DARSTELLUNG DER EINHEITSMATRIX ÜBER EINEN KOMMUTATIVEN KÖRPER ALS ZIKLISCHE MATRIXSUMME. EINE ANWENDUNG IN DER THEORIE DER n-ECKE

Von

G. Korchmáros

Lehrstuhl für Mathematik. Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 6. Februar 1975)

Vorgelegt von Prof. Dr. G. Szász

Einleitung. Es sei n eine natürliche Zahl und V ein Vektorraum über einem kommutativen Körper, dessen Charakteristik die Zahl n nicht teilt. Die Elemente $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ von V nennen wir auch Punkte, insbesondere den Nullvektor $\mathbf{0}$ den Nullpunkt. Die n-Tupel $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ von Elementen aus V nennen wir — nach F. Bachmann und E. Schmidt ([2] S. 22) — n-Ecke. Für die n-Ecke definiert man eine Addition durch

$$(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) + (\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n) = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{a}_n + \mathfrak{b}_n).$$

Unter dem Schwerpunkt eines n-Ecks $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n)$ wird der Punkt $\frac{1}{n}(\mathfrak{a}_1 + \dots + \mathfrak{a}_n)$ aus V verstanden. Man führt nun die Abbildungen

$$\mathrm{A} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n) \to \mathrm{A}_k = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_{1+k}, \mathfrak{a}_{1+2k}, \dots, \mathfrak{a}_{1+n-k})$$

der Menge aller n-Ecken in sich ein, für $k = 2, \dots, n-1$. A_k und A_{n-k} unterscheiden sich nur im Umlaufsinn. Die A_k mit $(k, n) = 1$ sind die n-Ecke die man erhält indem man die Ecken von A teilerfremd überspringend durchläuft. Bei $(k, n) = n/d$, insbesondere $k = n/d$, ist A_k ein n/d-fach belegtes Teil — d-Eck von A.

Ist K speziell der Körper der reellen Zahlen und A ein affines Bild eines regulären n-Ecks (in klassischem Sinne), so werden A und alle A_k mit $(k, n) = 1$ affin-regulär, mit $(k, n) = n/d$ n/d-fach belegt affin-regulär genannt. Nach F. Bachmann und E. Schmidt ([2] 12.3—12.5) läßt sich jedes n-Eck mit Schwerpunkt $\mathbf{0}$ als Summe von affin-regulären und n/d-fach belegten affin-regulären n-Ecken mit Schwerpunkt 0 eindeutig darstellen. Die Zahl der Komponenten kann $(n-1)/2$ bzw. $n/2$ nicht übersteigen, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

F. Bachmann und E. Schmidt haben ferner gezeigt ([2] 12.3—12.5), daß der Begriff des affin-regulären n-Ecks sich in V verallgemeinern läßt und ihr besagter Satz bei dieser Verallgemeinerung gültig bleibt.

Ziel dieser Arbeit ist, einen direkten Beweis des ausgesprochenen Satzes von F. BACHMANN und E. SCHMIDT zu liefern.

Der Ausgangspunkt ist die Bemerkung: Die Eigenschaft eines n-Ecks, eine Darstellung als Summe von affin-regulären und n/d-fach belegten affin-regulären n-Ecken mit Schwerpunkt $\mathbf{0}$ zu haben, läßt sich auch durch eine Darstellung der Einheitsmatrix über K als Matrixsumme beschreiben.

1°. *Kreisteilungspolynome. Zyklische Matrizen. Eine Darstellung der Einheitsmatrix über einen kommutativen Körper, der die n-ten Einheitswurzeln enthält, als zyklische Matrixsumme.*

Es seien n eine natürliche Zahl und K ein Körper, dessen Charakteristik n nicht teilt.

Ein Element w eines Erweiterungskörpers von K heißt eine n-te *Einheitswurzel*, wenn w Nullstelle des Polynoms $x^n - \varepsilon$ ist. Dabei bezeichnen wir das Einselement von K mit ε.

