НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АНТИСИММЕТРИЧНО ЗАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧКАХ С НЕИЗГИБАЕМЫМ КОНТУРОМ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Е. Н. НИКОЛЬСКИЙ И В. В. КОБИЩАНОВ

ИНСТИТУТ ТРАНСПОРТНОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ, Г. БРЯНСК

(Поступило 10 декабря 1974 г.)

Представил: проф., докт. техн. наук Пал Михельбергер

Работа была составлена доцентом ктн. Кобыщановым на основании начатых ранее исследований, при своей стажировке на Кафедре механики Транспортного факультета БТУ

В теории цилиндрических оболочек с неизгибаемым контуром поперечного сечения [1, 2] учитываются все три составляющие деформации срединной поверхности оболочки, а именно: деформации в продольном (ε_z) и поперечном (ε_s) направлениях и деформация сдвига (γ). По сравнению с теорией В. З. Власова для оболочек с недеформируемым контуром [3] эта теория позволяет получить уточненные результаты для срединных напряжений на участках оболочки, где проявляется местный эффект внешних сил. Причем, как отмечалось в работе [4], приемлемая точность может быть получена для оболочек, обладающих достаточно жёстким на изгиб поперечным контуром и, в частности, для оболочек, имеющих поперечные ребра жёсткости.

1. Уравнения для оболочек с неизгибаемым контуром при антисимметричном загружении

В общих уравнениях теории, полученных в [1, 2], как и в теории В. З. Власова [3], перемещения контура поперечного сечения оболочки, соответствующего абсциссе z, определяются тремя функциями: $\xi(z)$, $\eta(z)$ и $\Theta(z)$. Функции $\xi(z)$ и $\eta(z)$ представляют собой проекции перемещения произвольной точки A, фиксированной относительно неизгибаемого контура поперечного сечения, на направление осей $0x$ и $0y$ (рис. 1). Функция $\Theta(z)$ — угол поворота контура как твердого тела относительно точки A.

Если цилиндрическая оболочка имеет симметричный контур поперечного сечения и точка A расположена на оси симметрии $0x$, то в зависимости от вида внешней нагрузки некоторые компоненты перемещения контура могут обращаться в нуль. В частности, если внешняя нагрузка симметрична относительно плоскости $x0z$, то функции $\eta(z)$, $\Theta(z)$ равны нулю тождественно, а функция $\xi(z)$ определяет прогибы средней образующей оболочки в направлении оси $0x$. Исходя из этого, в работе [4] получены формулы для расчета

срединных напряжений в симметричных оболочках с U—образным контуром поперечного сечения.

В случае, когда плоскость $x0z$ является плоскостью антисимметрии, функция $\xi(z)$ равна нулю тождественно. Если внешняя антисимметричная нагрузка сводится только к нормальным $p(z)$ и касательным $t(z)$ силам, распределенным вдоль краевых образующих оболочки и действующим в плос-

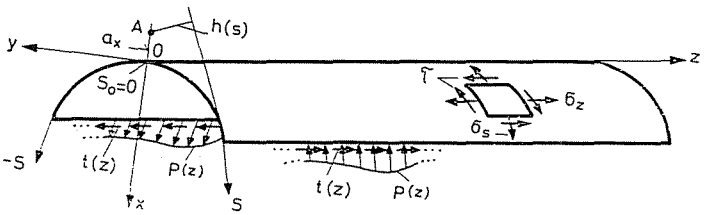

Рис. 1

кости, касательной к срединной поверхности, то уравнения теории оболочек с неизгибаемым контуром поперечного сечения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\nabla^2\varphi + E(\eta''y'' + \Theta''h') = 0\,; \\ &\int\limits_s \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} y''\delta ds = 0\,; \quad \int\limits_s \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} h'\delta ds = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где
$$\nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial s^2} + \frac{\partial^4}{\partial s^4}\,;$$

$y = y(s)$ — ордината контура (функция длины дуги контура s), $y'' = y''(s)$ — вторая производная y по s;

$h = h(s)$ — длина перпендикуляра из точки A на направление касательной к линии контура, $h' = h'(s)$ — первая производная h по s;

$\eta'' = \eta''(z)$, $\Theta'' = \Theta''(z)$ — вторые производные η и Θ по z;

E — модуль упругости;

δ — толщина оболочки;

$\varphi = \varphi(z)$, — функция напряжений в форме Эри, связанная с напряжениями следующими формулами:

$$\sigma_z = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\,, \quad \sigma_s = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\,, \quad \tau = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial s}\,, \tag{2}$$

σ_z, σ_s, τ — напряжения в срединной поверхности оболочки по площадкам, перпендикулярным координатным линиям z и s (рис. 1).

Интегралы в уравнениях (1) берутся по всей длине s контура поперечного сечения.

Условия на продольных краях оболочки (рис. 1) с учетом антисимметрии нагрузки имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s(z, s = -s_r) = -\sigma_s(z, s = s_r) = p(z); \\ \tau(z, s = \pm s_r) = t(z), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где s_r — значение координаты s для крайней образующей.

