

# DIE THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DER BELASTUNGSZUSTANDSVERTEILUNG VON MASCHINENSÄTZEN MIT HILFE EINER STATISTISCHEN METHODE

Von

I. ZOBORY

Lehrstuhl für Schienenfahrzeuge, Technische Universität Budapest  
(Eingegangen am 26. März 1974)

Vorgelegt von Prof. Dr. K. HORVÁTH

## I. Einführung

Der momentane Belastungszustand eines beliebigen Maschinensatzes kann praktisch als bekannt betrachtet werden, wenn in einem beliebigen Querschnitt der Kraftübertragungskette der in dem betrachteten Augenblick vorhandene Drehmoment- und der Drehzahlwert bekannt sind. Die Betriebsbelastungszustände der den Maschinensatz bildenden Maschineneinheiten ändern sich während der Lebensdauer der Maschine im größten Teil der Fälle ohne eine vorher angebbare funktionelle Regelmäßigkeit. Um die optimale Zusammenarbeit der einzelnen Maschineneinheiten zu sichern, ist es während der Konstruktion erforderlich, daß in Rahmen der Möglichkeiten die Veränderungsprinzipien dieser schwankenden Belastungen bekannt seien. Das gleiche ist auch nötig, um eine wirtschaftliche Festigkeitsbemessung der kraftübertragenden Maschinenelemente zu sichern. Da der zeitliche Veränderungsprozeß der Belastungszustände mit einer eindeutigen Funktion nicht angegeben werden kann, müssen die bestehenden stochastischen Zusammenhänge unter Anwendung der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik erforscht werden.

Die grundlegende Zielsetzung unserer Untersuchung war, ein wirklichkeitnahes Bild der wahrscheinlichen Verteilung der während der Lebensdauer des Maschinensatzes vorkommenden Belastungszustände zu geben. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten können auf empirischem Weg mit Hilfe der statistischen Beobachtung eines im Betrieb arbeitenden Maschinensatzes bestimmt werden. Mit Hilfe eines für die statistische Untersuchung geeigneten Registriergeräts werden in einem hinreichend langen Zeitabschnitt die Informationen über die realisierten Belastungszustände aufgezeichnet. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden mit der relativen Häufigkeit der so registrierten Kenngrößen auf Grund des Gesetzes der großen Zahlen angenähert.

In diesem Beitrag werden einerseits die allgemeinen Fragen des als stationär angenommenen Zufallsprozesses der Betriebszustände untersucht, wobei der Begriff der homogenen Klasse der unter statistisch gleichen Bedin-

gungen arbeitenden Maschinensätze gleichen Aufbaues eingeführt wird; zweitens wird die statistische Methode der Bestimmung der mittleren Belastungszustandsverteilung der so definierten homogenen Klasse behandelt und ein kurzer Überblick über die Anwendungsbereiche der Belastungszustandsverteilungsfunktion gegeben.

## 2. Die Kennzeichnung des Betriebszustands des Maschinensatzes

Die Gesamtheit der physikalischen Größen endlicher Anzahl, die Betriebskennwerte des Maschinensatzes, die den augenblicklichen Betriebszustand eindeutig bestimmen, können mit dem zu dem gegebenen Augenblick zugeordneten Zustandsvektor angegeben werden. Die Lebensdauer der Einrichtung sei mit  $T$  bezeichnet, und es wird angenommen, daß Betriebskenngrößen der Anzahl  $r$  zu beobachten sind. In diesem Fall wird der zu dem Zeitpunkt  $t \in T$  gehörende Zustandsvektor als ein Element von  $R^{(r)}$  — des  $r$ -dimensionalen reellen Euklidischen Raumes — folgendermaßen aufgeschrieben:

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_r(t) \end{bmatrix} \in R^{(r)}; t \in T \quad (1)$$

Die Koordinaten  $a_i(t)$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$  können die mechanischen, thermischen, kalorischen, elektrischen, magnetischen usw. Zustände des Maschinensatzes im Zeitpunkt  $t \in T$  bestimmenden Betriebsparameter sein. Während der weiteren Untersuchungen wird angenommen, daß die Anzahl  $r$  der Koordinaten von  $\mathbf{a}(t)$  in dem Sinne minimal ist, daß zwischen ihnen kein deterministischer Zusammenhang besteht. Diese Bedingung bedeutet keine Einschränkung, da die Momentanwerte der anderen Betriebskenngrößen, die sich als Funktionen der unabhängig veränderlichen Betriebsparameter ergeben, in Kenntnis der funktionellen Zusammenhänge (innere Kennlinien), die durch den inneren Aufbau des Maschinensatzes bestimmt sind, leicht angegeben werden können. Die durch die inneren Kennlinien des Maschinensatzes bestimmten funktionellen Zusammenhänge werden für die gesamte Lebensdauer  $T$  als festgelegt betrachtet, können aber infolge der im tatsächlichen Betrieb auftretenden Verzerrungseinflüsse (z. B. Abnutzung, Deformationen, Ablagerungen usw.) nur angenähert verwirklicht werden. Die reelle Zahlenmenge, welche die möglichen Werte der Koordinaten  $a_i(t)$  des Betriebszustandsvektors  $\mathbf{a}(t)$  festlegt, mit  $H_i$  bezeichnet ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), führen wir die Menge  $H_a \subset R^{(r)}$  ein, die als direktes Produkt<sup>1</sup> der Mengen  $H_i$  erhalten wird:

<sup>1</sup> Das direkte Produkt der reellen Zahlenmengen  $H_i \subseteq R^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  ist diejenige  $H \subseteq R^{(r)}$   $r$ -dimensionale Menge, für deren beliebiges Element  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_r]^*$  die Relation  $x_i \in H_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$  erfüllt wird. Bezeichnung:  $H = \prod_{i=1}^r H_i$ .

$$H_a = \bigtimes_{i=1}^r H_i. \quad (2)$$

Die so definierte Menge  $H_a$  enthält in jedem Fall die Menge  $H'_a$  der sich tatsächlich ausbildenden Betriebszustände.

