VERALLGEMEINERUNG DES VERBINDUNGSPROBLEMS STATISCH UNBESTIMMTER TRAGWERKEN

Von

P. MICHELBERGER

Lehrstuhl für Mechanik, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 17. Mai, 1973.)

Die Lösung des Verbindungsproblems bei der Verbindung zweier bzw. dreier statisch unbestimmten Tragwerke — aufgrund der Theorie der statisch unbestimmten Hauptsysteme — ist wohlbekannt. Damit besteht die Möglichkeit, die Zusammenarbeit des Fahrgestells und des Aufbaues einfach zu untersuchen [1, 2]. In der Praxis kommt es aber sehr häufig vor, daß mehrere Systeme (Fahrgestell, Fahrerhaus, Aufbau, eventuell ein geteiltes Fahrgestell und ein geteilter Aufbau) zusammenarbeiten, und so muß sich das Verfahren auf die Bestimmung von durch eine statisch unbestimmten Verbindung von mehr als zwei Grundsystemen erzeugte Beanspruchungen erstrecken.

Die Anzahl der Grundsysteme (Trägersysteme) soll mit n bezeichnet werden und die Verbindeglieder werden in ein einziges System zusammengezogen (Abb. 1.).

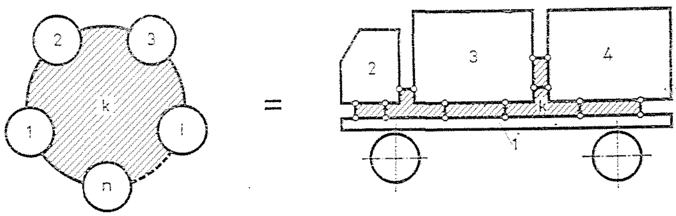

Abb. 1

Die alle überzähligen Verbindungskräfte des gesamten Systems angebende Kompatibilitätsgleichung kann auch in partitionierter Form aufgeschrieben werden, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Beanspruchungsmatrizes $\mathbf{B}$ aus den Einheitsbelastungen und $\mathbf{A}$ aus den äußeren Belastungen auch partitioniert werden können. Im weiteren soll die Matrix der im i-ten Trägersystem aus den in den fiktiven Schnitten durch das j-te Trägersystem entstehenden spezifischen Beanpsruchungen mit $\mathbf{B}_{ij}$ bezeichnet werden. Ähnlicherweise enthält die Matrix $\mathbf{A}_i$ die aus den äußeren Lasten im i-ten Trägersystem entstehenden Beanspruchungen. Die Zahl der Zeilen der Matrix $\mathbf{B}_{ij}$ hängt von der Anzahl der Abschnitte des i-ten Trägersystems ab und die Zahl der Spalten ist den Unbestimmtheitsgraden gleich. Die

Anzahl der Zeilen der Matrix $\mathbf{A}_i$ hängt ebenfalls von der Zahl der Abschnitte des i-ten Trägersystems ab und die Zahl der Spalten ist der Anzahl der untersuchten Lastfälle gleich. Dementsprechend gibt:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{1k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{B}_{ii} & & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{B}_{nn} & \mathbf{B}_{nk} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{kk} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_i \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}.$$

Die sich auf die in Gedanken getrennt behandelten Systeme beziehenden Steifigkeitskennwerte werden in eine einzige Diagonal-Hypermatrix, in die sogenannte Federmatrix, zusammengezogen:

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{R}_1, \ \mathbf{R}_2, \ \dots, \ \mathbf{R}_i, \ \dots, \ \mathbf{R}_n, \ \mathbf{R}_k \rangle.$$