Auf Grund der Voraussetzung über die Charakteristik von K ist das Polynom $x^n - \varepsilon$ zu seiner Ableitung nx^{n-1} teilerfremd. Daher ist $x^n - \varepsilon$ quadratfrei und hat in keinem Erweiterungskörper mehrfache Nullstellen (vgl. [2] § 6, Satz 3).

Ein Zerfällungskörper von $x^n - \varepsilon$ über K enthält somit genau n n-te Einheitswurzeln. Sie bilden in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe. Diese Gruppe ist als endliche Untergruppe eines Körpers zyklisch (vgl. [1] Satz 26). Ihre erzeugenden Elemente werden *primitive n-te Einheitswurzeln* genannt. Ist w eine primitive n-te Einheitswurzel, so sind

$$w, w^2, \ldots, w^{n-1}, w^n = \varepsilon$$

die sämtlichen Einheitswurzeln. w^k ist dann und nur dann eine primitive n-te Einheitswurzel, wenn $(k, n) = 1$.

Die Zerfällungskörper von $x^n - \varepsilon$ über den Primkörpern werden, nach der Charakteristik des Primkörpers, n-te Kreisteilungskörper der Charakteristik Null bzw. der Charakteristik p genannt; p ist eine Primzahl mit $p \nmid n$.

Unter dem n-ten Kreisteilungspolynom $F_n(x)$ versteht man das auf den höchsten Koeffizienten 1 normierte Polynom, dessen Wurzeln genau die primitiven n-ten Einheitswurzeln sind, also das Polynom

$$F_n(x) = \prod_w (x - w) \quad (w \text{ durchläuft alle primitiven } n\text{-ten Einheitswurzeln}).$$

Es seien $n \geq 3$, $x^2 - cx + \varepsilon$ ein quadratischer symmetrischer Teiler von $F_n(x)$ in $K[x]$. In einem Zerfällungskörper von $x^n - \varepsilon$ hat c eine Darstellung $c = w + w^{-1}$, wobei w eine primitive Einheitswurzel ist. Setze

$$c_k = w^k + w^{-k} \quad \text{für} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Dann ist $c_k \in K$ und da $F_n(x)$ gleich dem Produkt der $x - w^k$ mit $(k, n) = 1$ ist, man erhält durch Zusammenfassen der Faktoren $x - w^k$, $x - w^{-k}$ die folgende Behauptung:

Wenn $F_n(x)$ in $K[x]$ einen quadratischen symmetrischen Teiler hat, zerfällt $F_n[x]$ in $K[x]$ in quadratischen Faktoren:

$$F_n(x) = \prod_{\substack{(k,n)=1 \\ k<n/2}} (x^2 - c_k x + \varepsilon)$$

Im weiteren Verlauf der Untersuchung wird eine Klasse zyklischer Matriezen eine Rolle spielen. Die zyklische Matrizen seien hier als quadratisch-Matrizen definiert, in denen jede Zeile die gleichen Elemente hat, nur von Zeile zu Zeile um eine Stelle nach rechts verschoben.

Hilfssatz. L sei ein Körper, dessen Charakteristik die Zahl n nicht teilt, und der die n-ten Einheitswurzeln enthält. Ferner seien w eine n-te primitive Einheitswurzel und $w^k + w^{-k} = c_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. $\mathbf{E}$ bezeichne die n-reihige Einheitsmatrix über L. Dann bilden die n-reihigen Matrizen

$$\mathbf{M}_0 = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon & \ldots & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_i = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} c_0 & c_i & c_{2i} & \ldots & c_{(n-1)i} \\ c_{(n-1)i} & c_0 & c_i & \ldots & c_{(n-2)i} \\ \vdots & & & & \\ c_i & c_{2i} & c_{3i} & \ldots & c_0 \end{bmatrix} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

in bezug auf die Multiplikation ein quasiidempotentes und orthogonales System. Weiterhin ist

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_m = \dfrac{1}{n}\left(\varepsilon + \dfrac{n-1}{2} c_0\right) \mathbf{E} \text{ für ungerades } n = 2m+1, \\[2ex] \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_{m-1} + \dfrac{1}{2}\mathbf{M}_m = \dfrac{1}{n}\left(\varepsilon + \dfrac{n-1}{2} c_0\right) \mathbf{E} \text{ für gerades } n = 2m. \end{cases}$$

