}_0 + \frac{1}{h} \mathbf{k}_1\right); \\
 \mathbf{k}_3 &: = \frac{h^2}{2} \mathbf{p}\left(t_0 + h, \mathbf{y}_0 + h \dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{k}_2, \dot{\mathbf{y}}_0 + \frac{2}{h} \mathbf{k}_2\right); \\
 \Delta \mathbf{y} &: = \frac{1}{3} (\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2); \\
 \Delta \dot{\mathbf{y}} &: = \frac{1}{3h} (\mathbf{k}_0 + 2\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3).
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Bei der Programmierung des Algorithmus (11) ergibt sich eine weitere Vereinfachungsmöglichkeiten aus dem Umstand, daß \mathbf{p} linear ist.*

5.3 Digitale Simulation

Die digitale Simulation bedeutet das Abbilden der für den Analogrechner formulierten Methode auf den Digitalrechner [20]. Die hier angewandten Verfahren nutzen rechentechnisch alle Vorteile der digitalen Maschine aus und erleichtern gleichzeitig die Programmierung. Mathematisch können sie eigentlich als spezifische numerische Integrationsmethoden betrachtet werden. Daher treten sinngemäß ähnliche Probleme wie unter Ziffer 5.2 auf. Als Beispiel soll das analoge (digitale) Schema gezeigt werden, das durch den Rechner ODR-1204 für die Prüfung der transienten Erscheinungen des Omnibusmodells mit 7 Freiheitsgraden im Zahlenbeispiel simuliert wurde (Abb. 8). Von ähnlichen

* Es läßt sich nachweisen, daß falls der Operationsfehler bei der Berechnung der Werte y_1, y_2, \dots, y_n nicht größer als ε ist, dann der Erbfehler des Wertes y_n ε/h nicht übersteigt. Es ist offensichtlich, daß ein zu klein gewählter h -Wert zur starken Verzerrung der Ergebnisse führen würde. Angenommen, daß neben der Größe von $y_n \varepsilon/h$ vernachlässigbar ist und sich die $r+1$ -te Ableitung von y nach t »ziemlich langsam« ändert — eine Bedingung, die hingegen umso mehr erfüllt wird, je kleiner h ist —, kann aufgrund des Lagrangeschen Restgliedes der Taylor-Reihe die folgende Fehlerabschätzung gemacht werden:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{genau} \\ \text{berechnet} \end{array} \left(y(t_{2i}) - y(t_i) \right) \right\| \leq \frac{1}{2^r - 1} \left\| \begin{array}{l} \text{berechnet} \\ \text{berechnet} \end{array} \left(y(t_{2i}) - w(t_j) \right) \right\|$$

wo w den mit der Schrittweite $2h$ berechneten Funktionswert, r die Ordnung des Verfahrens bezeichnen und $j = 2i$.