Die Koeffizientenmatrix der Kompatibilitätsgleichung des verbundenen Systems aus n Teilen lautet:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^* \, \mathbf{R} \, \mathbf{B} \text{ und in entwickelter Form:}$$

$$\mathbf{D} = $$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B}^*_{11}\mathbf{R}_1\mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} & \dots \ \mathbf{0} & \dots \ \mathbf{0} & \mathbf{B}^*_{11}\mathbf{R}_1\mathbf{B}_{1k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^*_{22}\mathbf{R}_2\mathbf{B}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^*_{22}\mathbf{R}_2\mathbf{B}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \ \mathbf{B}^*_{ii}\mathbf{R}_i\mathbf{B}_{ii} & \dots \ \mathbf{0} & \mathbf{B}^*_{ii}\mathbf{R}_i\mathbf{B}_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \ \mathbf{0} & \dots \ \mathbf{B}^*_{nn}\mathbf{R}_n\mathbf{B}_{nn} & \mathbf{B}^*_{nn}\mathbf{R}_n\mathbf{B}_{nk} \\ \mathbf{B}^*_{1k}\mathbf{R}_1\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}^*_{2k}\mathbf{R}_2\mathbf{B}_{22} \dots & \mathbf{B}^*_{ik}\mathbf{R}_i\mathbf{B}_{ii} & \dots \ \mathbf{B}^*_{nk}\mathbf{R}_n\mathbf{B}_{nn} & \sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}^*_{ik}\mathbf{R}_i\mathbf{B}_{ik} + \mathbf{B}^*_{nk}\mathbf{R}_k\mathbf{B}_{nk} \end{bmatrix}.$$

Die Belastungsfaktoren sind:

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}^*\mathbf{R}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^*_{11}\mathbf{R}_1\mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}^*_{22}\mathbf{R}_2\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}^*_{ii}\mathbf{R}_i\mathbf{A}_i \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{nn}\mathbf{R}_n\mathbf{A}_n \\ \sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}^*_{ik}\mathbf{R}_i\mathbf{A}_i + \mathbf{B}^*_{kk}\mathbf{R}_k\mathbf{A}_k \end{bmatrix}.$$

Aufgrund der obigen Werte lautet die Kompatibilitätsgleichung in der üblichen kürzeren Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{D}_{ii} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_{nn} & \mathbf{D}_{nk} \\ \mathbf{D}_{k1} & \mathbf{D}_{22} & & \mathbf{D}_{k1} & \dots & \mathbf{D}_{kn} & \mathbf{D}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_i \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \mathbf{0} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

wo $\mathbf{D}_{ik} = \mathbf{B}^*_{ii}\mathbf{R}_i\mathbf{B}_{ik}$ und $\mathbf{d}_i = \mathbf{B}^*_{ii}\mathbf{R}_i\mathbf{A}_i$ sind.

In diesem Gleichungssystem bedeuten $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n$ die in den fiktiven Schnitten durch die n Grundsysteme, $\mathbf{x}_k$ die in den fiktiven Schnitten des Verbindeglieds entstehenden statisch unbestimmten Verbindungskräfte. Es soll angenommen werden, daß das Kräftespiel der Grundsysteme (von 1 bis n) an sich leicht zu bestimmen ist, wenn die fiktiven Schnitte im Verbindeglied k vorübergehend als wirkliche Durchschneidungen berücksichtigt werden, d. h. das Verbindeglied als statisch bestimmt betrachtet wird. In diesem Falle werden selbstverständlich nicht die endgültigen Verbindungskräfte, sondern nur die von äußeren Lasten herrührenden Verbindungskräfte des statisch unbestimmten Hauptsystems bestimmt.

Die zur äußeren Last gehörenden Verbindungskräfte der statisch unbestimmten Hauptsysteme (die Grundsysteme $1 \dots n$ sind unbestimmt) mit $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ bezeichnet, erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11}\mathbf{z}_1 + \mathbf{d}_1 = \mathbf{0} \quad &\rightarrow \mathbf{z}_1 = -\mathbf{D}_{11}^{-1}\,\mathbf{d}_1 \\ \mathbf{D}_{22}\mathbf{z}_2 + \mathbf{d}_2 = \mathbf{0} \quad &\rightarrow \mathbf{z}_2 = -\mathbf{D}_{22}^{-1}\,\mathbf{d}_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad\;\; \vdots \\ \mathbf{D}_{ii}\mathbf{z}_i + \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \quad &\rightarrow \mathbf{z}_i = -\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{d}_i \\ \vdots \qquad\qquad & \quad\;\; \vdots \\ \mathbf{D}_{nn}\mathbf{z}_n + \mathbf{d}_n = \mathbf{0} \quad &\rightarrow \mathbf{z}_n = -\mathbf{D}_{nn}^{-1}\,\mathbf{d}_n\,. \end{aligned}$$

