DÉDUCTION DE LA MODIFICATION A PARTIR DU PROBLÈME GÉNÉRAL DE LIAISON DES STRUCTURES STATIQUEMENT INDÉTERMINÉES

par

E. NÁNDORI

Chaire de Méchanique, Université Technique de Budapest

(Arrivée le 2 decembre 1974)

Présentée par Prof. Dr. P. MICHELBERGER

Lors de la conception d'une structure quelconque il arrive toujours que certaines parties de la structure sont sous- ou surdimensionnées. Pour mettre au point une structure économique, à la résistance convenable, il faut modifier la résistance (par conséquent généralement la rigidité) des éléments sous- ou surdimensionnés. Dans les structures statiquement indéterminées le changement des éléments non-satisfaisants entraîne un changement de la répartition des charges et, en résultat de nouveaux calculs, on obtient de nouveaux éléments sous- ou surdimensionnés (comme il est à présumer, en nombre moins élevé et dans une moins forte mesure qu'au premier cas). La répétition du calcul avec des valeurs de la rigidité différentes conduit à un procédé d'itération dont la convergence dépend fortement de la pose des dimensions. Dans une construction bien choisie le nombre des itérations est de deux au maximum.

A cause du changement de la rigidité, les itérations successives demandent la répétition complète du procédé, ce qui exige une grande dépense de calcul. On doit donc chercher un procédé où la majeure partie du calcul peut être utilisée sans changement et où il faut tenir compte seulement de l'action additionnelle des éléments modifiés.

Ce problème était traité pour la première fois par M. ARGYRIS [1]. Dans notre cas, pour l'extension du procédé nous utilisons la solution du problème général de la liaison des structures statiquement indéterminées [2]. Considérons le système porteur initial comme système de base et parallèlement à

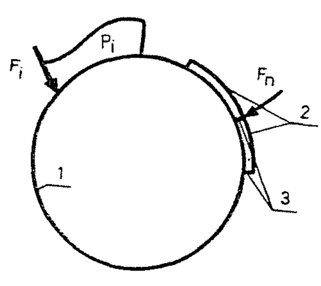

Fig. 1. Raccordement d'un élément supplémentaire

chacun des éléments sous- ou surdimensionnés intégrons dans la construction un élément supplémentaire (élément de liaison) de manière que les sous- ou surdimensionnements soient autant que possible éliminés (fig. 1). Dans le cas d'un élément surdimensionné, l'élément de liaison a une rigidité négative.

Les charges finales des systèmes raccordés et de l'élément de liaison (si le nombre des systèmes raccordés est de n) peuvent être données par les équations matricielles suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{G}_1\mathbf{B}_{1k}\Delta^{-1}\delta \\
\mathbf{L}_2 &= \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_2\mathbf{B}_{2k}\Delta^{-1}\delta \\
&\vdots \\
\mathbf{L}_i &= \mathbf{V}_i - \mathbf{G}_i\mathbf{B}_{ik}\Delta^{-1}\delta \\
&\vdots \\
\mathbf{L}_n &= \mathbf{V}_n - \mathbf{G}_n\mathbf{B}_{nk}\Delta^{-1}\delta \\
\mathbf{L}_k &= \mathbf{A}_k - \mathbf{B}_{kk}\Delta^{-1}\delta
\end{aligned}$$

où

$$\Delta = \mathbf{B}^*_{kk}\mathbf{R}_k\mathbf{B}_{kk} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}^*_{ik}\mathbf{R}_i\mathbf{G}_i\mathbf{B}_{ik}$$

$$\delta = \mathbf{B}^*_{kk}\mathbf{R}_k\mathbf{A}_k + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}^*_{ik}\mathbf{R}_i\mathbf{V}_i$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{B}^*_{ii}\mathbf{R}_i$$

et avec les notations:

$\mathbf{E}$: matrice unité
$\mathbf{A}_i$: matrice des efforts de l'i-ième système porteur, dus à la charge extérieure
$\mathbf{B}_{ij}$: matrice des efforts spécifiques de l'i-ième système porteur, dus à la charge spécifique unitaire agissant dans les coupes imaginaires du j-ième système porteur
$\mathbf{V}_i$: matrice des efforts de l'i-ième système de base détaché, dus à ses propres charges extérieures
$\mathbf{R}_i$: matrice de ressort de l'i-ième système porteur.