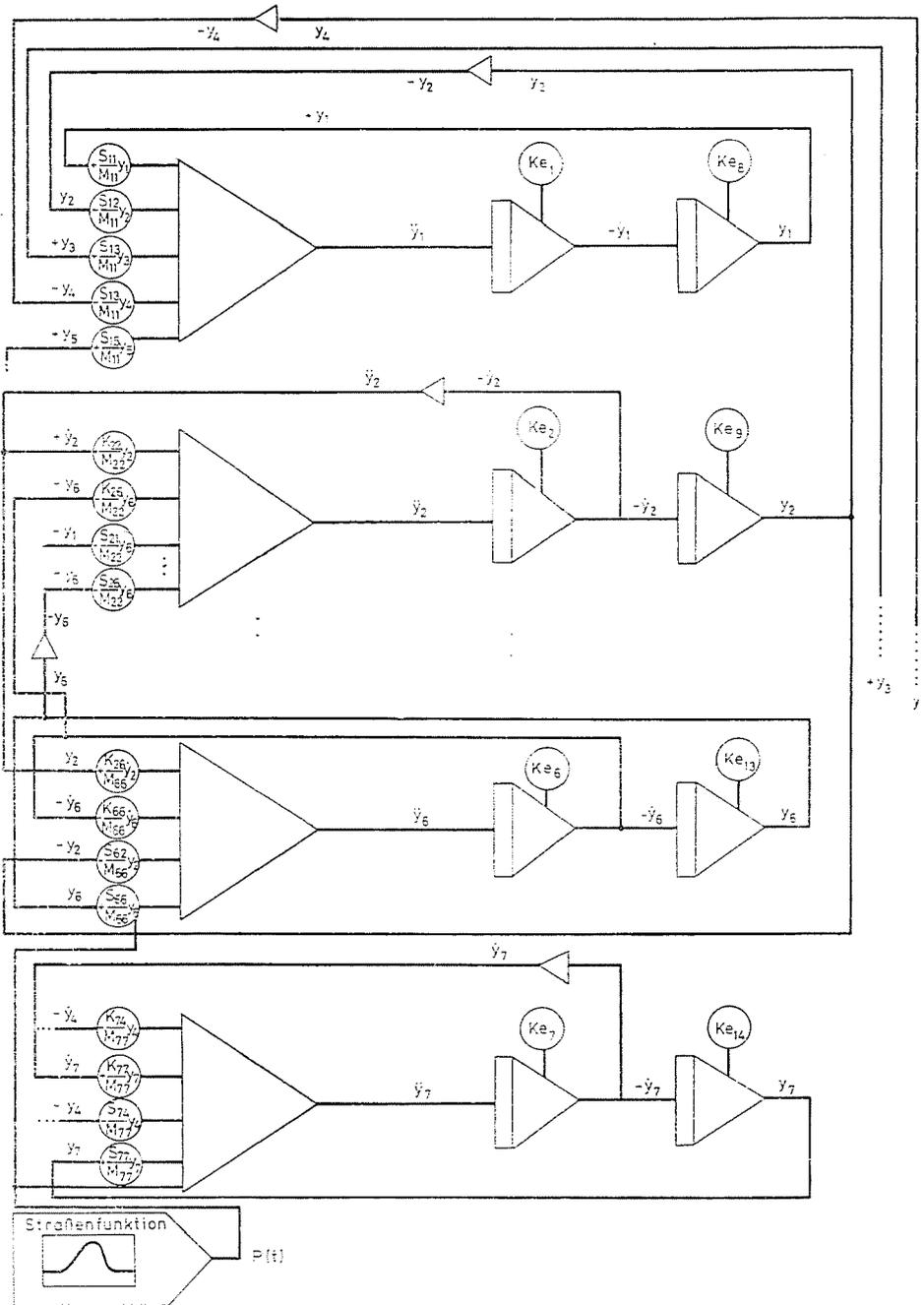


Abb. 8

Untersuchungen wird im Beitrag [21] über das Tragsystem von Straßenbahnbeiwagen berichtet.

6. Prüfung der stochastischen Belastung

6.1 Zusammenfassung der Grundlagen der stochastischen Untersuchung

Im folgenden sollen einige Zusammenhänge der statistischen Systemanalyse [22] zusammengefaßt werden. Wir wollen daran erinnern, daß die Fachliteratur in dieser Frage nicht einig ist, daher soll an entsprechender Stelle auf die Abweichungen hingewiesen werden.

a) Unter einer Realisierung des stochastischen Prozesses $x(t)$ (z. B. Fahrbahn-erregung) wird das Ausklammern des Abschnitts von endlicher Länge $2T$ verstanden. Der Mittelwert der Realisation ist

$$m_x^* = \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{T+t_0} x(t) dt = m_x^*(T, t_0)$$

b) Der Prozeß $x(t)$ ist stationär, wenn seine statistischen Kenngrößen von dem (den) Anfangszeitpunkt(en) der Beobachtung unabhängig sind. Der untersuchte Prozeß ist z. B. in erster Ordnung stationär, wenn

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{T+t_0} x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} m_x^*(T, t_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} m_x^*(T)$$

besteht und eine von t_0 unabhängige Konstante ist.

c) Der Prozeß $x(t)$ ist ergodisch, wenn seine statistischen Kenngrößen aus einer einzigen — unendlich langen — Realisation bestimmt werden können. So ist z. B. der Prozeß $x(t)$ für den Erwartungswert ergodisch — mit anderen Worten: in erster Ordnung ergodisch —, wenn der aus der Gesamtheit gewonnene Mittelwert mit dem Zeitmittel übereinstimmt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

wo $p(x)$ die Dichtefunktion des stochastischen Signals ist. Die ergodische Eigenschaft zieht Stationarität nach sich, umgekehrt gilt das jedoch nicht.

d) Führen wir die Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt$$

des stationären, stochastischen Prozesses $x(t)$ ein. Der Prozeß $x(t)$ ist dann und nur dann für den Erwartungswert ergodisch, wenn

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) (\varphi_{xx}(\tau) - m_x^2) d\tau = 0.$$

Es seien einige Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion genannt:

- $\varphi_{xx}(0) = \overline{x^2(t)}$, wo $\overline{x^2(t)}$ der quadratische Mittelwert des Signals ist,
 - $\varphi_{xx}(-\tau) = \varphi_{xx}(\tau)$, d. h. die gerade Funktion $\varphi_{xx}(\tau)$
 - $\max |\varphi_{xx}(\tau)| = \varphi_{xx}(0)$
 - $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_{xx}(\tau) = m_x^2$ angenommen, daß der Grenzwert $\tau \rightarrow \infty$ vorhanden ist.
- Weitere Eigenschaften und ihre ausführliche Erörterung sind im Fachschrifttum zu finden [23].
- e) Die *Fourier-Transformierte* der Autokorrelationsfunktion ist die *Spektraldichtefunktion* (Leistungsdichtespektrum):

$$\Phi_{xx}(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Einige Eigenschaften der Spektraldichte sind:

- $\Phi_{xx}(j\omega)$ ist reell
 - $\Phi_{xx}(-j\omega) = \Phi_{xx}(j\omega)$, d. h. eine gerade Funktion
 - $\Phi_{xx}(j\omega) \geq 0$
- f) Die Spektraldichten des Eingangssignals $x(t)$ und der Autokorrelationsfunktionen der Antwort $y(t)$ werden durch die Übertragungscharakteristik $W(j\omega)$ des Systems zueinander in Beziehung gesetzt:

$$\Phi_{yy}(j\omega) = W(j\omega)W(-j\omega) \Phi_{xx}(j\omega).$$

Unter Berücksichtigung von $W(j\omega) = W^*(-j\omega)$ (* ist das Konjugationszeichen) erhält man

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |W(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega)$$

- g) Aus der Spektraldichte erhält man das Inverse der Autokorrelationsfunktion durch *Fourier-Transformation*.*

* Im Fachschrifttum ist auch die Definition

$$\Phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

h) Das Streuungsquadrat läßt sich in der Form

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2(t)} - m_x^2$$

herleiten. Sind sowohl m_x als auch m_y gleich Null, dann gelten infolge der Eigenschaften der Korrelationsfunktion

$$\sigma_x^2 = r_{xx}(0) = \int_0^{\infty} \Phi_{xx}(j\omega) d\omega$$

und

$$\sigma_y^2 = r_{yy}(0) = \int_0^{\infty} \Phi_{yy}(j\omega) d\omega = \int_0^{\infty} |W(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(j\omega) d\omega \quad (12)$$

Wie es aus letzterem Zusammenhang zu erkennen ist, kann in Kenntnis der Spektraldichte der Erregung und der auf eine gegebene Kenngröße (z. B. Beanspruchung) des Systems bezogenen Übertragungscharakteristik die Streuung der Antwort für die gewünschte Kenngröße berechnet werden.