Es versteht sich von selbst, daß in den beim Verbindeglied k angenommenen Schnitten unter der äußeren Last relative Verschiebungen auftreten, die aber durch die dort entstehenden Kräfte $\mathbf{x}_k$ beseitigt werden. Für die Bestimmung der Kräfte $\mathbf{x}_k$ müssen aber auch die relativen Verschiebungen infolge der in den Schnitten des Verbindegliedes auf dem statisch unbestimmten Hauptsystem wirkenden spezifischen Einheitsbelastungspaare bzw. letzten Endes die im Grundsystem $1 \dots n$ entstehenden spezifischen Beanspruchungen bekannt sein. Die durch die in den Schnitten des Verbindegliedes k wirkenden spezifischen Einheitsbelastungspaare in den Grundsystemen entstehenden Verbindungskräfte seien mit $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ bezeichnet; so kann die Kompatibilitätsgleichung des statisch unbestimmten Hauptsystems, den äußeren Lasten ähnlich, auch für die spezifischen Einheitsbelastungspaare aufgeschrieben werden:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{D}_{11}\mathbf{Y}_1 + \mathbf{D}_{1k} = \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{Y}_1 = -\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{1k} \\
\mathbf{D}_{22}\mathbf{Y}_2 + \mathbf{D}_{2k} = \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{Y}_2 = -\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{2k} \\
\vdots & & \vdots \\
\mathbf{D}_{ii}\mathbf{Y}_i + \mathbf{D}_{ik} = \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{Y}_i = -\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{D}_{ik} \\
\mathbf{D}_{nn}\mathbf{Y}_n + \mathbf{D}_{nk} = \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{Y}_n = -\mathbf{D}_{nn}^{-1}\mathbf{D}_{nk} .
\end{array}$$

Die endgültigen Verbindungskräfte des gesamten Tragwerks sind:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{x}_1 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{Y}_1\mathbf{x}_k \\
\mathbf{x}_2 = \mathbf{z}_2 + \mathbf{Y}_2\mathbf{x}_k \\
\vdots \\
\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i + \mathbf{Y}_i\mathbf{x}_k \\
\vdots \\
\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k .
\end{array}$$

Daraus ist ersichtlich, daß beim Aufschreiben der Ausdrücke für die endgültigen Verbindungskräfte eigentlich eine lineare Transformation angewendet wurde, d. h. daß der Zusammenhang zwischen den Verbindungskräften des partitionierten Tragwerks

$$\mathbf{u}^* = [\mathbf{z}_1^*, \mathbf{z}_2^*, \ldots, \mathbf{z}_i^*, \ldots, \mathbf{z}_n^*, \mathbf{x}_k^*]$$

und den endgültigen inneren Kräften des verbundenen Tragwerks

$$\mathbf{x}^* = [\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_i^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*, \mathbf{x}_k^*]$$

auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^*\mathbf{u} .$$

Damit lautet die transformierte Form des vollen Gleichungssystems:

$$\mathbf{TDT}^*\mathbf{u} + \mathbf{Td} = \mathbf{0},$$

wo $\mathbf{T}$ die transformierende Matrix (die Einheitsmatrix mit $\mathbf{E}$ bezeichnet) ist:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}
\mathbf{E} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{E} & \ldots & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{E} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\
-\mathbf{D}_{k1}\mathbf{D}_{11}^{-1} & -\mathbf{D}_{k2}\mathbf{D}_{22}^{-1} & \ldots & -\mathbf{D}_{ki}\mathbf{D}_{ii}^{-1} & \ldots & -\mathbf{D}_{kn}\mathbf{D}_{nn}^{-1} & \mathbf{E}
\end{bmatrix}.$$

Die angegebenen Operationen durchgeführt, erhält die Kompatibilitätsgleichung die Form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{D}_{ii} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{D}_{nn} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_i \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_i \\ \vdots \\ \mathbf{d}_n \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \mathbf{0} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

In dieser Gleichung:

$$\Delta = -(\mathbf{D}_{k1}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{1k} + \mathbf{D}_{k2}\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{2k} + \dots + \\ + \mathbf{D}_{ki}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{D}_{ik} + \dots + \mathbf{D}_{kn}\mathbf{D}_{nn}^{-1}\mathbf{D}_{nk} - \mathbf{D}_{kk}),$$

$$\delta = -(\mathbf{D}_{k1}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{d}_1 + \mathbf{D}_{k2}\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{d}_2 + \dots + \\ + \mathbf{D}_{ki}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{d}_i + \dots + \mathbf{D}_{kn}\mathbf{D}_{nn}^{-1}\mathbf{d}_n - \mathbf{d}_k).$$

Wie zu erkennen ist, besteht die nach der Transformation erhaltene Kompatibilitätsgleichung aus $n + 1$ voneinander unabhängigen Gleichungen, von denen die Lösung der ersten n Gleichungen die Verbindungskräfte der unabhängigen Grundsysteme aus den eigenen äußeren Belastungen, und die Lösung der $k = n + 1$-ten Gleichung die Verbindungskräfte aus der statisch unbestimmten Verbindung der Grundsysteme direkt ergibt:

$$\Delta \mathbf{x}_k + \delta = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x}_k = -\Delta^{-1}\delta .$$

In Kenntnis von $\mathbf{x}_k$ ergeben sich aus $\mathbf{x} = \mathbf{T}^*\mathbf{u}$ die eigenen inneren Verbindungskräfte der Grundsysteme nach der Verbindung zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{z}_1 + \mathbf{Y}_1\mathbf{x}_k = -\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{d}_1 + \mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{D}_{1k}\Delta^{-1}\delta \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{z}_2 + \mathbf{Y}_2\mathbf{x}_k = -\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{d}_2 + \mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{2k}\Delta^{-1}\delta \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_i &= \mathbf{z}_i + \mathbf{Y}_i\mathbf{x}_k = -\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{d}_i + \mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{D}_{ik}\Delta^{-1}\delta \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= \mathbf{z}_n + \mathbf{Y}_n\mathbf{x}_k = -\mathbf{D}_{nn}^{-1}\mathbf{d}_n + \mathbf{D}_{nn}^{-1}\mathbf{D}_{nk}\Delta^{-1}\delta . \end{aligned}$$

Die endgültigen Beanspruchungen (die Beanspruchungsmatrizen wieder eingesetzt) sind:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 &= \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_{1k}\mathbf{x}_k \\
\mathbf{L} &= \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_{2k}\mathbf{x}_k \\
&\vdots \\
\mathbf{L}_i &= \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_{ik}\mathbf{x}_k \\
&\vdots \\
\mathbf{L}_n &= \mathbf{A}_n + \mathbf{B}_{nn}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}_{nk}\mathbf{x}_k \\
\mathbf{L}_k &= \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_{kk}\mathbf{x}_k \, .
\end{aligned}$$

Die endgültigen Beanspruchungen des i-ten Grundsystems sind in ausführlicher Form:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_i &= \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{d}_i + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{D}_{ik}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}_{ik}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \\
&= \mathbf{A}_i - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{B}_{ii}^{*}\mathbf{R}_i\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{B}_{ii}^{*}\mathbf{R}_i\mathbf{B}_{ik}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}_{ik}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \\
&= (\mathbf{E}_i - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{B}_{ii}^{*}\mathbf{R}_i)\mathbf{A}_i - (\mathbf{E}_i - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{B}_{ii}^{*}\mathbf{R}_i)\mathbf{B}_{ik}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} \, .
\end{aligned}$$

Die Bezeichnung $\mathbf{G}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{D}_{ii}^{-1}\mathbf{B}_{ii}^{*}\mathbf{R}_i$ eingeführt und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\mathbf{V}_i = \mathbf{G}_i\mathbf{A}_i$, d. h. daß das Produkt die aus den eigenen äußeren Lasten entstehenden Beanspruchungen des getrennten i-ten Grundsystems ergibt, erhält man als endgültige Beanspruchungen der verbundenen Systeme:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{G}_1\mathbf{B}_{1k}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} \\
\mathbf{L}_2 &= \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}_2\mathbf{B}_{2k}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} \\
&\vdots \\
\mathbf{L}_i &= \mathbf{V}_i - \mathbf{G}_i\mathbf{B}_{ik}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} \\
&\vdots \\
\mathbf{L}_n &= \mathbf{V}_n - \mathbf{G}_n\mathbf{B}_{nk}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} \, .
\end{aligned}$$