Beweis. Es sei zuerst $n = 2m + 1$, also $\left[\frac{n}{2}\right] = m$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} c_{si} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} w^{si} & \text{für } s \neq 0, \pm n, \pm 2n, \ldots, . \\ \varepsilon + mc_0 & \text{für } s = 0, \pm n, \pm 2n, \ldots, . \end{cases}$$

Damit hat man

$$(2)\qquad \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{M}_j = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \varepsilon + mc_0 & \sum_{i=0}^{n-1} w^i & \sum_{i=0}^{n-1} w^{2i} & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} w^{(n-1)i} \\ \sum_{i=0}^{n-1} w^{(n-1)i} & \varepsilon + mc_0 & \sum_{i=0}^{n-1} w^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} w^{(n-2)i} \\ \vdots & & & & \\ \sum_{i=0}^{n-1} w^i & \sum_{i=0}^{n-1} w^{2i} & \sum_{i=0}^{n-1} w^{3i} & \dots & \varepsilon + mc_0 \end{bmatrix}$$

Da die Summe der n-ten Einheitswurzeln für jede $n \neq 1$ gleich 0 ist (vgl. [2] S. 188) haben wir

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{n-1} w^{si} = 0 \quad (s \neq 0, \pm n, \pm 2n, \dots,) .$$

Nach (2) mit Hilfe von (3) ergibt sich (1) für $n = 2m + 1$.

Zum Fall $n = 2m$ ist zu beachten, daß die Charakteristik des Körpers L nicht gerade ist, also $\frac{2m-1}{2} c_0$ ebenfalls in L liegt und man hat

$$\varepsilon + \sum_{i=1}^{m-1} c_{si} + \frac{1}{2} c_{sm} = \begin{cases} \frac{2m-1}{2} c_0 + \varepsilon & \text{für } s = 0, \pm n, \pm 2n, \dots, \\ \sum_{i=0}^{n-1} w_{si} & \text{für } s \neq 0, \pm n, \pm 2n, \dots, . \end{cases}$$

Daher folgt für $n = 2m$

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{M}_j + \frac{1}{2}\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} \varepsilon + \frac{2m-1}{2} & \sum_{i=0}^{n-1} w^i & \sum_{i=0}^{n-1} w^{2i} & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} w^{(n-1)i} \\ \sum_{i=0}^{n-1} w^{(n-1)i} & \varepsilon + \frac{2m-1}{2} & \sum_{i=0}^{n-1} w^i & \dots & \sum_{i=0}^{n-1} w^{(n-2)i} \\ \vdots & & & & \\ \sum_{i=0}^{n-1} w^i & \sum_{i=0}^{n-1} w^{2i} & \sum_{i=0}^{n-1} w^{3i} & \dots & \varepsilon + \frac{2m-1}{2} c_0 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe von (3) erhalten wir daraus (1) auch für $n = 2m$.

Wir haben ferner, wie man leicht verifizieren kann

$$\mathbf{M}_i\mathbf{M}_j = \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix} \sum_{s=0}^{n-1} c_{si}\, c_{(n-s)j} & \sum_{s=0}^{n-1} c_{si}\, c_{(n+1-s)j} & \cdots & \sum_{s=0}^{n-1} c_{si}\, c_{(n-1-s)j} \\ \sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+1)i}\, c_{(n-s)j} & \sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+1)i} c_{(n+1-s)j} & \cdots & \sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+1)i}\, c_{(n-1-s)j} \\ \vdots & & & \\ \sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+n-1)i}\, c_{(n-s)j} & \sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+n-1)i} c_{(n+1-s)j} & \cdots & \sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+n-1)i}\, c_{(n-1-s)j} \end{bmatrix}$$

$(1 \leq i, j \leq m)$.