6.2 Berechnung der Übertragungscharakteristik

Nehmen wir an, daß das Fahrzeug mit gleichmäßiger Geschwindigkeit v fährt und die Fahrbahnfläche eine harmonische Erregung mit Einheitsamplitude darstellt. Sinngemäß erhalten die auf der gleichen Spur fahrenden Räder mit Phasenverschiebung die gleiche Erregung. Die harmonische Fahrbahnerregung wird in komplexer Form angesetzt:

$$f = e^{j\Omega s}$$

wo $\Omega = 2\pi/\lambda$ (λ bedeutet die Wellenlänge).

Wird die Laufnummer für die Massen des untersuchten ebenen Modells so gewählt, daß das Vorderrad des Fahrzeugs die Nummer n , das Hinterrad die Nummer $n - 1$ erhält, nimmt der Vektor der Erregungsfunktion folgende Form an:

$$\mathbf{f}^T = [0, 0, \dots, e^{j\Omega(s-L)}, e^{j\Omega s}]$$

üblich [24]. Es ist bekannt, daß das Produkt aus Faktoren vor Integralen — im vorliegenden Falle 1 und $1/2\pi - 1/2\pi$ ergeben muß. Die weiteren, hier nicht ausführlich dargelegten Definitionen weichen von den genannten nur insofern ab, daß $1/2\pi$ unter den beiden Integralen in anderer Weise aufgeteilt wird.

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} \Phi_{xx}(j\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

Es wird berücksichtigt, daß $s = vt$ und es werden die Bezeichnungen $\omega = \Omega v$ sowie

$$\mathbf{u}^T = [0, 0, \dots, e^{-j\omega L/v}, 1]$$

eingeführt. So läßt sich die Bewegungsgleichung (1) in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{S}\mathbf{y} = e^{j\omega t}(\mathbf{G} + j\omega\mathbf{D})\mathbf{u} \quad (13)$$

schreiben, wo der Koeffizient der Funktion $e^{j\omega t}$ ein zeitunabhängiger Vektor ist. Es ist bekannt, daß (12) eine Lösung der Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}e^{j\omega t}, \quad \mathbf{W} \neq \mathbf{W}(t)$$

hat; diese in die Differentialgleichung eingesetzt und unter Berücksichtigung des Umstands, daß $e^{j\omega t}$ für gar keinen Wert von t gleich Null ist, erhält man das lineare, algebraische Gleichungssystem

$$(\mathbf{S} - \omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{K})\mathbf{W} = (\mathbf{G} + j\omega\mathbf{D})\mathbf{u} \quad (14)$$

Nach physikalischen Überlegungen kann dieses stets eindeutig gelöst werden. Der Vektor $\mathbf{W} = \mathbf{W}(j\omega, v)$ läßt sich im allgemeinen nur numerisch — mit einem Rechner — (bei festgelegten ω und v) bestimmen.

Bemerkungen zur Lösung von Gl. (14):

- Wie bekannt, haben alle direkten Eliminationsmethoden den Nachteil einer umständlichen Genauigkeitsabschätzung der Lösung. Die nachträgliche Iteration kann nur mit doppeltgenauer Arithmetik durchgeführt werden, die z. B. bei Anwendung der Programmiersprache ALGOL in einfacher Weise nicht zur Verfügung steht. Nach diesen Überlegungen werden die direkten Iterationsmethoden (z. B. *Gauss—Seidel*) empfohlen, wo aus der Abweichung (der Norm) der beiden aufeinanderfolgenden Ergebnisvektoren auf die Genauigkeit der Lösung geschlossen werden kann.
- Mit zunehmender Größe des zu lösenden Gleichungssystems nimmt notwendigerweise die Lösungsgenauigkeit ab. Das zu lösende System kann unter Umständen so umfangreich sein, daß es auf dem vorhandenen Rechner in einem nicht mehr gehandhabt werden kann. In einem solchen Fall wird das Gleichungssystem durch geeignete Transformation [25] auf mehrere — voneinander vollkommen unabhängige — kleinere Gleichungssysteme zerlegt.
- In dem in diesem Beitrag gezeigten Beispiel wurde unter Anwendung einer komplexen Arithmetik, mit einer direkten *Gauss*-Elimination mit teilweiser Hauptelementenwahl gerechnet. Es ist geplant, in der Zukunft die *Gauss—Seidel*-Iteration zu benutzen. Die Voraussetzung hierfür ist eine

»gute« Wahl des Ausgangsvektors $\mathbb{W}_0(j\omega, v)$ der Iteration. Da in der gegebenen Aufgabe $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$, ist \mathbb{W} eine stetige Funktion von ω und v ; werden also mit ω »genügend kleine« Schritte gemacht, wird der für das vorige ω erhaltene Lösungsvektor \mathbb{W} eine verhältnismäßig gute Näherung des zu dem aktuellen ω gehörenden \mathbb{W} ergeben.

(Diese Feststellung ist selbstverständlich in der Umgebung der verallgemeinerten Eigenfrequenzen ungültig.) In Anbetracht dessen, daß bei direkten Methoden die erforderliche Maschinenzeit der dritten Potenz, bei Iterationsverfahren jedoch nur dem Quadrat der Zahl der Gleichungen proportional zunimmt, macht die höhere Zahl der Freiheitsgrade der Modelle die Einführung der Iterationsverfahren notwendig. (Auch der Umstand darf nicht unbeachtet bleiben, daß die in Abschnitt 6. einführend erwähnte Streuungsquadratberechnung die Ermittlung sehr vieler Punkte der Übertragungscharakteristik erfordert.)