Die endgültigen Beanspruchungen des Verbindesystems sind wie folgt:

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{A}_k - \mathbf{B}_{kk}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} \, .$$

Die Ausdrücke für $\boldsymbol{\Delta}$ und $\boldsymbol{\delta}$ in den Gleichungen können auch mit den obigen Bezeichnungen aufgeschrieben werden.

In der Praxis ist das Verbindeglied meistens kein selbständiges Trägersystem, sondern stellt eine direkte Verbindung der Grundsysteme (Schweiß- oder Schraubenverbindung, usw.) dar. Die Deformation solcher Verbindungselemente darf im Verhältnis zu den Deformationen des gesamten Tragwerks bzw. der einzelnen Grundsysteme vernachläßigt werden. In diesem Falle ist $\mathbf{R}_k = \mathbf{0}$ und so kann das erste Glied in den obigen Ausdrücken für $\boldsymbol{\Delta}$ bzw. $\boldsymbol{\delta}$ weggelassen werden. Es kommt auch oft vor, daß die äußere Last nur auf die Grundsysteme wirkt, infolgedessen wird $\mathbf{A}_k = \mathbf{0}$ sein, die endgültige

Beanspruchung des Tragwerks ist also in dieser vereinfachten Form:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{V}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{B}_{ik} \Delta^{-1} \delta$$

und die Beanspruchung der Verbindungselemente ergibt sich zu:

$$\mathbf{L}_k = -\mathbf{B}_{kk} \Delta^{-1} \delta$$

mit

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_{ik}^{*} \mathbf{R}_i \mathbf{G}_i \mathbf{B}_{ik} \quad \text{und} \quad \delta = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_{ik}^{*} \mathbf{R}_i \mathbf{V}_i \, .$$

Die Bestimmung der Beanspruchungen mit Hilfe des vorstehenden Algorithmus ist besonders dann vorteilhaft, wenn die äußeren Lasten in verallgemeinerter Form angegeben sind, d.h. statt der tatsächlichen äußeren Lastfälle die Berechnungen für die in den vorgeschriebenen Knotenpunkten der Grundsysteme wirkenden, getrennten Einheitsbelastungen durchgeführt und auch die voraussichtlichen Verbindungsstellen zwischen den Knotenpunkten angenommen werden. Ein großer Teil der Rechenarbeit kann so für die einzelnen Grundsysteme schon im voraus durchgeführt und die Ergebnisse können gespeichert werden. Im Besitz der Teilergebnisse läßt sich das Verbindungsproblem verhältnismäßig rasch und mit geringem Rechenaufwand lösen (die Zahl der Unbestimmtheitsgrade des Verbindeglieds k ist im allgemeinen wesentlich kleiner als bei den einzelnen Grundsystemen). Eine solche Zerlegung der Aufgabe ist besonders für Herstellerbetriebe von Bedeutung, wo verhältnismäßig viele Fahrzeugarten unter veränderlichen Marktverhältnissen verkauft werden.

Zusammenfassung

Die Lösung der Aufgabe der nachträglichen Verbindung zweier statisch unbestimmter Systeme läßt sich für die Verbindung von Systemen aus mehreren Tragwerken verallgemeinern. Solche Probleme ergeben sich bei der Herstellung von Nutzkraftwagen, der abgeleitete Algorithmus ist aber auch für die rekursive Lösung statisch mehrfach unbestimmter, beliebiger Tragwerke geeignet.

Literatur

1. Michelberger, P.: Einige Probleme der Berechnung der statisch unbestimmten Fahrzeugkonstruktionen nach dem Kraftgrößenverfahren. Acta Technica. **62**, 141 (1968).
2. Michelberger, P.: Basic System for Statically Indeterminate Structures. Proc. 3rd. Conference on Dimensioning. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. p. 501—509.

Prof. Dr. Pál Michelberger, 1450 Budapest, Postfach 93, Ungarn