Решение уравнений (1) при условиях (3) примем в рядах по синусам

$$\left.\begin{aligned} \varphi = -Nzs + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n1} \sin \alpha z; \quad \eta'' = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \alpha z; \\ \Theta'' = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin \alpha z, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$\alpha = \frac{\pi n}{l}: \quad \alpha s_r = u_n, \tag{5}$$

l — длина оболочки;

$$f_{n1} = -\frac{1}{\alpha^2}\{[a_n\lambda_1(s) + c_n\lambda_2(s)] + B_n[\alpha f'_{n3}(s_r)\lambda_2(s) - \alpha^2 f_{n3}(s_r)\lambda_1(s) - \\ - \alpha^2 f_{n3}(s)] + G_n[\alpha f'_{n4}(s_r)\lambda_2(s) - \alpha^2 f_{n4}(s_r)\lambda_1(s) - \alpha^2 f_{n4}(s)]\}; \tag{6}$$

$$N = \frac{1}{l}\int_0^l t(z)\,dz; \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(s) &= 2\varphi_2\alpha s \operatorname{ch} \alpha s - 2(\varphi_2 + u_n\varphi_1) \operatorname{sh} \alpha s; \\ \lambda_2(s) &= 2\varphi_1\alpha s \operatorname{ch} \alpha s - 2u_n\varphi_2 \operatorname{sh} \alpha s; \\ \lambda'_1(s) &= -2\alpha(u_n\varphi_1 \operatorname{ch} \alpha s - \varphi_2\alpha s \operatorname{sh} \alpha s); \\ \lambda'_2(s) &= 2\alpha[(\varphi_1 - u_n\varphi_2) \operatorname{ch} \alpha s + \varphi_1\alpha s \operatorname{sh}\alpha s]; \\ \lambda''_1(s) &= 2\alpha^2[\varphi_2\alpha s \operatorname{ch}\alpha s + (\varphi_2 - u_n\varphi_1) \operatorname{sh}\alpha s]; \\ \lambda''_2(s) &= 2\alpha^2[\varphi_1\alpha s \operatorname{ch} \alpha s + (2\varphi_1 - u_n\varphi_2) \operatorname{sh} \alpha s], \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\left(\operatorname{ch} u_n - \dfrac{u_n}{\operatorname{sh} n_n}\right)}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2\left(\operatorname{sh} u_n - \dfrac{u_n}{\operatorname{ch} u_n}\right)}; \tag{9}$$

$$f_{n3} = \frac{E}{2\alpha^2}\int_0^s \left[\frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha(s-u) - (s-u)\operatorname{ch}\alpha(s-u)\right] y''(u)\delta\, ds\,; \tag{10}$$

$$f_{n4} = \frac{E}{2\alpha^2}\int_0^s \left[\frac{1}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha(s-u) - (s-u)\operatorname{ch}\alpha(s-u)\right] h'(u)\delta\, ds\,; \tag{11}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l p(z)\sin\alpha z\, dz\,; \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l t(z)\cos\alpha z\, dz — \tag{12}$$

— коэффициенты разложения в ряды Фурье функций нагрузок $p(z)$, $t(z)$ (при $s = -s_r$).

Неизвестные коэффициенты B_n и G_n определяются следующей системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} v_{2b} B_n + v_{2g} G_n &= V_2\,; \\ v_{3b} B_n + v_{3g} G_n &= V_3\,; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} v_{2b} &= -M_1H_1 + M_2H_2 - \frac{1}{2}\alpha^2 H_3\,; \\ v_{2g} &= -R_1H_1 + R_2H_2 - \frac{1}{2}\alpha^2 H_3\,; \\ v_{3b} &= -M_1F_1 + M_2F_2 - \frac{1}{2}\alpha^2 F_3\,; \\ v_{3g} &= -R_1F_1 + R_2F_2 - \frac{1}{2}\alpha^2 F_3\,; \\ V_2 &= -T_1H_1 + T_2H_2\,; \\ V_3 &= -T_1F_1 + T_2F_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

здесь

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \alpha^2 f_{n3}(s_r)\,\varphi_2 - \alpha f'_{n3}(s_r)\,\varphi_1\,; \\ M_2 &= \alpha^2 f_{n3}(s_r)\,(\varphi_2 + u_n\varphi_1) - \alpha f'_{n3}(s_r)\,u_n\varphi_2\,; \\ R_1 &= \alpha^2 f_{n4}(s_r)\,\varphi_2 - \alpha f'_{n4}(s_r)\,\varphi_1\,; \\ R_2 &= \alpha^2 f_{n4}(s_r)\,(\varphi_2 + u_n\varphi_1) - \alpha f'_{n4}(s_r)\,u_n\varphi_2\,; \\ T_1 &= a_n\varphi_2 + C_n\varphi_1\,; \\ T_2 &= a_n(\varphi_2 + u_n\varphi_1) + C_n u_n\varphi_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}
H_1 &= \int_0^{s_r} \alpha \operatorname{sch}\alpha s y''\delta\, ds\,; & F_1 &= \int_0^{s_r} \alpha \operatorname{sch}\alpha s h'\delta\, ds\,;\\
H_2 &= \int_0^{s_r} \operatorname{sh}\alpha s y''\delta\, ds\,; & F_2 &= \int_0^{s_r} s h\alpha \operatorname{sh}'\delta\, ds\,;\\
H_3 &= \int_0^{s_r} f_{n3}(s)\, y''\delta\, ds\,; & F_3 &= \int_0^{s_r} f_{n3}(s)\, h'\delta\, ds\,;\\
H_4 &= \int_0^{s_r} f_{n4}(s)\, y''\delta\, ds\,; & F_4 &= \int_0^{s_r} f_{n4}(s)\, h'\delta\, ds\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$f_{n3}(s_r)$, $f'_{n3}(s_r)$, $f_{n4}(s_r)$, $f'_{n4}(s_r)$ представляют собой значения функций $f_{n3}(s)$, $f_{n4}(s)$ и, соотвественно, их производных $f'_{n3}(s)$, $f'_{n4}(s)$ при $s = s_r$.

Подставляя (6) в (4), получим из (2) следующие развернутые формулы для расчета срединных напряжений в цилиндрической оболочке с неизгибаемым контуром поперечного сечения при антисимметричном загружении её нормальными $p(z)$ и касательными $t(z)$ тангенциальными усилиями по продольным образующим

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z = &-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2}(a_n\lambda''_1 + c_n\lambda''_2)\sin\alpha z -\\
&-\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\frac{1}{\alpha} f'_{n3}(s_r)\,\lambda''_2 - f_{n3}(s_r)\,\lambda''_1 - f''_{n3}(s)\right]\sin\alpha z -\\
&-\sum_{n=1}^{\infty} G_n\left[\frac{1}{\alpha} f'_{n4}(s_r)\,\lambda''_2 - f_{n4}(s_r)\,\lambda''_1 - f''_{n4}(s)\right]\sin\alpha z\,;\\
\sigma_s = &\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\lambda_1 + c_n\lambda_2)\sin\alpha z +\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\alpha f'_{n3}(s_r)\,\lambda_2 - \alpha^2 f_{n3}(s_r)\,\lambda_1 - \alpha^2 f_{n3}(s)\right]\sin\alpha z +\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} G_n\left[\alpha f'_{n4}(s_r)\,\lambda_2 - \alpha^2 f_{n4}(s_r)\,\lambda_1 - \alpha^2 f_{n4}(s)\right]\sin\alpha z\,;\\
\tau = N &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha}(a_n\lambda'_1 + c_n\lambda'_2)\cos\alpha z +\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[f'_{n3}(s_r)\,\lambda'_2 - \alpha f_{n3}(s_r)\,\lambda'_1 - \alpha f'_{n3}(s)\right]\cos\alpha z +\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} G_n\left[f'_{n4}(s_r)\,\lambda'_2 - \alpha f_{n4}(s_r)\,\lambda'_1 - \alpha f'_{n4}(s)\right]\cos\alpha z\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

В уравнениях (17) первые суммы выражают напряжения в плоской прямоугольной пластинке шириной $2s_r$ и длиной l (развернутая на плоскость оболочка), загруженной по продольным краям теми же силами $p(z)$, $t(z)$, что и оболочка на краевых образующих. Эти напряжения соответствуют известному в теории упругости решению Файлона для плоской прямоугольной пластинки [2]. Вторые и третьи суммы в (17) являются специфичными для оболочек с неизгибаемым контуром и выражают напряжения в оболочке от условной поверхностной нагрузки при отсутствии сил на краевых образующих [1, 2].

Анализ расчетных формул показал, что сходимость рядов в (17) неодинакова. Так вторые и третьи суммы являются быстро сходящимися, а сходимость первых сумм различна для различных значений координаты s. Вблизи продольных краев пластинки сходимость замедленная, особенно при прерывной внешней нагрузке. В связи с этим приходится вычислять значительное количество членов ряда, содержащих быстрорастущие гиперболические функции $\mathrm{sh}u_n$, $\mathrm{ch}u_n$, $\mathrm{sh}\alpha s$, $\mathrm{ch}\alpha s$.

Вычисление функций $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ и их производных при достаточно больших значениях величин аргументов гиперболических функций целесообразно проводить по приближенным формулам. При $u_n < 12$ (погрешность в девятом десятичном знаке)

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\lambda}_1(s) = (\alpha s - u_n - 1)\, e^{-(u_n - \alpha s)}\,;\\
&\bar{\lambda}_2(s) = \frac{1}{\alpha}\lambda_1'(s) = (\alpha s - u_n)\, e^{-(u_n - \alpha s)}\,;\\
&\frac{1}{\alpha}\bar{\lambda}_2'(s) = \frac{1}{\alpha^2}\bar{\lambda}_1''(s) = (1 + \alpha s - u_n)\, e^{-(u_n - \alpha s)}\,;\\
&\frac{1}{\alpha^2}\bar{\lambda}_2''(s) = (2 + \alpha s - u_n)\, e^{-(u_n - \alpha s)}\,, \qquad e = 2{,}71828\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

На продольных краях пластинки ($s = \pm s_r$) точные значения напряжений σ_s и τ могут быть определены непосредственно из граничных условий (3). Для напряжений σ_z по этим краям при учете (18) получена зависимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2}(a_n\lambda_1'' + c_n\lambda_2'')\sin\alpha z\Big|_{s=\pm s_r} = \sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{\alpha^2}(a_n\lambda_1'' + c_n\lambda_2'')\sin\alpha z \mp$$
$$\mp p(z) - \sum_{n=1}^{n=m} a_n \sin\alpha z + 2\sum_{n=m+1}^{\infty} c_n \sin\alpha z\,. \tag{19}$$

В правой части (19) первые три слагаемые представляют собой конечные суммы (m — число членов ряда, соответствующее $u_n = 12$). Последний ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} c_n \sin\alpha z$ удобен для вычислений.

Уравнения (17) получены на основе представления решения системы (1) в форме рядов по синусам (4), что соотвествует конкретным граничным условиям на криволинейных краях оболочки, а именно:

$$\text{при } z = 0 \text{ и } z = l \quad \sigma_z = 0, \quad \tau = t_z(s) \neq 0. \tag{20}$$

В результате на торцах оболочки возникают крутящие моменты и поперечные силы, которые находятся в равновесии с внешними силами, приложенными на продольных краях оболочки.

Выражения (4) ... (17) приобретают конкретную форму, если заданы параметры контура поперечного сечения, а именно: функции $y''(s)$ и $h'(s)$. Рассмотрим частные случаи оболочек с симметричным контуром поперечного сечения, характерным для верхних частей кузовов крытых грузовых и пассажирских вагонов.

2. Круговая оболочка

Начало координат поместим на оси симметрии $0x$ контура поперечного сечения в верхней его точке $s_0 = 0$; точка A расположена также на оси $0x$ снаружи контура на расстоянии a_x от начала координат (рис. 1). В этом случае

$$y''(s) = \frac{1}{R + a_x} h'(s) = \frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, \tag{21}$$

где R — радиус средней окружности контура.

Выражения (10), (11) и (16) при учете (21) примут вид

$$f_{n3}(s) = \frac{E}{2\alpha^2(\alpha^2R^2 + 1)} \left[\frac{3\alpha^2R^2 + 1}{(\alpha^2R^2 + 1)\alpha} \operatorname{sh}\alpha s - \operatorname{sch}\alpha s - \frac{2\alpha^2R^3}{\alpha^2R^2 + 1} \sin \frac{s}{R} \right]; \tag{22}$$

$$f_{n4}(s) = (R + a_x) f_{n3}(s); \tag{23}$$

$$H_1 = \frac{1}{R + a_x} F_1 = \frac{R\delta\alpha}{\alpha^2R^2 + 1} \left(u_n \operatorname{sh} u_n - \frac{\alpha^2R^2 - 1}{\alpha^2R^2 + 1} \operatorname{ch} u_n \right); \tag{24}$$

$$H_2 = \frac{1}{R + a_x} F_2 = \frac{R\delta\alpha}{\alpha^2R^2 + 1} \operatorname{ch} u_n; \tag{25}$$

$$H_3 = \frac{1}{R + a_x} F_3 = \frac{1}{R + a_x} H_4 = \frac{1}{(R + a_x)^2} F_4 =$$

$$= \frac{ER\delta}{2\alpha^2(\alpha^2R^2 + 1)^2} \left[\frac{4\alpha^2R^2}{\alpha^2R^2 + 1} \operatorname{ch} u_n - u_n(\operatorname{sh} u_n + R\alpha) \right]. \tag{26}$$

Имея выражения (22) . . . (26) и используя формулы (7), (8), (9), (12) . . . (15), (17) . . . (19), можно рассчитать напряжения в открытой круговой цилиндрической оболочке, загруженной антисимметрично нормальными $p(z)$ и касательными $t(z)$ усилиями на краевых образующих оболочки.

3. Цилиндрическая оболочка с U—образным контуром поперечного сечения

Ограничимся рассмотрением частного случая оболочки с U—образным симметричным контуром поперечного сечения, составленным из плавно сопрягаемых дуг окружностей двух различных радиусов и прямых (рис 2).