Im weiteren wird die Übertragungscharakteristik als bekannt gesetzt, u. zw. in bezug auf die gewünschte physikalische Kenngröße R (im vorliegenden Falle $R =$ Verschiebung y). Die komplexe Funktion

$$\mathbb{W}_{i,R} = \mathbb{W}_{i,R}(j\omega, v) = A_{i,R}(j\omega, v) + jB_{i,R}(j\omega, v) \quad (15)$$

ist also die auf die i -te Koordinate bezüglich Komponente des Übertragungscharakteristik-Vektors \mathbb{W}_R für die physikalische Kenngröße R ($i = 1, 2, \dots, n$). Die Funktion

$$|\mathbb{W}_{i,R}(j\omega, v)| = \sqrt{A_{i,R}^2(j\omega, v) + B_{i,R}^2(j\omega, v)} \quad (R = y) \quad (16)$$

ist die Amplitudencharakteristik in bezug auf die i -te Koordinate, während die Funktion

$$\psi_{i,R}(j\omega, v) = \arctan \frac{B_{i,R}(j\omega, v)}{A_{i,R}(j\omega, v)} \quad (R = y) \quad (17)$$

die auf die i -te Koordinate bezogene Phasencharakteristik beschreibt.

Es ist leicht einzusehen, daß mit Hilfe der physikalischen und der das untersuchte Objekt betreffenden geometrischen Zusammenhänge in Kenntnis von \mathbb{W}_y die Übertragungscharakteristik-Vektoren weiterer physikalischer Merkmale (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Beanspruchung in einem beliebigen Punkt s des Tragsystems) abgeleitet werden können. Als Beispiel soll die Übertragungscharakteristik $\mathbb{W}_{\ddot{y}}$ für die Beschleunigung der einzelnen Massenpunkte bestimmt werden. Da

$$\mathbf{y} = \mathbb{W}_y e^{j\omega t}$$

so

$$\ddot{\mathbf{y}} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{y} = -\omega^2 \mathbb{W}_y e^{j\omega t}$$

andererseits

$$\ddot{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{y}} e^{j\omega t}$$

durch den Vergleich der beiden Ausdrücke erhält man $\overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{y}} = -\omega^2 \overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{y}}$. Die Komponenten des Vektors der Amplitudenübertragungscharakteristik der Beschleunigung ergeben sich sinngemäß zu

$$|\overline{W}_{i,y}| = \sqrt{(-\omega^2 A_{i,y}(j\omega, v))^2 + (-\omega^2 B_{i,y}(j\omega, v))^2} = \omega^2 |\overline{W}_{i,y}(j\omega, v)|$$

und die Komponenten der Phasencharakteristika der Beschleunigung zu

$$\psi_{i,y} = \arctan \frac{-\omega^2 B_{i,y}(j\omega, v)}{-\omega^2 A_{i,y}(j\omega, v)} = \arctan \frac{B_{i,y}(j\omega, v)}{A_{i,y}(j\omega, v)} = \psi_{i,y}(j\omega, v).$$

Die Übertragungscharakteristika der Beanspruchung des Punktes mit der Koordinate s können im wesentlichen in Kenntnis der Beschleunigungscharakteristiken nach Gl. (2) bestimmt werden:

$$\overline{\mathbf{W}}_{s,M} = \mathbf{m}^T(s) \mathbf{M} \overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{y}}$$

Die schließlich für die Dimensionierung auf Dauerfestigkeit des Wagenkörpers erforderliche Amplitude der Beanspruchung des Punktes mit der Koordinate s läßt sich aus dem Absolutwert der Übertragungscharakteristik berechnen:

$$|\overline{\mathbf{W}}_{s,M}| = |\mathbf{m}^T(s) \mathbf{M} \overline{\mathbf{W}}_{\mathbf{y}}| \quad (18)$$

Zur Durchführung der Berechnung sind folgende praktische Bemerkungen zu machen:

- Zur Prüfung des stationären Zustands liefert die Kenntnis des verallgemeinerten Eigenwertes gut brauchbare Information. Nach unseren Erfahrungen genügt es nämlich, die Übertragungscharakteristika nur im Bereich $(\omega_{\min}/5 \div 10) \leq \omega \leq (5 \div 10)\omega_{\max}$ zu ermitteln (ω_{\min} ist die kleinste, ω_{\max} die größte Eigenkreisfrequenz des Systems). Außerhalb der angegebenen Grenzen darf der Wert der Übertragungscharakteristik vernachlässigt werden.
- Es ist zweckmäßig, die Vektoren $\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{W}}(j\omega, v)$ bei festgesetztem v durch die Annahme von nach geometrischer Reihe veränderlicher ω -Werte zu berechnen. (So erhält man in logarithmischem Maßstab gleichmäßige Integrationsschritte.) Dieses Rechenverfahren paßt sich auch den Messungen vollkommen an (Filter mit relativer Bandbreite).
- Dessen ungeachtet ist es stets zweckmäßig, im Laufe der Berechnung auch die zu der Eigenkreisfrequenz gehörenden Vektoren $\overline{\mathbf{W}}$ zu bestimmen,

widrigenfalls können bei der Interpolation die Übertragungscharakteristika stark verzerrt werden und in der Berechnung der Streuungsquadrate kann ein unzulässig großer Fehler anfallen.

Das Prinzipschema der unter Berücksichtigung der vorigen Ausführungen organisierten Berechnung ist in Abb. 9 dargestellt.