Bestimmte Koordinaten des vorhin eingeführten Betriebszustandsvektors  $\mathbf{a}(t)$  kennzeichnen den Belastungszustand des Maschinensatzes. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, darf angenommen werden, daß diese Zustandskennwerte in der Form der ersten  $n$  Koordinaten von  $\mathbf{a}(t)$  aufgeschrieben worden sind. Der Belastungszustand des Maschinensatzes kann somit in einem  $n$ -dimensionalen Unterraum  $R^{(n)}$  erfolgen. Bezeichnen wir diese  $n$ -dimensionale Vektorkomponente durch  $\mathbf{g}(t) = [a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)]^*$ , den aus den übrigen  $r - n$  Koordinaten gebildeten Restvektor durch  $\mathbf{h}(t) = [a_{n+1}(t), \dots, a_r(t)]^*$ , dann kann  $\mathbf{a}(t)$  in der Form

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{h}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}(t) \in R^{(n)}; \quad \mathbf{h}(t) \in R^{(r-n)}; \quad t \in T \quad (3)$$

aufgeschrieben werden. Die Beziehung zwischen der Menge  $H'_g$ , die die möglichen Werte des Belastungszustandsvektors  $\mathbf{g}(t)$  angibt, und zwischen den in jedem Fall breiteren Produktenmengen  $H_g \subset H_a$  wird durch die Relation

$$H'_g \subseteq H_g = \bigtimes_{i=1}^r H_i \quad (4)$$

festgelegt. Der Belastungszustand des Maschinensatzes wird auf die vorhin erwähnte Weise dann als bestimmt betrachtet, wenn in einem beliebigen Querschnitt der Kraftübertragungskette die vorhandenen Drehmomente und Drehzahlen bekannt sind. Die Koordinaten des Vektors  $\mathbf{g}(t)$  werden die den Belastungszustand des Maschinensatzes im erwähnten Sinne kennzeichnenden Drehmoment- und Drehzahlwerte sein;  $\mathbf{g}(t)$  kann also folgendermaßen zerlegt werden:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{bmatrix}; \quad t \in T, \quad (5)$$

wobei  $\mathbf{M}(t) = [M_{\alpha_1}(t), \dots, M_{\alpha_k}(t)]^* \in R^{(\alpha_k)}$  die Vektorkomponente der Drehmomente,  $\mathbf{n}(t) = [n_{\beta_1}(t), n_{\beta_2}(t), \dots, n_{\beta_l}(t)]^* \in R^{(\beta_l)}$  die der Drehzahlen ist und die Gleichheit  $\alpha_k + \beta_l = n$  erfüllt wird. Die in den Koordinaten von  $\mathbf{g}(t)$  vorkommenden Drehmomente und Drehzahlenwerte kennzeichnen die Querschnitte endlicher Anzahl der Kraftübertragungskette des Maschinensatzes, mit Hilfe der durch den inneren Aufbau des Systems bekannten funktionellen Zusammenhänge können aber die gesuchten Größen für einen beliebigen Querschnitt angegeben werden.

Die empirische Untersuchung der Realisation des Vektors  $\mathbf{g}(t)$  für verschiedene Werte von  $t$  ist sehr umständlich, da bei im tatsächlichen Betrieb arbeitenden Maschinensätzen die Registrierung der Koordinaten schwer zu lösen ist. In Kenntnis der inneren Kennlinien des Maschinensatzes können sowohl der Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \in R^{(m)}; t \in T \quad (6)$$

als auch die

$$\mathbf{f} : R^{(m)} \rightarrow R^{(n)} \quad (7)$$

»Vektor—Vektor«-Funktion eingeführt werden, mit deren Hilfe  $\mathbf{g}(t)$  folgendermaßen aufgeschrieben werden kann:

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]. \quad (8)$$

Die Koordinaten des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t)$  sind also Kenngrößen, die mit den Koordinaten von  $\mathbf{g}(t)$  in einem bekannten funktionellen Zusammenhang stehen und durch Messungen leicht registriert werden können. Die Dimension  $m$  des Vektors  $\mathbf{x}(t)$  kann nur in konkreter Kenntnis des Aufbaues des untersuchten Systems und der Ausführung der anzuwendenden empirischen Untersuchungen bestimmt werden.

Im weiteren wird der Vektor  $\mathbf{g}(t)$  zur Kennzeichnung der Belastungszustände benutzt. Dem Belastungszustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  können in der vorhin behandelten Weise die Menge  $D'_x$  der möglichen Belastungszustände und die diese enthaltende Produktemenge  $D_x \subset R^{(m)}$

$$D'_x \subseteq D_x = \bigtimes_{i=1}^m D_i \quad (9)$$

zugeordnet werden, wobei  $D_i$  die reelle Zahlenmenge  $i = 1, 2, \dots, m$  den möglichen Wert der Koordinate  $x_i(t)$  bezeichnet. Zwischen den Mengen  $H'_g$  und  $D'_x$  besteht der Zusammenhang:

$$H'_g = \mathbf{f}(D'_x). \quad (10)$$

Um das Gesagte zu veranschaulichen, betrachten wir z. B. einen Maschinensatz aus einem auf diskrete Drehzahlpositionen geregelten Dieselmotor und einem zweistufigen hydrodynamischen Getriebe, wobei angenommen wird, daß die Umschaltung der Geschwindigkeitsstufen des Getriebes automatisch (auf Befehl von Drehzahlgebern) erfolgt. In dieser Annahme wurde die äußere

Kennlinie des Maschinensatzes: Motor—Getriebe in Abb. 1 aufgezeichnet. Auf die horizontale Achse sind die ausgangsseitige Drehzahl  $\tilde{n}$  des Getriebes und auf die senkrechte Achse das an der Ausgangswelle auftretende Drehmoment  $\tilde{M}$  aufgetragen. In dem untersuchten einfachen Fall bestimmen die auf die Ausgangswelle bezogenen Werte von Drehmoment und Drehzahl eindeutig den Belastungszustand des Maschinensatzes; auf Grund des Zusammenhanges in Gl. (5) kann also die Beziehung  $g(t) = [\tilde{M}(t), \tilde{n}(t)]^*$  aufgeschrieben werden. Da das Registrieren des an der Ausgangswelle auftretenden Drehmoments schwer zu lösen ist, gehen wir auf den Belastungszustandsvektor  $x(t)$  über. Von dem Kennliniensystem in Abb. 1 kann abgelesen werden, daß die Dreh-

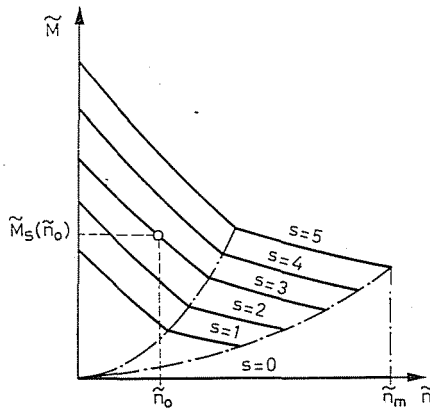


Abb. 1. Die Kennlinien des Maschinensatzes: Dieselmotor—hydrodynamisches Getriebe

zahl  $\tilde{n}_0$  der Ausgangswelle und der Parameter  $s$  der eingestellten Drehzahlposition den Wert des Ausgangsdrehmomentes  $\tilde{M}_s(\tilde{n}_0)$  eindeutig bestimmen. Somit bestimmt der Zustandsvektor  $x(t) = [s(t), \tilde{n}(t)]^*$  unter Berücksichtigung der durch das Kennliniensystem in Abb. 1 definierten Abbildung  $f$  den Vektor  $g(t)$ . Das Registrieren der eingeführten Parameterveränderlichen  $s$  kann sehr einfach, z. B. durch die Angabe der Regulatorzahnstangenposition gelöst werden. Die Menge  $H'_g \subseteq H_g$  der Werte, die der Vektor  $g(t)$  annehmen kann, wird durch die Punkte des aufgezeichneten Kennliniensystems gebildet, während die Menge  $D'_x \subseteq D_x$  der möglichen Werte des Vektors  $x(t)$  durch die Punkte der in Abb. 2 skizzierten geraden Strecken bestimmt wird. Ist der Drehzahlregler des Motors für die Einstellung einer beliebigen Drehzahl zwischen der Höchst- und der Mindestdrehzahl geeignet, besteht gegenüber dem Gesagten nur der Unterschied, daß sowohl in dem in Abb. 1 als auch in dem in Abb. 2 gezeigten Fall sämtliche Punkte des durch die Kennlinienabschnitte der oberen und unteren Drehzahlgrenzen bestimmten Ebenenteils als Betriebspunkte auftreten können.

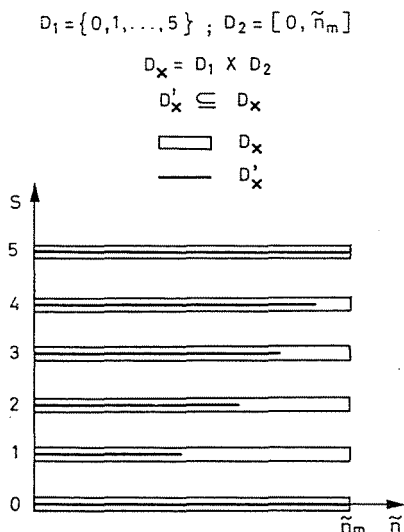


Abb. 2. Die Darstellung der Menge  $D'_x \subseteq D_x$

### 3. Der zeitliche Verlauf der Belastungszustände von Maschinensätzen

In den bisherigen Ausführungen wurde bei der Bezeichnung der zu untersuchenden Kenngrößen ein festgelegter Zeitpunkt  $t \in T$  angenommen. Könnte für alle Zeitpunkte  $t$  der Lebensdauer  $T$  des Maschinensatzes die vektorwertige Zeitfunktion eindeutig hergestellt werden, ließe sich die gesuchte Belastungszustandsverteilung verhältnismäßig einfach bestimmen. Bei der überwiegenden Mehrheit der Maschinensätze — wie schon darauf in der Einleitung hingewiesen wurde — ist dies nicht der Fall. Im effektiven Betrieb werden in einem Zeitpunkt  $t \in T$  die tatsächlichen Werte  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$  der Koordinaten des Vektors  $\mathbf{x}(t)$  durch die Gesamtheit von Zufallsfaktoren bestimmt und deshalb müssen sie als Zufallsveränderliche, genauer gesagt, als die dem betrachteten Zeitpunkt  $t \in T$  zugeordneten Ausgangswerte (Realisationswerte) der Zufallsveränderlichen  $\vec{\xi}(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)]^*$  betrachtet werden. Nach dem Gesagten erhält man also durch die Zuordnung einer Zufallsveränderlichen zu jedem Zeitpunkt  $t$  der Lebensdauer  $T$  des Maschinensatzes einen vektorwertigen *stochastischen Prozeß*,<sup>2</sup> der die Veränderung der Belastungszustände beschreibt. Unmittelbare Information über die vergangenen Belastungszustände erhält man nur aus der durch Messung bestimmten vektorwertigen Zeitfunktion  $\mathbf{x}(t)$ . Es seien der gegenwärtige Zeitpunkt mit  $t_m$ , die Zeit von der Inbetriebsetzung

<sup>2</sup> Die einparametrische Gesamtheit von Zufallsveränderlichen bezeichnet man als einen stochastischen Prozeß. In unserem Fall entspricht die Parametermenge dem die Lebensdauer des Maschinensatzes angehenden Zeitbereich [1], [2], [3].

des Maschinensatzes bis zum Zeitpunkt  $t_m$  mit  $T_m$  bezeichnet. Die die Belastungszustände in den Zeitpunkten  $t \in T_m$  bestimmende Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t)$  ist die Realisations- oder Stichprobenfunktion des stochastischen Prozesses  $\vec{\xi}(t)$ . Für die Bestimmung der Belastungsverteilung müssen diese Stichprobenfunktionen zur statistischen Beobachtung herangezogen werden. Anschließend an das im vorigen Punkt behandelte einfache Beispiel wurde in Abb. 3 eine

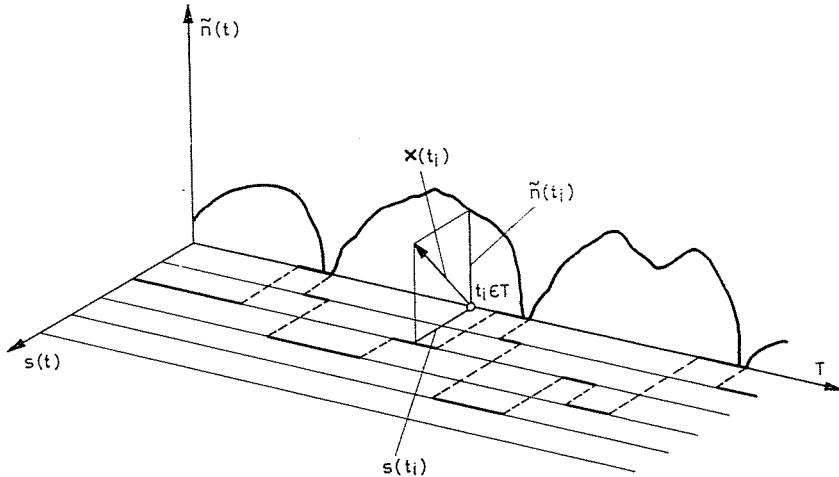


Abb. 3. Eine mögliche Realisationsfunktion  $\mathbf{x}(t)$  des Belastungsprozesses des Maschinensatzes: Dieselmotor — hydrodynamischen Getriebe

mögliche Realisationsfunktion  $\mathbf{x}(t)$  der Belastungszustände des untersuchten Maschinensatzes Dieselmotor — hydrodynamisches Getriebe aufgezeichnet. Der Motor hat diskrete Drehzahlpositionen endlicher Anzahl, wodurch auch die Koordinatenfunktion  $s(t)$  nur diskrete Werte annehmen kann,  $\tilde{n}(t)$  ist aber in jedem Zeitpunkt  $t \in T_m$  eine stetige Funktion.

Da durch den stochastischen Prozeß  $\vec{\xi}(t)$  jedem Zeitpunkt  $t \in T$  die Zufallsveränderliche  $[\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)]^*$  zugeordnet ist, wird jedem Zeitpunkt die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F_i(y_1, y_2, \dots, y_m)$  der Koordinaten-Zufallsveränderlichen  $\xi_i(t)$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  zugeordnet, die als Randverteilungsfunktion erster Ordnung des Vektorprozesses  $\vec{\xi}(t)$  bezeichnet wird. Die Deutung der in jeder Veränderlichen von links stetigen Verteilungsfunktion  $F_i(\mathbf{y}) = F_i(y_1, y_2, \dots, y_m)$  erfolgt folgendermaßen:

$$F_i(\mathbf{y}) = \mathfrak{P}\{\xi_1(t) < y_1, \xi_2(t) < y_2, \dots, \xi_m(t) < y_m\}; \mathbf{y} \in D_x. \quad (11)$$

Sie gibt also die Wahrscheinlichkeit dessen an, daß im Zeitpunkt  $t \in T$  die Relationen  $\xi_1 < y_1, \xi_2 < y_2, \dots, \xi_m < y_m$  gleichzeitig erfüllt werden. Die unter-

suchte Funktion  $\mathbf{x}(t)$  bestimmt im Zeitpunkt  $t \in T_m$  einen einzigen Vektor  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^*$ : bei einem vollkommen allgemeinen Prozeß  $\vec{\xi}(t)$  kann also die Kenntnis einer einzigen Stichprobenfunktion keine unmittelbare Information über die zu dem Zeitpunkt  $t \in T$  gehörende Randverteilung liefern. Um die aus dieser Tatsache stammenden Probleme zu überbrücken, wird in der Theorie der stochastischen Prozesse entweder die stationär-ergodische Hypothese — unter Anwendung der in vergangenen Zeitpunkten bestandenen Werte der Zufallsfunktion — eingeführt oder die Realisationsmenge untersucht. Da aber nur eine einzige Realisation des Belastungsprozesses des Maschinensatzes zur Verfügung steht, ist eine Untersuchung der Realisationsmenge in strengem Sinne nicht möglich. Die Bestimmung der Verteilungsfunktion der Belastungszustände muß also auf die Untersuchung der im Zeitpunkt  $t \in T_m$  bestehenden Werte der Realisationsfunktion  $\mathbf{x}(t)$  zurückgeführt werden. Diese Feststellung zieht die Spezialisierung der Wahrscheinlichkeitsstruktur des bisher im allgemeinen behandelten Belastungszustandes nach sich. Unsere weiteren Untersuchungen beschränken sich auf die *stationären* und *ergodischen* Belastungsprozesse, da eine statistische Analyse nur unter solchen Bedingungen durchführbar ist. Der Prozeß  $\vec{\xi}(t)$  wird dann als stationär (stationär erster Ordnung) bezeichnet, wenn die in Gl. (11) definierten Verteilungsfunktionen  $F_t(\mathbf{y})$  der Wahl des Zeitpunktes  $t \in T$  gegenüber invariant sind. Nach der Stationaritätsbedingung kann die Verteilungsfunktion  $F_t(\mathbf{y}) = F(\mathbf{y})$  durch die (horizontale) statistische Analyse der Realisationsfunktion  $\mathbf{x}(t)$  längs der Zeitachse mit guter Näherung bestimmt werden. Betrachtet man nämlich die bei einer genügend langen Zeitpunktfolge  $\{t_i\}_{i=1}^M \subset T_m$  registrierte Vektorfolge  $\{\mathbf{x}(t_i)\}_{i=1}^M \subset D'_x$ , dann liefern deren Elemente — da sie die Realisationen der Zufallsveränderlichen  $\{\vec{\xi}(t_i)\}_{i=1}^M$  mit der gleichen Verteilungsfunktion  $F(\mathbf{y})$  darstellen — eine statistische Stichprobengesamtheit. Die Annahme der *Ergodizität* des Prozesses  $\vec{\xi}(t)$  bedeutet im Grunde genommen, daß die aus der Folge  $\{\mathbf{x}(t_i)\}_{i=1}^M$  bewertbaren relativen Häufigkeiten mit der Wahrscheinlichkeit 1 gegen den gesuchten Verteilungsfunktionswert konvergieren, wobei  $M \rightarrow \infty$ . Bei stationären und ergodischen Prozessen enthält also eine einzige Realisationsfunktion sämtliche Informationen in bezug auf die Belastungszustandsverteilung.

#### 4. Die statistische Untersuchung der Belastungszustandsverteilung

Bei der Konstruktion von Maschinensätzen genügt es im allgemeinen, für die umsichtige Berücksichtigung der zu erwartenden Betriebsverhältnisse nicht, die Betriebsbelastungsverteilung eines einzigen, dem zu konstruierenden im Aufbau sehr ähnlichen, in einem früheren Zeitpunkt in Betrieb gesetzten Systems zu benutzen.



Es ist zweckmäßig, bei der Konstruktion neuer Anlagen die empirisch bestimmten Belastungszustandsverteilungen von Maschinensätzen ähnlichen Aufbaues, die unter ähnlichen Bedingungen arbeiten, zu benutzen. Bei den weiteren Untersuchungen wird angenommen, daß in der obengenannten Weise die Menge der Maschinensätze ähnlichen Aufbaues, die unter statistisch gleichen Betriebsbedingungen arbeiten, zur Verfügung steht. Die so entstandene Gesamtheit wird als eine *homogene Klasse* bezeichnet. Die auf die eingeführte homogene Klasse bezogene mittlere Belastungszustandsverteilungsfunktion, die bei der Konstruktion ähnlicher neuer Einrichtungen verwendet werden kann, wird aus den an einzelnen Elementen der untersuchten Menge während eines genügend langen Zeitintervalls registrierten Realisationsfunktionen bestimmt.

Nehmen wir an, daß aus den an zufallsbestimmt gewählten Maschinensätzen der Anzahl  $N$  registrierten Realisationsfunktionen,  $x_j(t)$ ;  $j = 1, 2, \dots, N$  nach den Prinzipien im vorigen Punkt die entsprechenden empirischen Belastungszustandsverteilungsfunktionen  $F_j^{(M)}(\mathbf{y})$  schon bestimmt wurden. So erhält man die Funktionsmenge  $\{F_j^{(M)}(\mathbf{y})\}_{j=1}^N$ . Da die Funktionen  $F_j^{(M)}(\mathbf{y})$  nicht kongruent sind, kann in jedem Punkt  $\mathbf{y} \in D_x$  die Zufallsveränderliche  $\Phi(\mathbf{y})$  eingeführt werden und die Funktionswerte  $F_j^{(M)}(\mathbf{y})$  können als eine auf  $\Phi(\mathbf{y})$  bezogene unabhängige statistische Stichprobe mit  $N$  Elementen betrachtet werden. Der zu dem Zustand  $\mathbf{y} \in D_x$  gehörende Wert  $\bar{F}(\mathbf{y})$  der mittleren Verteilungsfunktion der homogenen Klasse wird mit dem Erwartungswert von  $\Phi(\mathbf{y})$  definiert:

$$\bar{F}(\mathbf{y}) = \mathfrak{M}[\Phi(\mathbf{y})] \quad (12)$$

In Gl. (12) ist mit  $\mathfrak{M}$  das Funktional der Erwartungswertbildung bezeichnet. Für den empirischen Mittelwert der in der tatsächlichen Stichprobe mit  $N$  Elementen gefundenen Werte von  $F_j^{(M)}(\mathbf{y})$  die Bezeichnung  $\mathfrak{S}^{(N)}[F^{(M)}(\mathbf{y})]$  eingeführt, erhält man nach der Definition des Mittelwertes

$$\mathfrak{S}^{(N)}[F^{(M)}(\mathbf{y})] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j^{(M)}(\mathbf{y}). \quad (13)$$

Die Belastungszustandsverteilungsfunktion  $\bar{F}(\mathbf{y})$  der homogenen Klasse wird im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen mit dem empirischen Mittelwert (13) angenähert. Im Falle unabhängiger Stichprobenelemente konvergiert nämlich bei  $N \rightarrow \infty$  der empirische Mittelwert stochastisch gegen den Erwartungswert [3]. Die zu der festgelegten Approximationseigenschaft erforderliche Stichprobenanzahl kann nach der folgenden Näherungsmethode bestimmt werden. Betrachten wir den Punkt  $\tilde{\mathbf{y}}$  des Bereiches  $D_x$ , wo die Streuung der Zufallsveränderlichen  $\Phi(\mathbf{y})$  den größten Wert hat. Dieser Punkt  $\tilde{\mathbf{y}} \in D_x$  kann durch die Berechnung empirischer Streuungen angenähert werden. Es ist

bekannt, daß der Mittelwert einer auf die Zufallsveränderliche  $\eta$  bezogenen statistischen Stichprobe mit  $N$  Elementen mit guter Näherung für eine Zufallsveränderliche mit Normalverteilung genommen werden kann, deren Erwartungswert mit dem Erwartungswert von  $\eta$  übereinstimmt, während ihre Streuung dem  $\sqrt{N}$ -ten Teil der Streuung des ursprünglichen  $\eta$  entspricht [3]. Das zulässige Maß der absoluten Abweichung  $|\mathfrak{M}[\Phi(\tilde{y})] - \mathfrak{E}^{(N)}[F^{(M)}(\tilde{y})]|$  soll mit  $\varepsilon > 0$  berechnet werden. Dann kann auf Grund des vorhin Gesagten unter Berücksichtigung der Dichtefunktion der Normalverteilung geschrieben werden:

$$p = \mathfrak{P} \left\{ |\mathfrak{M}[\Phi(\tilde{y})] - \mathfrak{E}^{(N)}[F^{(M)}(\tilde{y})]| < \varepsilon \right\} = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{(\mathfrak{M}-w)^2}{2\sigma_N^2}} dw, \quad (14)$$

wobei  $\sigma_N$  die Streuung der Werte von  $\mathfrak{E}^{(N)}[F^{(M)}(\mathbf{y})]$ , und  $w$  die Veränderliche der betrachteten Normal-Dichtefunktion bedeuten. Unter der Annahme eines günstigen reellen Zahlenwertes  $\vartheta$  kann die Beziehung  $\varepsilon = \vartheta \sigma_N$  aufgeschrieben werden, mit deren Hilfe Gl. (14) in die nachstehende standardisierte Form übergeht:

$$p = \mathfrak{P} \left\{ \frac{|\mathfrak{M}[\Phi(\tilde{y})] - \mathfrak{E}^{(N)}[F^{(M)}(\tilde{y})]|}{\sigma_N} < \vartheta \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (15)$$

Wird die Wahrscheinlichkeit  $p$  festgelegt, so kann auf Grund von Gl. (15) der zu der gegebenen Abweichung  $\varepsilon$  gehörende  $\vartheta$ -Wert bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\varepsilon = \vartheta \sigma_N = \vartheta \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (16)$$

— wo  $\sigma$  die Streuung von  $\Phi(\tilde{y})$  bezeichnet — kann die zu dem Fehler  $\varepsilon$  und zu der Zuverlässigkeit  $p$  gehörende Stichprobenelementenanzahl  $N$  mit Hilfe der Formel

$$N = \frac{\sigma^2 \vartheta^2}{\varepsilon^2} \quad (17)$$

bestimmt werden. Die in Gl. (16) eingeführte Streuung  $\sigma$  wird aus der Stichprobe mit Hilfe der korrigierten Erfahrungsstreuung  $s^*$  abgeschätzt:

$$\sigma \approx s^* = \left( \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \{ \mathfrak{E}^{(N)}[F^{(M)}(\tilde{y})] - F_j^{(M)}(\tilde{y}) \}^2 \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, daß die Bestimmung der erforderlichen Stichprobenanzahl im Grunde genommen einen Iterationsvorgang darstellt

und die erste Information über die unbekannte Streuung der Zufallsveränderlichen nur auf Grund einer vorher ausgewählten Stichprobe mit der Elementenanzahl  $N_0$  erhalten werden kann. Dieser Iterationsvorgang wird aber meistens schon im zweiten Rechenschritt beendet.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurden die empirischen Verteilungsfunktionen  $F_j^{(M)}(\mathbf{y})$  als bekannt angenommen. Im weiteren muß also nur deren nähere Bestimmung behandelt werden. Wie darauf schon im vorigen Punkt hingewiesen wurde, führen wir die zu den einzelnen Elementen der homogenen Klasse gehörenden Belastungszustandverteilungsfunktionen  $F_j^{(M)}(\mathbf{y})$  auf die Untersuchung der in der äquidistanten Zeitpunktfolge  $\{t_i\}_{i=1}^M \subset T_m$  registrierten Vektormenge  $\{\mathbf{x}_j(t_i)\}_{i=1}^M \subset D'_x$  zurück ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Bei genügend großen Werten  $(t_M - t_1)$  schwanken die durch die gitterförmige Zerlegung der Menge  $D_x$  bestimmten relativen Häufigkeiten dem Gesetz der großen Zahlen [3] gemäß schon mit großer Wahrscheinlichkeit nur in geringem Maße. Betrachten wir zunächst die Wertevorräte  $D_1, D_2, \dots, D_m$  der Koordinatenfunktionen  $x_{j1}(t), x_{j2}(t), \dots, x_{jm}(t)$  der Realisationsfunktion  $\mathbf{x}_j(t)$  und zerlegen wir diese mit den äquidistanten Teilungspunkten:

$$\{y_{ii}\}_{i=1}^{k_i} \subset D_i; \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{19}$$

Mit dem System der so angenommenen Teilungspunkte erhält man im Bereich  $D_x$  »Kontrollpunkte« der Anzahl  $\prod_{i=1}^m (k_i + 1)$ , wenn nach den Richtungen  $y_1, y_2, \dots, y_m$  voneinander unabhängig mit sämtlichen Teilungspunkten als Koordinaten  $m$ -dimensionale Vektoren gebildet werden. Die so erhaltenen  $m$ -dimensionalen Gitterpunkte  $[y_{1l_1}, y_{2l_2}, \dots, y_{ml_m}]^*$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)$  und definieren das Ereignis  $A_{\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)}$  als eine Teilmenge von  $D_x$ , für deren Elemente  $\mathbf{x}$  die Ordnungsrelationen in geschweiften Klammern in Gl. (20) gültig sind:

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)} = \{ & \mathbf{x}_1 < y_{1l_1}, \mathbf{x}_2 < y_{2l_2}, \dots, \mathbf{x}_m < y_{ml_m} \} \\ & l_1 \in \{0, 1, \dots, k_1\} \\ & \vdots \\ & l_m \in \{0, 1, \dots, k_m\} \end{aligned} \tag{20}$$

Werden von den Elementen der Vektorenfolge  $\{\mathbf{x}_j(t_i)\}_{i=1}^M$  diejenigen ausgewählt, für die die Relation

$$\mathbf{x}_j(t_i) \in A_{\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)} \tag{21}$$

erfüllt ist, kann die relative Häufigkeit des Ereignisses  $A_{\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)}$  bestimmt werden. Mit  $\nu_{\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)}$  diejenigen Elemente der Vektorenfolge der Länge  $M$

bezeichnet, für die Gl. (21) besteht, kann die gesuchte relative Häufigkeit folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$f_j^{(R)}(A_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)}) = \frac{v_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)}}{M} \quad (22)$$

Gl. (22) gibt schon den im Gitterpunkt  $\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)$  angenommenen Wert der empirischen Verteilungsfunktion  $F_j^{(M)}(\mathbf{y})$  an. Wird die  $m$ -dimensionale Einheitssprungfunktion

$$U(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y_i > 0; i = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (23)$$

eingeführt, kann  $v_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)}$  in der Form

$$v_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)} = \sum_{\substack{(i) \\ x_{jk}(t_i) < y_{k_i} \\ k = 1, 2, \dots, m}} U[y(l_1, l_2, \dots, l_m) - \mathbf{x}_j(t_i)] \quad (24)$$

ausgedrückt werden, und somit ergibt sich die gesuchte empirische Belastungszustandsverteilungsfunktion im Gitterpunkt  $\mathbf{y}(l_1, l_2, \dots, l_m)$  auf Grund von (22) und (24) in der Form

$$F_j^{(M)}(\mathbf{y}(l_1, \dots, l_m)) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{(i) \\ x_{jk}(t_i) < y_{k_i} \\ k = 1, 2, \dots, m}} U[y(l_1, l_2, \dots, l_m) - \mathbf{x}_j(t_i)]. \quad (25)$$

Mit Hilfe der mit dem Ausdruck (25) in den Gitterpunkten gegebenen Funktionswerte erhält man in einem beliebigen Punkt  $\mathbf{y} \in D_x$  durch Interpolation den Näherungswert der empirischen Verteilungsfunktion. Für die Folgenlänge  $M$  in Gl. (25) kann leicht eine untere Abschätzung gegeben werden, wenn die Stichproben-Zeitintervalle  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  genügend groß sind, um die Zufallsveränderlichen  $\xi(t)$  und  $\xi(t + \Delta t)$  als voneinander unabhängig betrachten zu können. Bei einer auf Grund von

$$M \geq \frac{9}{8 \varepsilon^2} \log \frac{2}{\delta} \quad (26)$$

gewählten Folgenlänge wird dann die Ungleichung

$$\mathfrak{P} \{ |f_j^{(R)}(A_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)}) - p_j(A_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)})| \geq \varepsilon \} \leq \delta \quad (27)$$

erfüllt [3], wo  $p_j(A_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)})$  die Wahrscheinlichkeit des untersuchten Ereignisses  $A_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)}$ , also den Wert der theoretischen Verteilungsfunktion

an der Stelle  $y(l_1, l_2, \dots, l_m)$  bedeutet;  $\delta > 0$  ist ein beliebig festlegbares Wahrscheinlichkeitsniveau, und  $\varepsilon$  wird unter Berücksichtigung der Bedingung  $0 < \varepsilon \leq p_j(1 - p_j)$  gewählt. Die vorkommenden  $p_j$ -Werte sind im ersten Schritt der Untersuchung unbekannt, so daß diese vorher aus einer Stichprobe mit einer Elementenanzahl  $M_0$  abgeschätzt werden müssen. Also wird hier auch der gesuchte Schwellenwert  $M$  durch sukzessive Approximation erhalten.

Unter Berücksichtigung der gegebenen Fehlerwahrscheinlichkeit  $\delta$  und des Genauigkeitsniveaus  $\varepsilon$  können für die gewählten Maschinensätze der Anzahl  $N$  die Verteilungsfunktionen  $F_j^{(M)}(y)$  auf Grund von Gl. (25) durch die Analyse der Stichprobenfolgen  $\{x_j(t_i)\}_{i=1}^M \subset D'_x$  hergestellt werden. Für die auf die homogene Klasse bezogenen mittleren Belastungszustandsverteilungsfunktionen erhält man auf Grund der Definition in Gl. (12) in den durch das Aufteilungssystem der Gl. (19) bestimmten Gitterpunkten, mit den empirischen Mittelwerten angenähert:

$$\bar{F}(y(l_1, l_2, \dots, l_m)) = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^N \sum_{(i)} U[y(l_1, l_2, \dots, l_m) - x_j(t_i)]. \quad (28)$$

$x_{jk}(t_i) < y_{jk}$   
 $k = 1, 2, \dots, m$

Wenn Gl. (28) bekannt ist, kann bei einer Lebensdauer  $T_0$  die im Zustand  $A_{y(l_1, l_2, \dots, l_m)}$  verbrachte Zeit aus der Formel

$$\tau(y(l_1, l_2, \dots, l_m)) = T_0 \bar{F}(y(l_1, l_2, \dots, l_m)) \quad (29)$$

berechnet werden.