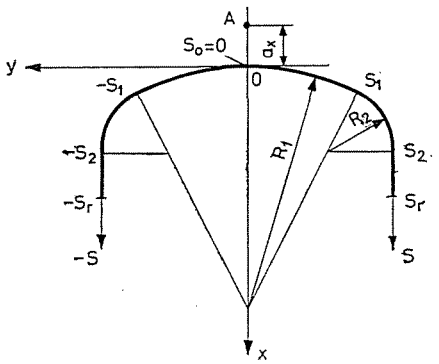

Рис. 2

Для принятых положений начала координат и точки A функции $y''(s)$ и $h'(s)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} y''(s) &= \underbrace{\frac{1}{R_1}\sin\frac{s}{R_1}}_{0\quad s\quad s_1} + \underbrace{\frac{1}{R_2}\sin\left(\frac{s-s_1}{R_2}+\frac{s_1}{R_1}\right)}_{s_1\quad s\quad s_2} + \underbrace{0}_{s_2\quad s\quad s_r}\ ; \\ h'(s) &= \underbrace{A_1\sin\frac{s}{R_1}}_{0\quad s\quad s_1} + \underbrace{A_2\sin\left(\frac{s-s_1}{R_2}+\frac{s_1}{R_1}\right) + A_3\cos\left(\frac{s-s_1}{R_2}+\frac{s_1}{R_1}\right)}_{s_1\quad s\quad s_2} + \underbrace{0}_{s_2\quad s\quad s_r}\ , \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{R_1}(a_x + R_1)\ ; \\ A_2 &= \frac{1}{R_2}\left[a_x + R_1 - (R_1 - R_2)\cos\frac{s_1}{R_1}\right]; \\ A_3 &= \frac{1}{R_2}(R_1 - R_2)\sin\frac{s_1}{R_1}\ ; \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

s_1 — координата точки сопряжения дуг окружностей радиусов R_1 и R_2;

s_2 — координата точки сопряжения дуги окружности радиуса R_2 с прямолинейным участком;

a_x — расстояние от начала координат до точки A (по оси $0x$).

Знак $\underbrace{\quad}_{s_i \quad s \quad s_{i+1}}$ имеет смысл функционального прерывателя и указывает, что стоящее над ним выражение определяет функцию только в промежутке $s_i \leqslant s \leqslant s_{i+1}$. Для всех значений s, не лежащих в указанном промежутке, это выражение равно нулю тождественно.

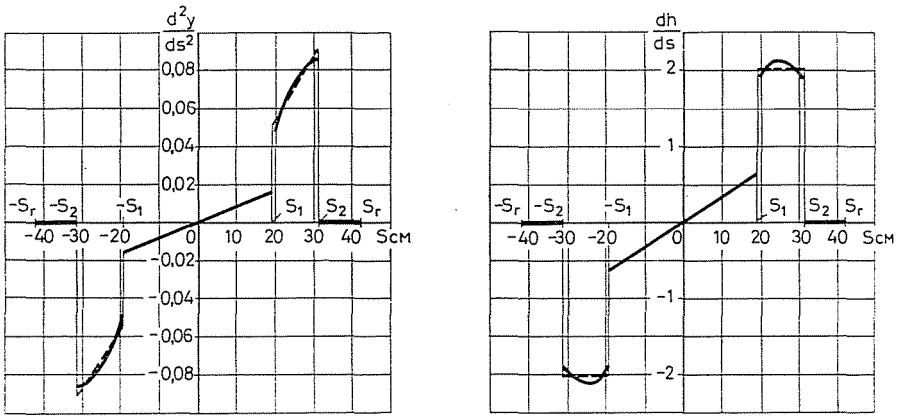

Рис. 3

Использование функций $y''(s)$, $h'(s)$ в форме (27), (28) приводит к весьма сложным расчетам. В связи с этим целесообразно упростить эти функции, аппроксимируя их кусочно-линейными функциями вида

$$y_1''(s) = \underbrace{e_1 s}_{0 \quad s \quad s_1} + \underbrace{e_2 s + L}_{s_1 \quad s \quad s_2} + \underbrace{O}_{s_2 \quad s \quad s_r}; \tag{29}$$

$$h_1'(s) = \underbrace{k_1 s}_{0 \quad s \quad s_1} + \underbrace{k_2 s + M}_{s_1 \quad s \quad s_2} + \underbrace{O}_{s_2 \quad s \quad s_r}, \tag{30}$$

где e_i, k_i — тангенсы углов наклона отрезков прямых $y''(s)$, $h'(s)$;

L, M — отрезки, отсекаемые прямыми на осях $0y''$ и $0h'$.

Достаточность такого аппроксимирования проверена на ряде расчетов. Для примера на рис. 3 приведены графики функций $y''(s)$ и $h'(s)$ (сплошные линии), соотвествующих контуру поперечного сечения крыши модели кузова крытого грузового вагона с размерами: $R_1 = 34$ см; $R_2 = 11{,}6$ см; $s_1 = 19{,}6$ см; $s_2 = 31{,}1$ см; $s_r = 42$ см; $b = 47{,}6$ см; $a_x = 6{,}2$ см. Штриховыми линиями показаны графики аппроксимирующих функций $y_1''(s)$ и $h_1'(s)$.

Выражения (10), (11) и (16) при задании функций y'' и h' в виде кусочно-линейных (29), (30) примут вид

$$\frac{2\alpha^5}{E} f_{n4}(s) = \underbrace{e_1 [3\,\mathrm{sh}\alpha s - \alpha s(\mathrm{ch}\alpha s + 2)]}_{0 \quad s \quad s_1} + \underbrace{e_1 (3\,\mathrm{sh}\alpha s - \alpha s \mathrm{ch}\alpha s) -}_{s_1}$$

$$\underbrace{- [\alpha^2 (s - s_1) D_1 + 3 (e_1 - e_2)]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_1) + \alpha [D_3 + (e_1 - e_2) s] \times}_{s}$$

$$\underbrace{\times \mathrm{ch}\alpha (s - s_1) - 2\alpha (e_2 s + L)}_{s_2} + \underbrace{e_1 (3\,\mathrm{sh}\alpha s - \alpha s \mathrm{ch}\alpha s) - [\alpha^2 (s - s_1) D_1 +}_{s_2}$$

$$\underbrace{+ 3 (e_1 - e_2)]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_1) + \alpha [D_3 + (e_1 - e_2) s]\,\mathrm{ch}\alpha (s - s_1) +}_{s}$$

$$\underbrace{+ [\alpha^2 (s - s_2) D_2 - 3 e_2]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_2) - \alpha [2 L - e_2 (s - 3 s_2)]\,\mathrm{ch}\alpha (s - s_2)}_{s_r} . \quad (31)$$

Первые и вторые производные функций $f_{n3}(s)$ по s получают выражения

$$\frac{2\alpha^4}{E} f'_{n3}(s) = \underbrace{e_1 (2\,\mathrm{ch}\alpha s - \alpha s \mathrm{sh}\alpha s - 2)}_{0 \quad s \quad s_1} + \underbrace{e_1 (2\,\mathrm{ch}\alpha s - \alpha s \mathrm{sh}\alpha s) +}_{s_1}$$

$$\underbrace{+ \alpha [L + (e_1 - e_2)(s - 2 s_1)]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_1) -}_{s}$$

$$\underbrace{- [\alpha^2 (s - s_1) D_1 + 2 (e_1 - e_2)]\,\mathrm{ch}\alpha (s - s_1) - 2 e_2 +}_{s_2}$$

$$\underbrace{+ e_1 (2\,\mathrm{ch}\alpha s - \alpha s \mathrm{sh}\alpha s) + \alpha [L + (e_1 - e_2)(s - 2 s_1)]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_1) -}_{s_2}$$

$$\underbrace{- [\alpha^2 (s - s_1) D_1 + 2 (e_1 - e_2)]\,\mathrm{ch}\alpha (s - s_1) - \alpha [L - e_2 (s - 2 s_2)]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_2) +}_{s}$$

$$\underbrace{+ [\alpha^2 (s - s_2) D_2 - 2 e_2]\,\mathrm{ch}\alpha (s - s_2)}_{s_r} ; \quad (32)$$

$$\frac{2\alpha^3}{E} f''_{n3}(s) = \underbrace{e_1 (\mathrm{sh}\alpha s - \alpha s \mathrm{ch}\alpha s)}_{0 \quad s \quad s_1} + \underbrace{e_1 (\mathrm{sh}\alpha s - \alpha s \mathrm{ch}\alpha s) -}_{s_1}$$

$$\underbrace{- [\alpha^2 (s - s_1) D_1 + e_1 - e_2]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_1) + \alpha (e_1 - e_2)(s - s_1)\,\mathrm{ch}\alpha (s - s_1) +}_{s_2}$$

$$\underbrace{+ e_1 (\mathrm{sh}\alpha s - \alpha s \mathrm{ch}\alpha s) - [\alpha^2 (s - s_1) D_1 + e_1 - e_2]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_1) +}_{s_2}$$

$$\underbrace{+ \alpha (e_1 - e_2)(s - s_1)\, ch\alpha (s - s_1) + [\alpha^2 (s - s_2) D_2 - e_2]\,\mathrm{sh}\alpha (s - s_2) +}_{s}$$

$$\underbrace{+ \alpha e_2 (s - s_2)\,\mathrm{ch}\alpha (s - s_2)}_{s_r} . \quad (33)$$

$$\frac{1}{\delta} H_1 = \int_0^{s_r} \alpha s \operatorname{ch}\alpha s y_1'' \, ds = \left[\frac{2}{\alpha^2}(e_1 - e_2) - D_1 s_1\right] \operatorname{sh}\alpha s_1 +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}[L - 2(e_1 - e_2) s_1] \operatorname{ch}\alpha s_1 + \left(\frac{2}{\alpha^2} e_2 + D_2 s_2\right) \operatorname{sh}\alpha s_2 - \frac{1}{\alpha}(L + 2 e_2 s_2) \operatorname{ch}\alpha s_2 \; ; \tag{34}$$

$$\frac{1}{\delta} H_2 = \int_0^{s_r} \operatorname{sh}\alpha s y_1'' \, ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[D_2 \operatorname{ch}\alpha s_2 - \frac{1}{\alpha} e_2 \operatorname{sh}\alpha s_2 - D_1 \operatorname{ch}\alpha s_1 - \frac{1}{\alpha}(e_1 - e_2) \operatorname{sh}\alpha s_1\right]; \tag{35}$$

$$\frac{2\alpha^5}{\delta E} H_4 = \frac{2\alpha^5}{E} \int_0^{s_r} f_{n4}(s) y_1'' \, ds = k_1 \left[D_1 s_1 - \frac{5}{\alpha^2}(e_1 - e_2)\right] \operatorname{sh}\alpha s_1 -$$