6.3 Berechnung der Beanspruchungsstreuungen

Von MITSCHKE [8] wurde die Spektraldichte der Straßen verschiedener Güte annähernd

$$\Phi_{hh}(\Omega) = \Phi_{hh}(\Omega_0) \left[\frac{\Omega}{\Omega_0} \right]^{-2} \quad (19)$$

in analytischer Form angegeben ($\Omega = \omega/v$). Dann ergibt sich bei Berücksichtigung von (12)

$$\sigma_R^2 = v^{2-1} \Phi_{hh}(\Omega_0) \Omega_0^2 \int_0^\infty |W_R(j\omega)|^2 \omega^{-2} d\omega \quad (20)$$

(R ist eine beliebige physikalische Kenngröße, für die Berechnung wurde von uns vor allem die durch Gl. (18) bestimmte Beanspruchungs-Übertragungscharakteristik benutzt.)

Die Spektraldichten der Straßen wurden in den untersuchten Fällen durch die Parameter in Tabelle 1 gekennzeichnet.

Tabelle 1

k	Ω_0	$\Phi_{hh}(\Omega_0)$	q	
1	0.01	0.6	2.29	Besserung der Straßenquali- tät
2	0.01	6.0	2.18	
3	0.01	42.9	2.15	
4	0.01	323.0	1.81	

(20) wurde nach dem Trapezverfahren integriert. Die Ergebnisse weisen in Abhängigkeit von der Oktavschriftzahl die in Abb. 10 dargestellte Tendenz auf. Aus der Abbildung ist zu erkennen, aber auch logisch einzusehen, daß durch das nach dem Trapezverfahren erhaltene Ergebnis das genaue Integral stets von oben angenähert wird, von oben gesehen ist nämlich die Spektraldichte stets und die Übertragungscharakteristik im allgemeinen konkav.

Leider ergibt sich als Integrand eine *Punktmenge*, die sich mit »einfachen« Funktionen sehr ungünstig interpolieren läßt, und die reelle Funktion

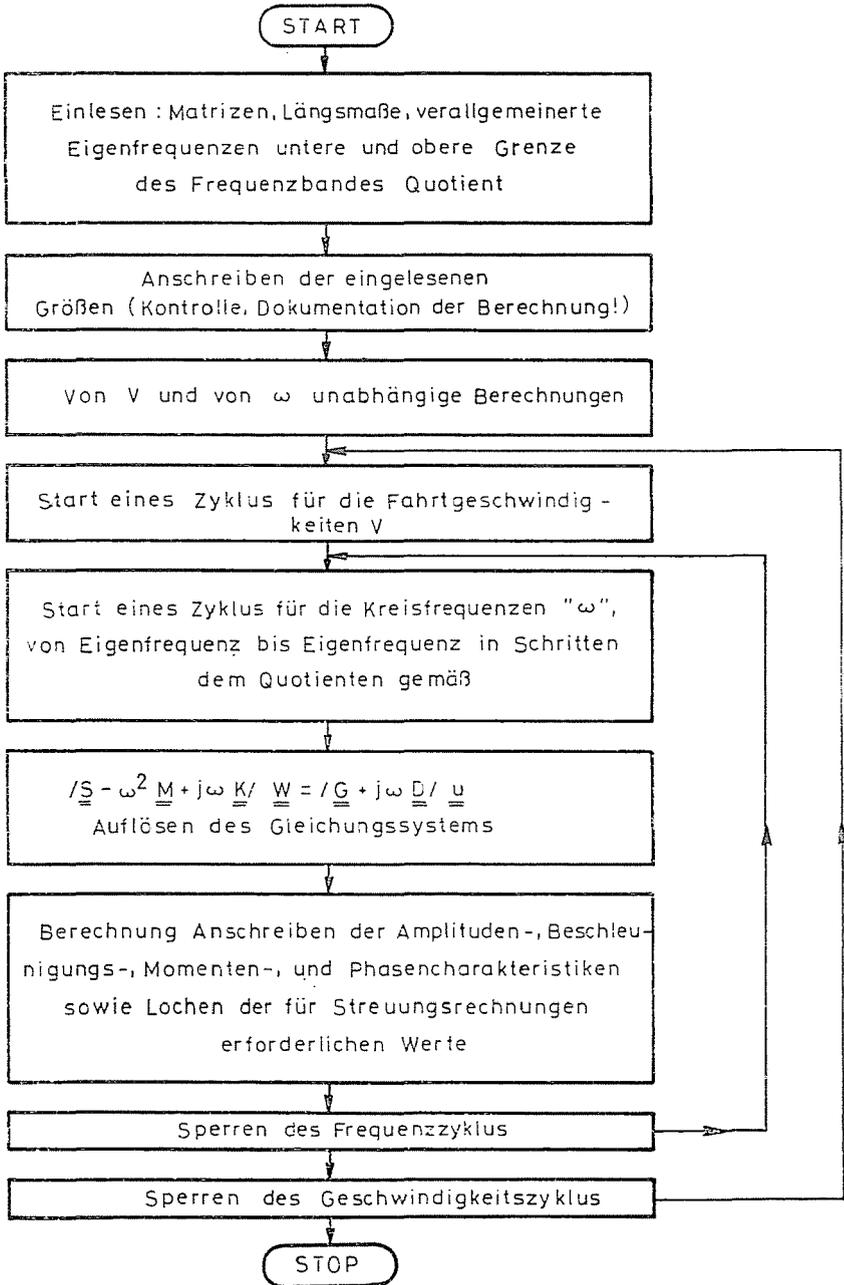


Abb. 9

zwischen zwei Nachbarpunkten ist immer kleiner als die mit der Verbindungsgeraden der beiden Punkte angegebene Näherungsfunktion. Ein anderes, genaueres Integrationsverfahren (z. B. die Simpson-Regel oder das Romberg-Verfahren) kann wegen der nichtäquidistanten Schritte nicht angewandt werden. Das Problem wird dadurch noch verwickelter, daß bei dichter Aufteilung die Oberharmonischen der Eigenschwingungen niedrigerer Frequenz die zu integrierende Funktion immer stärker »auszacken«. Dessenungeachtet ist zu erwarten, daß mit Hilfe der unteren Rechtecksummen für die untere Grenze des Integrals eine annehmbare (nicht allzu kleine) Bewertung erhalten wird. Nach dem von zwei Seiten abgegrenzten (Trapezen- bzw. Rechtecksumme) Integral läßt sich der genaue Wert bereits gut abschätzen.