Dans les matrices de charges les lignes sont déterminées par les éléments du système porteur, les colonnes sont déterminées par les groupes de charges (sous **A**) et par les inconnues (sous **B**).

Par la modification du système les équations ci-dessus deviennent plus simples car on n'a plus affaire à une liaison de systèmes du nombre n, mais on n'a qu'un système à modifier (système de base) et un système de liaison. Ce dernier contient les nouveaux éléments raccordés aux éléments à modifier.

La charge du système de base:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{G}_1\mathbf{B}_{1k}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\delta\,.$$

La charge du système de liaison:

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{B}_{kk}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\delta$$

où:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11}^*\mathbf{R}_1$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{B}_{kk}^*\mathbf{R}_k\mathbf{B}_{kk} + \mathbf{B}_{1k}^*\mathbf{R}_1\mathbf{G}_1\mathbf{B}_{1k}$$

$$\delta = \mathbf{B}_{kk}^*\mathbf{R}_k\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_{1k}^*\mathbf{R}_1\mathbf{V}_1\,.$$

Sur la section à modifier du système la coïncidence entre l'élément initial et entre l'élément modificateur raccordé doit être assurée dans la longueur totale de la section. Si le rapport entre la rigidité de l'élément initial et l'élément modificateur est le même en n'importe quel point de la section et s'il n'y a pas d'application de charge extérieure dans les points intermédiaires de la section, il suffit de donner les mêmes déformations aux deux éléments dans les points finals de la section parce que ainsi les deux poutres coïncideront nécessairement dans les points intérmédiaires. Nous posons donc la condition qu'il n'y a pas d'application de charge directe extérieure sur la section à modifier, c'est-à-dire:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{0} \quad \text{et}$$

$$\delta = \mathbf{B}_{1k}^*\mathbf{R}_1\mathbf{V}_1\,.$$

Ainsi les charges des systèmes seront:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{B}_{1k}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\delta + \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11}^*\mathbf{R}_1\mathbf{B}_{1k}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\delta$$

$$\mathbf{L}_k = -\mathbf{B}_{kk}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\delta\,.$$

Étant donné que sur la section modifiée l'élément de liaison et le système de base sont complètement solidaires, il est pratiquement injustifié de parler séparément de leur charges. Nous examinerons plutôt les charges de la section modifiée, obtenues en additionnant les deux efforts. Les matrices $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_k$ ne sont pas du même ordre de grandeur car les nombres des lignes sont différents, ainsi on ne peut pas additionner ces deux matrices directement. Le nombre des lignes de $\mathbf{L}_1$ est de $p_1 + p_2 \cdot 2 + \ldots$ (en fonction des charges dont on a tenu compte lors du calcul des déformations), tandis que le nombre des lignes de $\mathbf{L}_k$ n'est déterminé que par les sections modifiées. (Ici p_1 est le nombre des sections à charge constante, p_2 est le nombre des sections à charge linéaire, ...) Pour assurer la condition de l'addition des matrices, complétons la matrice

$\mathbf{L}_k$ par des éléments «zéro» de manière que les éléments différents de «zéro» relatifs aux sections modifiées, se trouvent dans les mêmes lignes que les données relatives à ces sections dans la matrice $\mathbf{L}_1$. Représentons les matrices ainsi obtenues par $\overline{\mathbf{L}}_k$ et la matrice $\mathbf{B}_{kk}$, complétée de manière analogue par les éléments «zéro» par $\overline{\mathbf{B}}_{kk}$

$$\overline{\mathbf{L}}_k = -\overline{\mathbf{B}}_{kk}\Delta^{-1}\delta\,.$$

Les charges finales du système modifié seront:

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{L}_1 + \overline{\mathbf{L}}_{k1} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{B}_{1k}\Delta^{-1}\delta + \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11}^{*}\mathbf{R}_1\mathbf{B}_{1k}\Delta^{-1}\delta - \overline{\mathbf{B}}_{kk}\Delta^{-1}\delta\,.$$

Mais $\mathbf{B}_{1k} = -\overline{\mathbf{B}}_{kk}$, étant donné dans le système de base et dans le système de liaison, introduit comme système modificateur, ils se produisent des efforts de grandeur égale, mais de signe contraire. $\mathbf{L}_m$ prend donc une forme plus simple:

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{V}_1 + \underline{\mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11}^{*}\mathbf{R}_1\mathbf{B}_{1k}\Delta^{-1}\mathbf{B}_{1k}\mathbf{R}_1\mathbf{V}_1}\,.$$

L'action des couples de charges unitaires, agissant dans les points de liaison s'achève sur la section modifiée, il en résulte donc que la matrice $\mathbf{B}_{1k}$ ne contient des éléments différents de zéro que sur la section modifiée. S'il en est ainsi, lors de la réalisation des opérations matricielles de la formule soulignée il suffit de tenir compte des matrices partielles relatives aux parties modifiées. Représentons les matrices partielles relatives aux parties modifiées, représentées par un index v. Ainsi:

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{V}_1 + \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11v}^{*}\mathbf{R}_{1v}\mathbf{B}_{1kv}\Delta^{-1}\mathbf{B}_{1kv}^{*}\mathbf{R}_{1v}\mathbf{V}_{1v}\,.$$

La valeur de Δ se construit aussi à l'aide des matrices partielles:

$$\Delta = \mathbf{B}_{1kv}^{*}\mathbf{R}_{1v}(\mathbf{E}_{1v} - \mathbf{B}_{11v}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11v}^{*}\mathbf{R}_{1v})\mathbf{B}_{1kv} + \mathbf{B}_{kk}^{*}\mathbf{R}_k\mathbf{B}_{kk}\,.$$

Puisque $\mathbf{B}_{1k} = -\overline{\mathbf{B}}_{kk}$, l'égalité $\mathbf{B}_{1kv} = -\mathbf{B}_{kk}$ est aussi valide, donc:

$$\Delta = \mathbf{B}_{1kv}^{*}\mathbf{R}_{1v}(\mathbf{E}_{1v} - \mathbf{B}_{11v}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11v}^{*}\mathbf{R}_{1v})\mathbf{B}_{1kv} + \mathbf{B}_{1kv}^{*}\mathbf{R}_k\mathbf{B}_{1kv}\,.$$

Prenons de l'expression Δ comme facteur de multiplication de gauche $\mathbf{B}_{1kv}^{*}\mathbf{R}_{1v}$ et comme celui de droit $\mathbf{R}_{1v}\mathbf{B}_{1kv}$, alors on obtient:

$$\Delta = -\mathbf{B}_{1kv}^{*}\mathbf{R}_{1v}(\mathbf{B}_{11v}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11v}^{*} - \mathbf{R}_{1v}^{-1} - \mathbf{R}_{1v}^{-1}\mathbf{R}_k\mathbf{R}_{1v}^{-1})\mathbf{R}_{1v}\mathbf{B}_{1kv}\,.$$

En supposant que $\mathbf{B}_{1kv}$ ne peut être qu'une matrice quadratique (c'est toujours vrai s'il n'y a pas de charge propre sur la section modifiée), d'où il résulte que les produits $\mathbf{B}_{1kv}^{*}\mathbf{R}_{1v}$ et $\mathbf{R}_{1v}\mathbf{B}_{1kv}$ sont aussi des matrices quadratiques, alors l'inversion de Δ peut être réalisée par facteurs, et en remettant l'expression de $\mathbf{L}_m$ et en tenant compte du fait que:

$$\mathbf{R}_{1v}\mathbf{B}_{1kv}(\mathbf{R}_{1v}\mathbf{B}_{1kv})^{-1} = \mathbf{E} \quad \text{et}$$

$$(\mathbf{B}^*_{1kv}\mathbf{R}_{1v})^{-1}\mathbf{B}^*_{1kv}\mathbf{R}_{1v} = \mathbf{E}$$

on aura la formule suivante:

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{V}_1 - \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}^*_{11v}(\mathbf{B}_{11v}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}^*_{11v} + \Delta\mathbf{R}^{-1})^{-1}\mathbf{V}_{1v}$$

où

$$\Delta\mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}_{1v}^{-1}(\mathbf{R}_{1v} + \mathbf{R}_k)\mathbf{R}_{1v}^{-1}.$$

Dans le cas de la modification d'une section de longeur l, chargée par un moment fléchissant linéairement variable, on a:

$$\Delta\mathbf{R} = -\frac{l}{6(I_1 + I_k)E}\,\frac{I_k}{I_1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta\mathbf{R}^{-1} = \frac{2(I_1 + I_k)E}{l}\,\frac{I_1}{I_k}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

où

I_1E signifie la rigidité de l'élément initial et
I_kE signifie la rigidité de l'élément de liaison.

Ouvertures

Dans les véhicules il faut souvent réaliser différentes ouvertures (application de linteaux de décharge), interrompant la régularité de la structure. Bien que l'ouverture diminue le degré d'indétermination du système de base, il est généralement plus avantageux de déterminer le jeu de forces d'une structure régulière avec un plus grand nombre de degrés d'indétermination. Dans ce cas il faut tenir compte de l'effet de l'ouverture par une correction ultérieure.

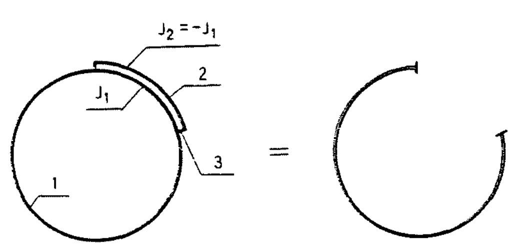

Fig. 2. Ouverture dans la structure

L'ouverture peut être considérée comme une modification où la rigidité de l'élément de liaison est égale à celle de la section donnée du système de base mais de signe contraire (fig. 2). Il est évident que la somme des deux rigidités est égale à zéro, de manière que:

$$\Delta\mathbf{R} = \infty \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{0}\,.$$

Par exemple, dans la section sous charge de flexion on a:

$$\Delta\mathbf{R}^{-1} = \frac{2(I_1 - I_1)E}{l}\,\frac{I_1}{I_1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi les charges finales du système avec ouvertures peuvent être décrites par l'équation matricielle suivante:

$$\mathbf{L} \;= \mathbf{V}_1 - \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11v}^{*}(\mathbf{B}_{11v}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11v}^{*})^{-1}\mathbf{V}_{1v}\,.$$

Résumé

Dans l'article l'auteur déduit — à partir du problème général de liaison des structures statiquement indéterminées — l'équation matricielle pour la modification des structures. A l'aide de cette méthode on peut préciser le jeu des forces des structures pour assurer l'utilisation économique des éléments structuraux. Cette équation permet aussi de définir un modèle plus simple pour le calcul (par exemple pour des structures avec des ouvertures), parce qu'on peut calculer facilement par la modification l'effet additionnel de la découpure des éléments.

Littérature

1. Argyris, J. H.—Kelsey, S.: Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft. Butterworths. London, 1963.
2. Michelberger, P.: Verallgemeinerung des Verbindungsproblems statisch unbestimmter Tragwerken. Periodica Polytechnica. **2**, 3. (1974)

Ernő Nándori, H-1450 Budapest Pf. 93