$$- \frac{1}{\alpha} k_1 [4L - 5(e_1 - e_2) s_1] \operatorname{ch}\alpha s_1 - k_1 \left(D_2 s_2 + \frac{5}{\alpha^2} e_2\right) \operatorname{sh}\alpha s_2 +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} k_1 (4L + 5 e_2 s_2) \operatorname{ch}\alpha s_2 + \Big\{D_1' [L + e_2 (2 s_2 - s_1)] + D_2 D_3' +$$

$$+ (k_1 - k_2)\left(D_2 s_2 + \frac{5}{\alpha^2} e_2\right)\Big\} \operatorname{sh}\alpha (s_2 - s_1) - \Big\{\frac{1}{\alpha}[D_3' e_2 + (k_1 - k_2)(4L + 5 e_2 s_2)] +$$

$$+ \alpha D_1' \left[D_2 (s_2 - s_1) + \frac{2}{\alpha^2} e_2\right]\Big\} \operatorname{ch}\alpha (s_2 - s_1) + \frac{4}{\alpha}[M e_2 + (k_1 - k_2) L] -$$

$$- \alpha \left[\frac{2}{3} s_1^3 (k_1 e_1 - k_2 e_2) + \frac{2}{3} k_2 e_2 s_2^3 + 2 LM (s_2 - s_1) + (k_2 L + e_2 M)(s_2^2 - s_1^2)\right], \tag{36}$$

где

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= L - (e_1 - e_2) s_1 \; ; & D_1' &= M - (k_1 - k_2) s_1 \; ; \\ D_2 &= L + e_2 s_2 \; ; & D_2' &= M + k_2 s_2 \; ; \\ D_3 &= 2L - 3(e_1 - e_2) s_1 \; ; & D_3' &= 2M - 3(k_1 - k_2) s_1 \, . \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Выражения для функций $f_{n4}(s)$, её первой и второй производных, а также для величин F_1, F_2, F_4 получаются из (31—36) заменой e_1, e_2, L, D_1, D_2, D_3 соотвественно на k_1, k_2, M, D_1', D_2', D_3'.

Выражение для H_3 получается из (36) путем замены k_1, k_2, M, D_1', D_3' соответственно на e_1, e_2, L, D_1, D_3.

Выражение для F_3 получается из (36) путем замены k_1, k_2, M, D_1', D_3' соответственно на e_1, e_2, L, D_1, D_3 и заменой величин e_1, e_2, L, D_1, D_2 в (36) на k_1, k_2, M, D_1', D_2'.

В качестве примера рассмотрим расчет оболочки верхней части кузова, загруженной антисимметрично нормальными усилиями (рис. 4а) и закрепленной по концевым сечениям шарнирно (при $z = 0$ и, $z = l$, $\eta = \Theta = 0$, $\sigma_z =$

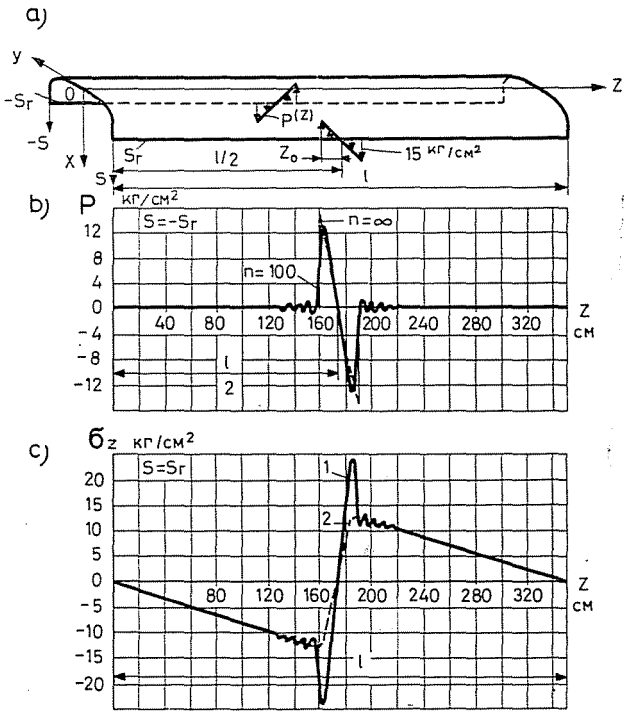

Рис. 4

$= 0$, $\tau \neq 0$). Контур поперечного сечения имеет те же параметры, что и в примере на рис. 3; толщина оболочки $\delta = 0{,}035$ см.

Расчетная нагрузка, эпюра которой приведена на рис. 4 в, задана тригонометрическим полиномом

$$p(z)\,|_{s=-s_r} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,6\ldots}^{100} \frac{1}{n} \cos\frac{\pi n}{2} \left(15 \cos\frac{\pi n}{l} z_0 - \frac{l}{\pi n} \sin\frac{\pi n}{l} z_0\right) \sin\frac{\pi n}{l} z, \tag{38}$$

где $l = 350$ см; $z_0 = 15$ см.

На рис. 4 с изображены эпюры нормальных напряжений σ_z по краевой образующей $s = s_s$, определенных с помощью формул (17) теории оболочек с

неизгибаемым контуром (кривая 1) и с помощью теории оболочек с недеформируемым контуром (кривая 2). В таблице приведены значения напряжений σ_z по двум поперечным сечениям оболочки.

Координата S в см	Величины σ_z в кг/см² по сечениям оболочки			
	По теории оболочек с неизгибаемым контуром		По теории оболочек с недеформируемым контуром	
	z=50 см	z=160 см	z=50 см	z=160 см
5,25	0,67	1,41	0,65	2,04
10,5	1,26	2,81	1,27	3,99
15,75	1,69	4,26	1,72	5,40
21,0	1,85	5,71	1,80	5,65
26,25	1,24	4,88	1,25	3,92
31,5	—0,33	0,43	—0,35	—1,10
36,75	—2,30	—6,60	—2,28	—7,16
42,0	—4,33	—18,44	—4,40	—13,81

Применение: 1. При $S = 0$ $\sigma_z = 0$ для всех z.
2. При $S < 0$ σ_z меняет знак.

Из рис. 4 с и таблицы видно, что на участках оболочки, удаленных от точек приложения нагрузки, напряжения, определённые по упомянутым теориям, практически одинаковы. На участках концентрации нагрузки и вблизи него закон распределения напряжений, соотвествующий теории оболочек с неизгибаемым контуром, отличен от секториального (максимальные напряжения в 1,7 раза больше, чем напряжения, определенные по теории оболочек с недеформируемым контуром).

Рассматривая полученные результаты, можно сделать вывод, что алгоритм расчета оболочки верхней части кузова при антисимметричном загружении, построенный на основе теории оболочек с неизгибаемым контуром поперечного сечения, позволяет с достаточной точностью определять срединные напряжения в оболочке, включая участки высокой концентрации напряжений.

4. Вариант приближенного решения для антисимметрично загруженных оболочек с неизгибаемым контуром

Как видно из приведенных формул, наиболее громоздким является вычисление вторых и третьих сумм в (17) и, в частности, расчет коэффициентов B_n и G_n, определяющих функции $\eta''(z)$ и $\Theta''(z)$ соответственно (4). Задачу можно существенно упростить, если для вычисления этих коэффициентов воспользоваться теорией оболочек с недеформируемым конутром [3].

Согласно этой теории при антисимметричном загружении оболочки по краевым образующим нормальными $p(z)$ и касательными $t(z)$ силами перемещения контура поперечного сечения как твердого тела сводится к пере-

мещению η и повороту Θ вокруг центра изгиба. Поместив точку A в центр изгиба, можно определить эти перемещения на базе теории В. З. Власова. При этом необходимо учесть граничные условия на криволинейных краях оболочки (20), отвечающие принятой форме решения в рядах по синусам. Эти условия соотвествуют шарнирному опиранию оболочки на концах $z = 0$ и $z = l$ [3].

Зная $\eta(z)$ и $\Theta(z)$ и переходя ко вторым производным этих функций, легко найти коэффициенты B_n и G_n как коэффициенты Фурье функций η'' и Θ'' (4). После этого для расчета срединных напряжений в U-образной оболочке достаточно использовать формулы (7), (8), (9), (12), (18), (19), (31) . . . (37) и (17).

Такое решение, основанное на использовании гипотезы о недеформируемости контура при определении функций $\eta(z)$ и $\Theta(z)$, будет приближённым, поскольку положение центра изгиба в теории оболочек с неизгибаемым контуром несколько отличается от положения, которое устанавливается теорией В. З. Власова. Однако это приближённое решение для оболочек с неизгибаемым контуром дает качественное уточнение результатов по сравнению с теорией В. З. Власова для участков оболочки, где приложены внешние контурные силы значительной интенсивности, вызывающие концентрацию напряжений. Это следует из того, что первые суммы в (17), представляющие напряжения в прямоугольной пластинке (развернутая на плоскость оболочка) от заданных сил $p(z)$ и $t(z)$ на краевых образующих и определяющие местную картину напряжений, решаются точно.

Резюме

В статье приводятся уравнения, дающие возможность провести практические расчеты срединных напряжений в открытых цилиндрических оболочках с симметричным контуром поперечного сечения переменной кривизны, загруженных антисимметрично. Рассмотрены случаи применения общих уравнений к расчёту срединых напряжений в элементах кузова вагона, представляющих собой подкрепленные цилиндрические оболочки.

Литература

1. Никольский, Е. Н. Известия АН ССС, ОТН, **6**, 45, (1956).
2. Никольский, Е. Н. Оболочки с вырезами типа вагонных кузовов, Машгиз, Москва, 1963
3. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни, ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1959.
4. Никольский, Е. Н. Acta Techn. Sci. Hung., **50**, 251, (1965).

Профессор; Е. Н. Никольский;
Доцент В. В. Кобищанов.
Брянский институт транспортного машиностроения, 241035, Брянск, СССР.