In dieser Arbeit wird die Verwendung der Beanspruchungsstreuung bei der Berechnung nicht behandelt. Wir möchten jedoch darauf hinweisen, daß von dem Verfasser und Mitarbeitern eine Hypothese ausgearbeitet wurde [26], mit deren Hilfe die Verteilungsfunktion der Beanspruchung für ein beliebiges Element des Tragsystems bestimmt werden kann, d. h. eine ziemlich komplizierte Verteilungsfunktion der Form

$$P[M_{\text{din}}(s)] = f[\mathbf{M}, V(\mathbf{M}, k), \Phi_{hh}(k), \mathbf{W}, (\mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{K}, v)] \quad (21)$$

aufgestellt werden kann (k bedeutet die Straßengüteklassen). Diese Verteilungsfunktion kann zum Planen von Labordauerversuchen bzw. mit Hilfe einer geeigneten Schädigungstheorie zur Lebensdauerabschätzung verwendet werden.

Zahlenbeispiel

Abb. 11 zeigt die geometrische Anordnung eines einfachen Fahrzeugmodells mit 7 Freiheitsgraden. Durch Massenordnung, Steifigkeit bzw. Dämpfung des Systems werden die Merkmale eines besetzten Überlandomnibusses angenähert. Die Koeffizientenmatrizen der das System beschreibenden Differentialgleichung (1) sind wie folgt:

$$\mathbf{M} = \langle 4,07; 2,04; 3,35; 2,04; 2,55; 1,43; 0,81 \rangle \text{ [kp s}^2/\text{cm]}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ [kps/cm]}$$

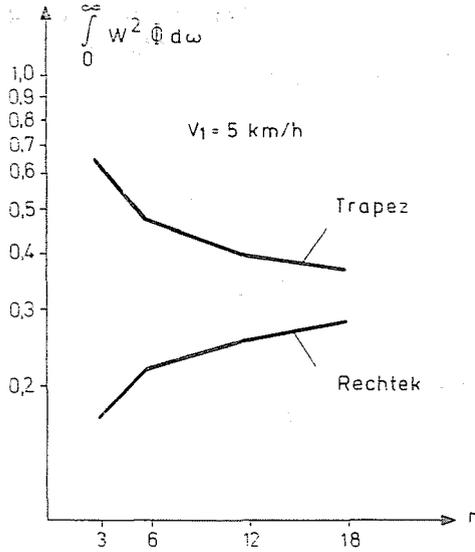


Abb. 10

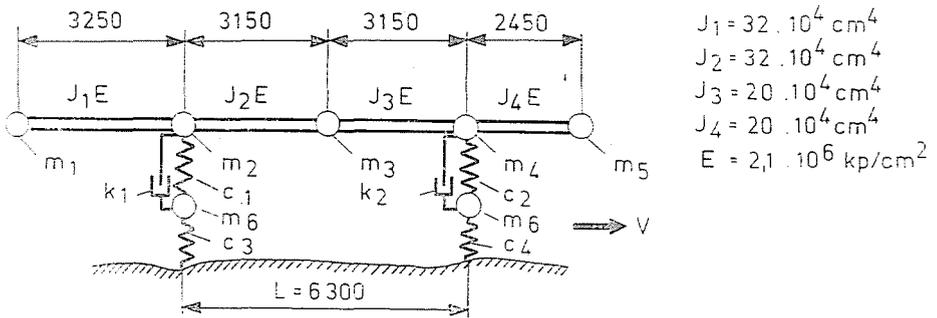


Abb. 11

und

$$S = \begin{bmatrix} 3115,209 & -7\,015,926 & 4\,782,385 & -1\,132,455 & 250,787 & 0 & 0 \\ 19\,192,091 & -16\,917,496 & 6\,989,105 & -1547,771 & -700 & 0 & 0 \\ 23\,672,190 & -17\,112,157 & 5575,076 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20\,049,124 & -8443,617 & 0 & -350 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symmetrische} & & & & 4165,526 & 0 & 0 \\ & & & & & 9400 & 0 \\ & & & & & & 4700 \end{bmatrix}$$

[kp/cm]

Die transiente Erscheinung wurde im Rahmen des Durchfahrens einer vollen Kosinuswelle mit der Länge $\lambda = 1 \text{ m}$ und der Amplitude von 5 cm

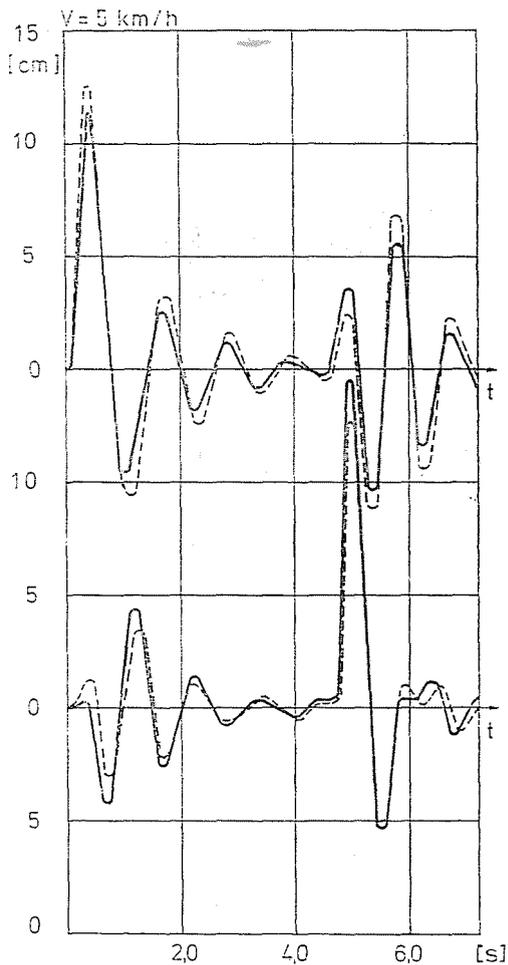


Abb. 12

untersucht. Dementsprechend ist die Erregungsfunktion beim Zusammentreffen des Vorderfahrwerks mit der Fahrbahnwelle