Weiterhin ist

$$\sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+g)i}\, c_{(t-s)j} = \sum_{s=0}^{n-1} (w^{(s+g)i} + w^{-(s+g)i}(w^{(t-s)j} + w^{-(t-s)j}) =$$
$$= w^{gi+tj} \sum_{s=0}^{n-1} w^{si+sj} + w^{gi-tj} \sum_{s=0}^{n-1} w^{si+sj} + w^{-gi+tj} \sum_{s=0}^{n-1} w^{-si-sj} +$$
$$+ w^{-gi-tj} \sum_{s=0}^{n-1} w^{-si+sj}.$$

Nach (3) ergibt sich

$$\sum_{s=0}^{n-1} c_{(s+g)i}\, c_{(t-s)j} = \begin{cases} 0,\ i \neq j \\ n\,(w^{(g+t)i} + w^{-(g+t)i} = nc_{(g+t)i}, \quad i = j \neq \dfrac{n}{2} \\ 2n\,(w^{(g+t)m} + w^{-(g+t)m} = 4(-1)^{g+t}\, n\varepsilon,\ i = j = \dfrac{n}{2} = m. \end{cases}$$

Daraus folgt $\mathbf{M}_i\mathbf{M}_j = 0$ für $i \neq j$ und $\mathbf{M}_i\mathbf{M}_i = \frac{1}{n}\mathbf{M}_i \Big(i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\Big)$, $\mathbf{M}_{n/2}\mathbf{M}_{n/2} = \frac{1}{4n}\mathbf{M}_{n/2}$. Nun ist die Gültigkeit des Hilfssatzes offensichtlich.

2°. Wir setzen die Daten der Einleitung voraus und definieren eine *Addition* und eine *Multiplikation mit Elementen aus* K durch

$$(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) + (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$$
$$c(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = (c\mathbf{a}_1, \ldots, c\mathbf{a}_n) \quad c \in K$$

Die Menge $\mathcal{A}_n$ der n-Ecke ist dann ein Vektorraum über K, nämlich der Vektorraum $V^{\boxed{n}} = V \oplus V \oplus \ldots \oplus V$. Dieser Vektorraum wird der Vektorraum der n-Ecke genannt.

In der Definition eines n-Ecks $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ wurde die Verschiedenheit der Ecken $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ nicht vorausgesetzt. Die n-Ecke $(\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a})$ nennen wir triviale n-Ecke. Da man ein triviales n-Eck in V auch als ein n-fach belegtes 1-Eck auffassen kann, bezeichnen wir die Menge der trivialen n-Ecke mit $\mathcal{A}_{1,n}$. Es ist klar, daß $\mathcal{A}_{1,n}$ ein Teilraum des Vektorraums der n-Ecke ist.

Es sei $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ ein n-Eck mit Schwerpunkt $\mathbf{b} = \frac{1}{n}(\mathbf{a}_1 + \ldots \mathbf{a}_n)$. Das n-Eck $A_0 = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}, \ldots \mathbf{a}_n - \mathbf{b})$ entsteht geometrisch, dadurch, daß man A so translatiert, daß sein Schwerpunkt der Nullpunkt wird. Offenbar ist die Menge $\mathcal{A}_0$ der n-Ecke A_0 ein Teilraum des $V^{\boxed{n}}$.

Es sei d ein Teiler von n und $n = d\bar{d}$. Die Klasse der n-Ecke, die durch das zyklische Gleichungssystem

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{d+1}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_{d+2}, \ldots,$$

definiert wird, besteht aus den n-Ecken

(4) $$(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d, \ldots, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_d).$$

Wir bezeichnen die durch (4) definierte Klasse der n-Ecke mit $\mathcal{A}_{d,\bar{d}}$, da man die n-Ecke dieser Klasse in V auch als $\bar{d}$-fach belegte d-Ecke auffassen kann (sie sind aber $d\bar{d}$-Ecke). Sowohl $\mathcal{A}_{d,\bar{d}}$ als ihre Teilmenge $\mathring{\mathcal{A}}_{d,\bar{d}}$ welche aus ihren n-Ecken mit Schwerpunkten $\mathbf{0}$ besteht, sind offenbar Teilräume des Vektorraums $V^{\boxed{n}}$.