Für die Veranschaulichung der Bedeutung der Beziehungen (28) und (29) betrachten wir den schon in Pkt. 2 untersuchten Maschinensatz: Dieselmotor—hydrodynamisches Getriebe. Die den Zustandsraum des das Wechseln der Belastungszustände beschreibenden stochastischen Prozesses  $\vec{\xi}(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t)]^*$  kennzeichnenden Mengen  $D_x$  und  $D'_x$  wurden in Abb. 2 schon dargestellt. Als erster Schritt der statistischen Analyse soll die Zerlegung sowohl der Produktmenge  $D_x$  als auch die der Koeffizientenmengen  $D_1$  und  $D_2$  nach Gl. (19) erfolgen. Bei dem untersuchten Maschinensatz besteht die Menge  $D_1$  der Drehzahlpositionen von vornherein aus diskreten Werten, deshalb kann die Zerlegung  $\{y_{1l_1}\}_{l_1=0}^{k_1} D_1$  gleichgesetzt werden. Der Drehzahlbereich der Ausgangswelle des Maschinensatzes — das Intervall  $D_2 = [0, \bar{n}_m]$  — wird mit den Teilmaßpunkten  $\{y_{2l_2}\}_{l_2=0}^{k_2}$  auf  $k_2$  äquidistante Teilintervalle zerlegt. Nach der Zerlegung von  $D_1$  und  $D_2$  können in Kenntnis der Realisationsfunktion  $x(t) = [s(t), \bar{n}(t)]^*$  des Prozesses  $\vec{\xi}(t)$  die Ereignisse gemäß Gl. (20)

$$A_{y(l_1, l_2)} = \{s < y_{1l_1}, \bar{n} < y_{2l_2}\} \quad (30)$$

für alle möglichen Werte von  $l_1$  und  $l_2$  definiert werden. Angenommen, daß der untersuchte Maschinensatz das Element mit Index  $j$  der homogenen Klasse ist und die Realisationsfunktion  $x_j(t)$  des Belastungsprozesses für die äquidistante Zeitpunktfolge  $\{t_i\}_{i=1}^M$  registriert wurde, steht die zweidimensionale Vektorenfolge

$$\{x_j(t_i)\}_{i=1}^M = \{[s_j(t_i), \tilde{n}_j(t_i)]^*\}_{i=1}^M \quad (31)$$

zur Verfügung. Aus dieser Stichprobenfolge erhält man auf Grund von Gl. (25) in den Gitterpunkten  $y(l_1, l_2)$  die Werte der empirischen Belastungszustandsverteilung mit den vorigen Bezeichnungen:

$$F_j^{(M)}(y(l_1, l_2)) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{(i) \\ s_j(t_i) < y_{11} \\ \tilde{n}_j(t_i) < y_{21}}} U[y(l_1, l_2) - [s_j(t_i), \tilde{n}_j(t_i)]^*]. \quad (32)$$

Die auf die homogene Klasse bezogene mittlere Belastungszustandsverteilungsfunktion erhält man durch punktweise Mittelwertbildung nach Gl. (28) aus den Verteilungsfunktionen  $\{F_j^{(M)}(y(l_1, l_2))\}_{j=1}^M$  der zur Beobachtung ausgewählten Maschinensätze der Anzahl  $N$ :

$$\bar{F}(y(l_1, l_2)) = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{(i) \\ s_j(t_i) < y_{11} \\ \tilde{n}_j(t_i) < y_{21}}} U[y(l_1, l_2) - [s_j(t_i), \tilde{n}_j(t_i)]^*]. \quad (33)$$

Hier wurde angenommen, daß die Werte von  $N$  bzw.  $M$  den Gl.-en (17) bzw. (26) entsprechend gewählt wurden. Ein möglicher Verlauf der so bestimmten mittleren Belastungszustandsverteilungsfunktion  $\bar{F}(y)$  wird in Abb. 4 gezeigt, wobei bemerkt werden soll, daß die zu den einzelnen Elementen der homogenen Klasse gehörenden Verteilungsfunktionen  $\bar{F}_j^{(M)}(y)$  auch einen ähnlichen Verlauf haben und ihre zahlenmäßigen Werte im allgemeinen den Werten der Funktion  $\bar{F}(y)$  nahe liegen. In Kenntnis der Funktion  $\bar{F}(y)$  kann die angenäherte Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses  $B$  angegeben werden, das aus den Ereignissen in (30) hergestellt werden kann. Als Beispiel soll das Ereignis in Abb. 5 betrachtet werden

$$B = \{s = y_{1\alpha}, y_{2\beta_1} \leq n < y_{2\beta_2}\}, \quad (34)$$

das dann erfolgt, wenn die Drehzahlposition des Dieselmotors den Wert  $y_{1\alpha}$  annimmt, wobei die Drehzahl der Ausgangswelle in das Intervall  $[y_{2\beta_1}, y_{2\beta_2})$  fällt. Die angenäherte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses kann bei bekanntem  $\bar{F}(y)$  folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\mathfrak{P}\{B\} = \bar{F}(y(\alpha + 1, \beta_2)) - \bar{F}(y(\alpha + 1, \beta_1)) - \bar{F}(y(\alpha, \beta_2)) + \bar{F}(y(\alpha, \beta_1)). \quad (35)$$

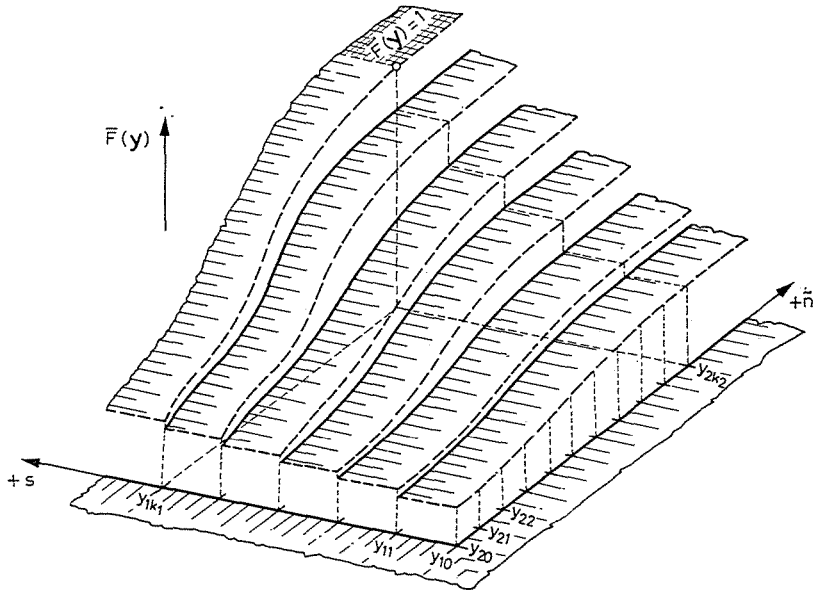


Abb. 4. Die axonometrische Darstellung der Belastungszustandsverteilungsfunktion des Maschinensatzes: Dieselmotor – hydrodynamisches Getriebe

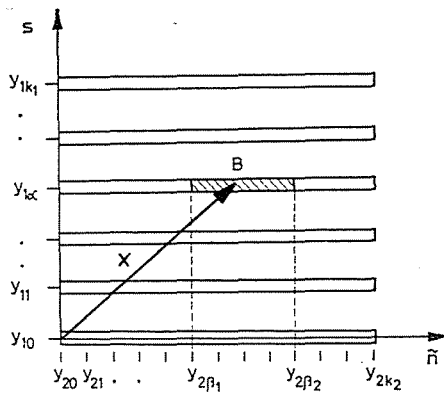


Abb. 5. Die Darstellung des Ereignisses  $B \subset D_X$

Wird angenommen, daß der Maschinensatz während einer Zeit  $T_0$  in Betrieb ist, kann die im Zustand  $B$  verbrachte Zeit nach Gl. (29) durch die Gleichung

$$\tau\{B\} = T_0 \mathcal{S}\{B\} \tag{36}$$

angegeben werden. Ist das Ereignis  $B$  nach dem Ereignissystem in Gl. (30) nicht zerlegbar, kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer sich auf die Gitterpunkte  $y(l_1, l_2)$  stützenden Interpolation abgeschätzt werden.