$$(\mathbf{D}\dot{\mathbf{f}}) = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{G}\mathbf{f})^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 21\,750(1 - \cos \omega t)] \text{ [kp]},$$

wo

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = 2\pi v \quad (v[\text{m/s}]),$$

$$(\mathbf{D}\dot{\mathbf{f}}) = \mathbf{0}$$

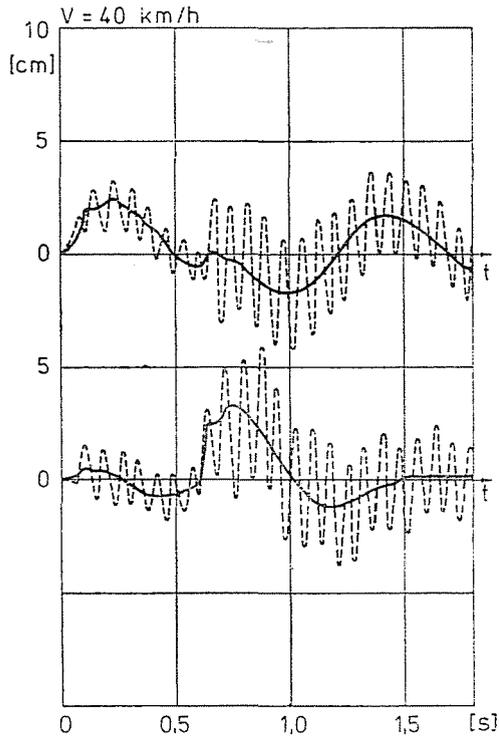


Abb. 13

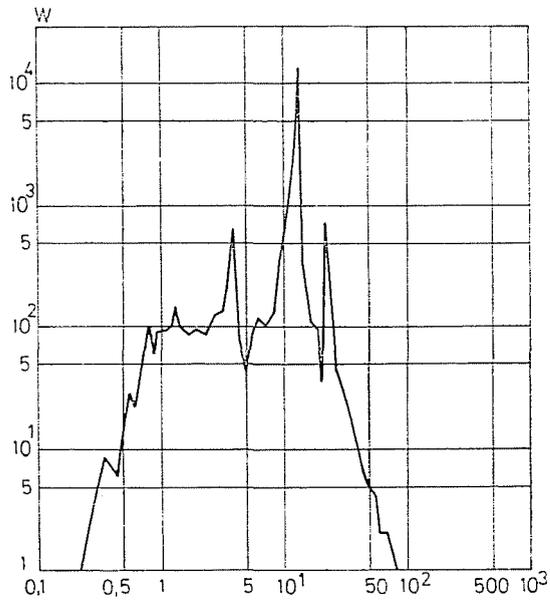


Abb. 14

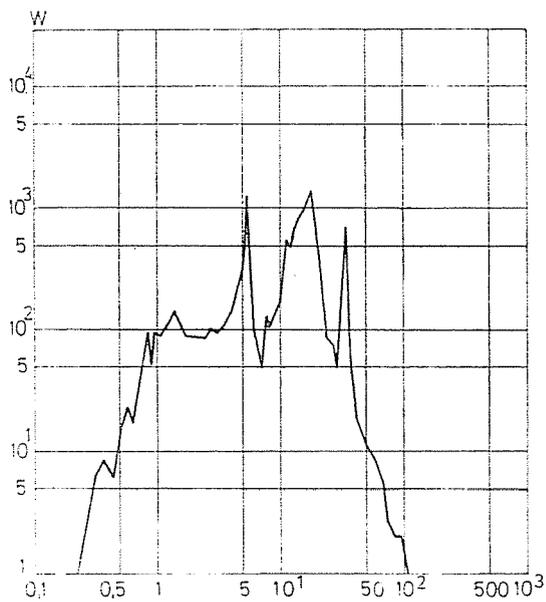


Abb. 15

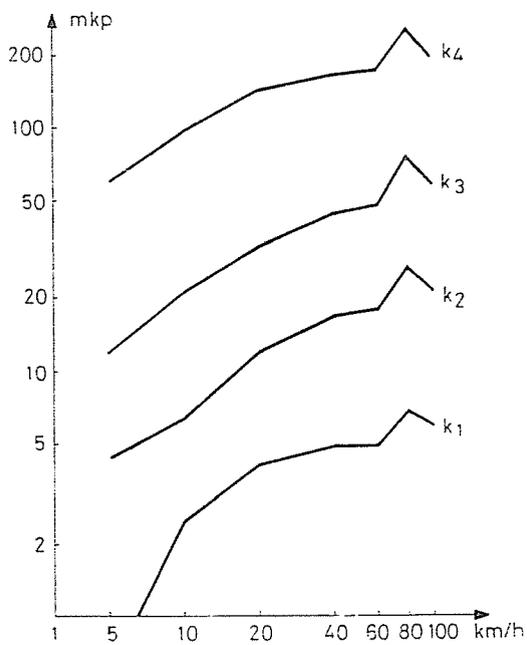


Abb. 16

und beim Zusammentreffen des Hinterfahrwerks mit der Fahrbahnwelle (nach Zurücklegen des Weges L)

$$(\mathbf{Gf})^T = [0, 0, 0, 0, 0, 43\,500(1 - \cos \omega t), 0] \text{ [kp]}$$