Es seien $n \geq 3$ und $x^2 - cx + \varepsilon$ ein quadratisches symmetrisches Polynom aus $K[x]$, von dem wir voraussetzen, daß ein $F_d(x)$ $(n = d\bar{d} > \bar{d} \geq 1)$ teilt. Wir betrachten nun in V das zyklische Gleichungssystem

(5) $$\mathbf{a}_1 - c\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{a}_n - c\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 0.$$

Zunächst bemerkt man, daß die Lösungsmenge nur in $\mathring{\mathcal{A}}_{d,\bar{d}}$ liegende Vektoren $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ enthält ([2] S. 164—165). So ist sie ein Teilraum des Vektorraums $\mathcal{A}_{d,\bar{d}}$ der hier mit $\mathcal{C}(c)$ bezeichnet wird.

Ist K speziell der Körper R der reellen Zahlen, so ist

$$c_k = 2\cos k\frac{2\pi}{d} = e^{ik\frac{2\pi}{d}} + e^{-ik\frac{2\pi}{d}} \; (k = 0, 1, \ldots, d-1),$$

folglich ist jedes c_k, als Summe zweier zueinander primitiver d-ten Einheitswurzeln, eine solche Zahl; ist umgekehrt $x^2 - cx + 1$ ein Teiler von $F_d(x)$, so ist $c = c_k$ für irgendeinen Index k $(0 \leq k \leq d - 1)$. Bekanntlich ([2] S. 151 und S. 163 Satz 6.) besteht die Lösungsmenge des Gleichungssystems (5) in der reellen Ebene außer der Klasse der trivialen n-Ecke aus affin-regulären d-Ecken mit Schwerpunkt $\mathbf{0}$, oder aus n/d-fach belegten affin-regulären d-Ecken mit Schwerpunkt $\mathbf{0}$, je nachdem $n = d$ oder $n = d\bar{d}$ $(\bar{d} > 1)$ ist. Dabei wird ein n-Eck $(a_1, \ldots, a_n)$ n/d-fach belegt affin-regulär genannt, wenn $n = d\bar{d}$ $(1 < \bar{d} < n)$ und

$$(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_d, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_d, \ldots, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_d)$$

ist wobei $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_d)$ ein affin-reguläres d-Eck bildet.

Wir kehren von der reellen Ebene zum allgemeinen Fall zurück und führen eine analog Terminologie ein: Ein n-Eck A heiße n/d-fach belegt affinregulär — nach F. Bachmann und E. Schmidt — wenn $\mathsf{A}_0 = \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ dem zyklischen Gleichungssystem (5) genügt. Ist insbesondere $n = d$, wird A affinregulär genannt.

Bei gegebenen n und K soll nun wiederum, wenn n 3 ist, in $K[x]$ ein quadratischer Teiler $x^2 - cx + \varepsilon$ von $F_n(x)$ existieren. Aus dem in 1°. verifizierten Zerlegungssatz von $F_n(x)$ folgt

$$x^n - \varepsilon = \begin{cases} (x - \varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{\frac{n-1}{2}-1} (x^2 - c_k x + \varepsilon) & \text{für ungerades } n \\ (x - \varepsilon)(x + \varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (x^2 - c_k x + \varepsilon) & \text{für gerades } n \end{cases}$$

mit $w^k + w^{-k} = c_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Mit Hilfe der Booleschen Algebren haben F. Bachmann und E. Schmidt bewiesen, daß der Vektorraum der n-Ecke über einem kommutativen Körper K, der einen quadratischen symmetrischen Teiler von $F_n(x)$ in $K[x]$ hat, in der folgenden Weise direkt zerlegbar ist:

$$(6)\quad \mathcal{A}_n = \begin{cases} \mathcal{A}_{1,n} \oplus \mathcal{C}(C_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}(C_{\frac{n-2}{2}}) & \text{für ungerades } n \\ \mathcal{A}_{1,n} \oplus \mathcal{A}_{2,n} \oplus \mathcal{C}(C_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}(C_{\frac{n}{2}-1}) & \text{für gerades } n \end{cases}$$

Da eine Zerlegung von $(x^n - \varepsilon)(x - \varepsilon)$ bzw. $(x^n - \varepsilon)/(x + \varepsilon)(x + \varepsilon)$ in quadratische symmetrische Faktoren bis auf Assoziierte eindeutig bestimmt ist, sind die in (6) genannten Klassen $\mathcal{C}(c_k)$ $\left(k = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}\right.$, bzw. $\left.\dfrac{n}{2} - 1\right)$, die sämtlichen Lösungsräume von (5).