Nach dem angeführten Beispiel nun auf die allgemeine Behandlung zurückkommend, seien die Erweiterungsmöglichkeiten der statistischen Untersuchungen kurz erwähnt. Neben der Analyse der durch die G.-en (28) und (29) bestimmten Wahrscheinlichkeits- und Betriebszeit-Verteilungsfunktionen kann die statistische Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsstruktur des Belastungsprozesses  $\vec{\xi}(t)$  nach mehreren Richtungen erweitert werden. Diese Untersuchungen können sich einerseits auf den *stochastischen Zusammenhang* der Koordinatenprozesse  $\xi_i(t)$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  des Prozesses  $\vec{\xi}(t)$  beziehen, andererseits können sie auf Grund der durch den inneren Aufbau des Maschinensatzes bestimmten dynamischen Zusammenhänge auf die Herstellung des *stochastischen Modelles* des Belastungsprozesses gerichtet sein. Die Erschließung der stochastischen Beziehungen zwischen den Koordinaten des stationären Prozesses  $\vec{\xi}(t)$  kann durch die Autokorrelationsanalyse der Koordinatenprozesse bzw. durch die Kreuzkorrelationsanalyse der Koordinatenprozeßpaare erfolgen. Durch die Fourier-Transformation der Korrelationsfunktionen können die spektralen Verteilungsfunktionen des Prozesses hergestellt werden. Die Korrelations- und spektralen Kenngrößen enthalten eine bedeutende Menge von Informationen in bezug auf die Wahrscheinlichkeitsstruktur der Prozesse, in deren Kenntnis die Möglichkeit der statistischen Bewertung der vorhin erwähnten stochastischen Modelle besteht. Um das Belastungsprozeß-Modell herzustellen, ist eine mehrseitige statistische Untersuchung der Komponenten von  $\vec{\xi}(t)$  erforderlich, welche die für die Zustandsänderungen des Systems bestimmenden äußeren Steuereinflüsse repräsentieren. Der Maschinensatz antwortet als dynamisches System auf den Prozeß der Steuereinflüsse, in der durch die innere Gesetzmäßigkeiten des Aufbaues bestimmten Weise durch die Veränderung der anderen Betriebskenngrößen. Die Bestimmung der Belastungszustandsverteilung kann also auch in Kenntnis der statistischen Kennwerte der Steuereinflüsse und der Übertragungseigenschaften des Systems behandelt werden.

### 5. Die Anwendungsgebiete der Belastungszustandsverteilung

In Kenntnis der Belastungszustandsverteilung kann der größte Teil der Fragen in Verbindung mit der Konstruktion und dem Betrieb von Maschinensätzen — die ohne ausführliche Analyse nur intuitiv abgeschätzt werden könnten — auf eine exakte Grundlage gelegt werden.

Über die Betriebszeit in einem beliebigen Belastungszustandsbereich, über den durchschnittlichen Wirkungsgrad des Maschinensatzes sowie über die Leistungsausnutzung und den Energieverbrauch erhält man Informationen aus der Belastungszustandsverteilungsfunktion [5].

Auch die Untersuchungen für die Optimierung der Zusammenarbeit der Einheiten des Maschinensatzes können nur in Kenntnis der Belastungszustands-



verteilung durchgeführt werden. Soll z. B. ein aus einer Kraftmaschine und einem Getriebe bestehender Maschinensatz untersucht werden, können die optimale Stufenzahl des Getriebes, bei hydrodynamischer Kraftübertragung die günstige Lage des Scheitelpunktes der Wirkungsgradkurve, der minimierte Energieverbrauch des Systems sowie die Wahl der den Belastungen am besten entsprechenden Schmierölsorte erfolgen.

Ein anderer großer Anwendungsbereich ist die Festigkeitsberechnung auf Ermüdung bzw. auf Lebensdauer der Maschinenelemente der Einheiten im Maschinensatz [2], [4]. In Kenntnis der Belastungszustandsverteilungsfunktion können die relative Häufigkeit der einzelnen Laststufenintervalle berücksichtigt, und dadurch die gleichwertige Ersatzbelastung für die zeitlich veränderlichen stochastischen Kraftwirkungen bestimmt werden.

### Zusammenfassung

Der Belastungszustand unter tatsächlichen Betriebsverhältnissen arbeitender Maschinensätze ändert sich größtenteils ohne vorher angebbare strenge funktionsmäßige Regelmäßigkeit. Die die Veränderung der Belastungszustands für einen längeren Zeitraum kennzeichnenden stochastischen Zusammenhänge können unter Anwendung der Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik bestimmt werden. Die für die Kennzeichnung des Belastungszustandes eines Maschinensatzes eingeführten Koordinaten des  $n$ -dimensionalen Zustandsvektors sind Zufallsveränderliche, daher erfordert die Bestimmung der Belastungszustandsverteilung die statistische Untersuchung dieses vektorwertigen stochastischen Prozesses. Wenn angenommen werden kann, daß der Belastungsprozeß stationär und ergodischer Art ist, kann die Belastungszustandsverteilungsfunktion durch die statistische Analyse der realisierten Belastungsprozesse mit guter Näherung bestimmt werden. Durch die gitterförmige Zerlegung der Menge der möglichen Belastungszustände können auf Grund der aus den registrierten Realisationsfunktionen erhaltenen statistischen Stichprobe die Wahrscheinlichkeiten der nach dem erwähnten Gittersystem definierten Teilbereiche unter Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen durch die relativen Häufigkeiten abgeschätzt werden.

### Literatur

1. ARATÓ, M.: Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse, Ausgabe des Mathematischen Vereins »J. Bolyai« Budapest, 1968. (In ungarischer Sprache.)
2. BOLOTIN, V.: Statistische Methoden in der Mechanik von Konstruktionen. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968. (In ungarischer Sprache.)
3. RÉNYI, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Tankönyvkiadó Budapest, 1968. (In ungarischer Sprache.)
4. SZERENSZEN, V.: Berechnung auf Ermüdung nach statistischer Methode. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971. (In ungarischer Sprache.)
5. SZÜLE, D.: Ein Zusammenhang zwischen Vorkommenshäufigkeit der Betriebszustände und den Betriebsdaten von motorisierten Fahrzeugen, Közlekedéstudományi Szemle, H. 11 (1967), Budapest. (In ungarischer Sprache.)

István ZOBORY, H-1146 Budapest, Május 1. út 9—15.