Die Berechnung wurde mit Hilfe der in Abschnitt 5.3 beschriebenen digitalen Simulation durchgeführt. Die Ausschläge der Karosseriepunkte über den einzelnen Fahrwerken sind unter Berücksichtigung des vollen Durchfahrens der Fahrbahnwelle bei Geschwindigkeiten von $v_1 = 5 \text{ km/h}$ und $v_2 = 40 \text{ km/h}$ in den Abbildungen 12 und 13 zu sehen. Das obere Diagramm bezieht sich auf einen Punkt über dem Vorder-, das untere Diagramm auf einen Punkt über dem Hinterfahrwerk, die ausgezogene Linie gilt für eine unendlich steife Karosserie, die gestrichelte für einen elastischen Träger. In Abb. 14 wurde die Übertragungscharakteristik der Biegebeanspruchung des Trägerquerschnitts über der Hinterachse bei der Geschwindigkeit v_1 dargestellt. Abb. 15 enthält dieselbe Beziehung, jedoch für einen doppelt so steifen Wagenkasten. In letzterem Falle liegen die einzelnen Eigenfrequenzen voneinander weiter ab, was für die Beanspruchung des Wagenkastens günstiger ist.

Schließlich zeigt Abb. 16 die Streuung der Biegebeanspruchung des Trägerquerschnitts über der Hinterachse für verschiedene Straßengüteklassen, in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

Zusammenfassung

Für die zuverlässigere Berechnung empfiehlt es sich, die auf den Wagenkasten wirkenden, willkürlich als statisch betrachteten Lasten dynamisch zu analysieren. Die aus einzelnen, extremen Fahrbahnfehlern herrührenden dynamischen Belastungen und daher auch die aus diesen entstehenden Beanspruchungen dürfen als quasideterministisch gelten. Es ist zweckmäßig dann die Beanspruchung in Abhängigkeit von der Zeit zu prüfen. Dabei hat für die Dauerfestigkeit auch die stochastische Last hohe Bedeutung. Aus den statistischen Kenngrößen der Fahrbahnunebenheiten können unter Annahme eines linearen Systems die statistischen Kennwerte der Beanspruchung des Wagenkastens ermittelt werden.

Literatur

1. SZÜCS, B.—ILOSVAI, L.: *Periodica Polytechnica Elec. Eng.* 16, 403 (1972).
2. SPERLING, E.: *Leichtbau der Verkehrsfahrzeuge*, 6, 173 (1962).
3. HALBGEBAUER, E.: *Deutsche Eisenbahntechnik*, 19, 562 (1971).
4. RÁCZ, E.: *Dynamische Belastung von Flugzeugflügeln** (Manuskript), Ungarischer Nationalausschuß der IUTAM, Kolloquium Kinematik-Kinetik (1968).
5. RÁCZ, E.: *Leichtbauweise in der Fahrzeug- und Maschinenbauindustrie,** Abschnitt 4. Tankönyvkiadó, Budapest (unter Druck).
6. MATOLCSY, M.—VARGA, J.: *Acta Technica*, 72, 285 (1972).
7. IMECS, L.: *Járművek, Mezőgazdasági Gépek*, 22, 22 (1975).
8. MITSCHKE, M.: *Archiv für Eisenbahntechnik*, 26, 85 (1971).
9. Prüfung der dynamischen Belastung von Omnibussen aufgrund von Straßenmessungen. Bericht des Forschungsinstituts AUTÓKUT,* Budapest (1974).
10. MICHELBERGER, P.: *Acta Technica*, 75, 301 (1973).

11. MICHELBERGER, P.: Periodica Polytechnica, (Mech. Eng.)
12. ILOSVAI, L.—SZÜCS, B.: Vehicle System Dynamics 1, 197 (1972).
13. KRETTEK, O.: Archiv für Eisenbahntechnik, 23, 36 (1968).
14. SCHIAPPATI, A.: Report on the 3rd Int. Techn. Conf. on ESV. Washington, 1972.
15. FERENCZI, M.: Periodica Polytechnica (Transp. Eng.) (unter Druck).
16. MICHELBERGER, P.: Proc. 3rd Conf. on Dimensioning. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
17. POPPER, GY.—GÁSPÁR, Zs.: Periodica Polytechnica (Civ. Eng.), 18, 103 (1974).
18. VAJDA, J.—GYÓRIK, A.: Közlekedéstudományi Szemle 24, 254 (1974).
19. FENYŐ, I.—FREY, T.: Mathematik für Elektroingenieure II.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
20. ÁGOSTON, A.: Városi Közlekedés, 15, 9 (1975).
21. MICHELBERGER, P.—KOBISCHTSCHANOW, W. W.: Periodica Polytechnica (Transp. Eng.) (unter Druck).
22. BOLOTIN, V. V.: Statistische Methoden in der technischen Mechanik.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
23. FODOR, G.: Analyse der linearen Systeme.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
24. CSÁKI, F.: Zeitgemäße Regelungstheorie.* Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1970.
25. MICHELBERGER, P.: Periodica Polytechnica (Transp. Eng.) 2, 3 (1974).
26. MICHELBERGER, P.—FUTÓ, P.—KERESZTES, A.: Acta Technica (unter Druck).

* In ungarischer Sprache

Prof. Dr. Pál MICHELBERGER
 Mihály FERENCZI
 Attila ÁGOSTON
 Zoltán ÚJHELYI

} H-1450 Budapest, Pf. 93