Man erkennt leicht, daß dieser Zerlegungsatz, geometrisch interpretiert, dasselbe besagt, wie der in der Einleitung ausgesprochene Satz.

Als Anwendung des Hilfssatzes 1 kann nun ein direkter Beweis für den zitierten Satz von F. Bachmann und E. Schmidt angegeben werden. Wir haben nämlich die folgenden Behauptungen:

1. Es sei $n \geq 3$. Da $F_n(x)$ nach der Voraussetzung des Satzes in $K[x]$ einen quadratischen symmetrischen Teiler hat, liegen $w^k + w^{-k} = c_k$ in K (vgl. 1°). Insbesondere sind die Elemente von $\mathbf{M}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, [n/2])$ aus K; also kann man jedes $\mathbf{M}_i$ als eine lineare Transformation von $V^{\boxed{n}}$ in $V^{\boxed{n}}$ auffassen.

2. Aus den Definitionen folgt unmittelbar $\operatorname{Im} \mathbf{M}_0 = \mathcal{A}_{1,n}$.

3. Ist $n = 2m$, so läßt sich $\operatorname{Im} \mathbf{M}_m = \mathcal{A}_{2,m}$ leicht verifizieren.

4. $\operatorname{Im} \mathbf{M}_i \subseteq \mathcal{C}(c_i)$ $\left(i = 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{n-1}{2}\right]\right)$.

Beweis. Sei $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ ein n-Eck. Es ist zu zeigen, da

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{ji}\,\mathfrak{a}_{j+1},\ \sum_{j=0}^{n-1} c_{(j-1)i}\,\mathfrak{a}_{j+1}, \ldots, \sum_{j=0}^{n-1} c_{(j+1)i}\,\mathfrak{a}_{j+1}\right)$$

dem Gleichungssystem (5) genügt. Da für $s = 0, \pm 1, \ldots,$

$$c_{(j+s-1)i} - c_i\,c_{(j+s)i} + c_{(j+s+1)i} = w^{(j+s-1)i} + w^{-(j+s-1)i} - w^i + w^{-i} + \\ + w^{(j+s)i} + w^{-(j+s)i} + w^{(j+s+1)i} + w^{-(j+s+1)i} = 0$$

ist, so ergibt sich

$$\sum_{j=0}^{n-1} (c_{(j+s-1)i} - c_i\,c_{(j+s)i} + c_{(j+s+1)i})\,\mathfrak{a}_{j+1} = \mathbf{0},\quad (s = 0, \pm 1, \ldots,).$$

Das lehrt unmittelbar

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{(j+s+1)i}\,\mathfrak{a}_{j+1} - c_i \sum_{j=0}^{n-1} c_{(j+s)i}\,\mathfrak{a}_{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} c_{(j+s-1)i}\,\mathfrak{a}_{j+1} = \mathbf{0}.$$

Wenn s die Zahlen $n-1, n-2, \ldots, 0$ durchläuft, ergeben sich nach und nach die Gleichungen des Systems (5).

5. $$\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}\,c_0 + \varepsilon\right) = \varepsilon.$$

Beweis. Es ist klar, daß $c_0 = 0\varepsilon$ oder $c_0 = 2\varepsilon$ gilt, je nachdem die Charakteristik von K gleich oder ungleich 2 ist. Also hat man

$$\varepsilon + \frac{n-1}{2}\,c_0 = \begin{cases} n\varepsilon & \text{für Char } K \neq 2 \\ \varepsilon & \text{für Char } K = 2. \end{cases} \tag{7}$$

Dabei muß n im zweiten Fall ungerade sein. Das liefert hier sofort $n\varepsilon = \varepsilon$. Da Char $K \nmid n$, folgt die Behauptung.

6. Aus der Behauptung 5 ergibt sich offensichtlich:

$$\operatorname{Im} \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{2} c_0 + \varepsilon \right) \mathbf{E} = \mathcal{A}_n .$$

7. Wegen der Behauptung 6 hat man (vgl. (1))

$$\operatorname{Im}(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_m) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{n} \frac{n-1}{2} c_0 + \varepsilon \right) \mathbf{E} = \mathcal{A}_n \quad \text{für } n = 2m + 1$$

$$\operatorname{Im} \left(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 + \ldots + \mathbf{M}_{m-1} + \frac{1}{2} \mathbf{M}_m \right) =$$

$$= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{n} \frac{n-1}{2} c_0 + \varepsilon \right) \mathbf{E} = \mathcal{A}_n \quad \text{für } n = 2m.$$

8. Da für lineare Transformationen $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ über einen Vektorraum W, $\operatorname{Im}(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2) \subseteq \operatorname{Im} \mathbf{N}_1 + \operatorname{Im} \mathbf{N}_2 \subseteq W$ ist, hat man wegen der Behauptungen 6 und 7

$$\operatorname{Im} \mathbf{M}_0 + \operatorname{Im} \mathbf{M}_1 + \ldots + \operatorname{Im} \mathbf{M}_m = \mathcal{A}_n \quad \text{für } n = 2m + 1$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{M}_0 + \operatorname{Im} \mathbf{M}_1 + \ldots + \operatorname{Im} \mathbf{M}_{m-1} + \operatorname{Im} \frac{1}{2} \mathbf{M}_m = \mathcal{A}_n \quad \text{für } n = 2m.$$

9. Ein elementarer Satz der linearen Algebra besagt, daß der Durchschnitt der Bildräume der orthogonalen linearen Transformationen, aus dem Nullvektor besteht. Wendet man das auf zwei solche lineare Transformationen $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ an, so hat man

$$\operatorname{Im} \mathbf{N}_1 + \operatorname{Im} \mathbf{N}_2 = \operatorname{Im} \mathbf{N}_1 \oplus \operatorname{Im} \mathbf{N}_2$$

10. Der Hilfssatz lehrt, daß die linearen Transformationen $\mathbf{M}_0, \ldots, \mathbf{M}_m$ paarweise orthogonal sind. Daraus folgt, daß $\mathbf{M}_m$ und $\mathbf{M}_0 + \ldots + \mathbf{M}_{m-1}$, $\mathbf{M}_{m-1}$ und $\mathbf{M}_0 + \ldots + \mathbf{M}_{m-2}, \ldots$ $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_0$ ebenfalls orthogonal sind. So hat man nach Behauptung 9

$$\operatorname{Im} M_0 \oplus \operatorname{Im} M_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} M_m = \mathcal{A}_n \quad \text{für } n = 2m + 1$$

$$\operatorname{Im} M_0 \oplus \operatorname{Im} M_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} M_{m-1} \oplus \operatorname{Im} M_m = \mathcal{A}_n \quad \text{für } n = 2m.$$

Aus der Behauptungen 2, 3, 4 und 9 folgt nun, daß

$$\mathcal{A}_{1,n} = \mathrm{Im}\,\mathbf{M}_0,\ \mathcal{A}_{2,m} = \mathrm{Im}\,\mathbf{M}_m,\ \mathcal{C}(c_i) = \mathbf{M}_i \left(i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right);$$

demnach der vorgesehene Beweis des Satzes von F. Bachmann und E. Schmidt komplett ist.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein direkter Beweis für einen Satz von F. Bachmann und E. Schmidt gegeben, der sich im wesentlichen auf eine Darstellung der Einheitsmatrix über einem kommutativen Körper als Matrixsumme stützt.

Literatur

1. Artin, E.: *Galoische Theorie.* Leipzig 1959.
2. Bachmann, F.—Schmidt, E.: *n-Ecke.* Hochschultaschenbücher-Verlag Mannheim, Wien, Zürich 1970.

Gábor Korchmáros 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3, Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszék.