

# ÜBER DIE MITTRAGENDE BREITE BEI GEGEBENEN RANDSPANNUNGEN IN DEN GURTEN VON KASTENTRÄGERN

Von

Z. DESEŐ

Lehrstuhl für Mechanik, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 7. Januar 1974)

Vorgelegt von Prof. Dr. P. MICHELBERGER

Im Fachschrifttum wurde bis heute die Beziehung zwischen der mittragenden Breite und der Randspannung von Trägergurten nicht geklärt. Die für die Analyse dieser Beziehung bisher benutzten trigonometrischen Reihen erwiesen sich als für die Lösung ungeeignet. Verfasser setzte sich die Analyse der Beziehung zwischen den sich in den Gurten herausbildenden mittragenden Breiten und den Randspannungen zum Ziel. Den bisherigen Lösungen gegenüber wurde anstatt trigonometrischer Reihen ein Polynom benutzt, das für analytische Untersuchungen geeigneter ist.

## Einleitung

In der klassischen Trägertheorie wird die Verzerrung der Querschnittsebene infolge der Querkräfte außer acht gelassen. Diese Vernachlässigung ist bei den Gurten dünnwandiger Bauteile unzulässig. Daher sind für solche Konstruktionen die Bernoulli-Hypothese und die Navier'sche Biegefestigkeit nicht gültig.

Da unsere Untersuchungen nur die durch diese Querkräfte verursachten Formänderungen erfassen sollen, neben denen tatsächlich auch andere Wirkungen zur Geltung kommen, müssen diese bei der Untersuchung beiseite gelassenen anderen Wirkungen angeführt werden.

1. Der Gurtspannungsverlauf wird nicht nur durch Schubdeformationen, sondern auch durch den Umstand beeinflusst, daß die gedrückte Gurtplatte ihre Stabilität verliert, sowie durch die Bauverformungen. Die beiden letzteren Wirkungen, die vor allem im Flugzeug-, Kraftwagen- und Eisenbahnwagenbau eine Rolle spielen, werden hier außer acht gelassen. Bei Schiffsdeck- und Berückenkonstruktionen mit verhältnismäßig stärkeren Platten, hat die letztere Erscheinung nur eine untergeordnete Bedeutung, wie das auch durch Literaturangaben bewiesen wird.

2. Durch die Analyse werden die Wirkungen der Gurtversteifungen in Längs- und Querrichtung nicht erfaßt.

3. Der Träger wird theoretisch als unendlich lang betrachtet, d. h. die Wirkung der Trägerenden bleibt unberücksichtigt.

4. Es wird nicht der Gesamtquerschnitt, sondern nur der Gurt geprüft.

### Die mittragende Breite

Im zu der neutralen Faser parallelen Gurtquerschnitt würde eine konstante Spannung entstehen, wenn durch Schubwirkung keine Formänderung auftreten würde (s. Abb. 1). Demgegenüber entsteht tatsächlich in den Gurten

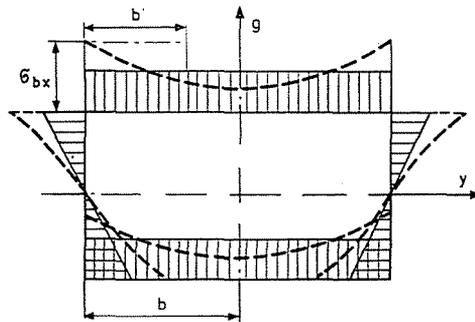


Abb. 1

die mit gestrichelter Linie dargestellte, veränderliche Spannung. Diese Erscheinung wurde von mehreren Forschern behandelt, die alle den Begriff der sog. mittragenden Breite einführten.

$$2 \cdot b' = \frac{\int_{-b}^b \sigma_x \cdot dy}{\sigma_{bx}} = \frac{P}{v \cdot \sigma_{bx}}$$

wo  $2b'$  die mittragende Breite,

$\sigma_{bx}$  die Randspannung,

$P$  die im Gurt anfallende Kraft,

$v$  die Dicke der Gurtplatte

bedeuten.

In der Regel wurde die Ayri'sche Spannungsfunktion angewandt und für diese die Lösung

$$F(x, y) = \Sigma(A_n \cdot \text{ch } k \cdot y + y \cdot B_n \cdot \text{sh } k \cdot y) \cdot \cos k \cdot x \quad (1)$$

ausgearbeitet. Von KÁRMÁN [1], SCHNADEL [2], SCHADE [3], METZER [4], KLÖPPEL [5] und CHWALLA [6]; von WLASSOW [7], [8] wurde eine verhältnismäßig einfache Energiemethode ausgearbeitet, mit deren Hilfe jedoch auch zusammengesetztere Probleme gelöst werden können.

Die Lösung der Ayri-Spannungsfunktion in der Form (1) hat die Schwierigkeit, daß sich die trigonometrische Reihe  $\cos kx$  für die Beschreibung der Gurtrandspannung sehr kompliziert gestaltet.

Daraus ergibt sich die Schwierigkeit bei der Prüfung der nicht leicht übersichtlichen Gestaltung der mittragenden Breite. Von SCHADE wurde zwar beobachtet und darauf hingewiesen [3], daß bei sog. sattelförmigem Randspannungsverlauf (Abb. 2) die mittragende Breite auch negativ sein kann.

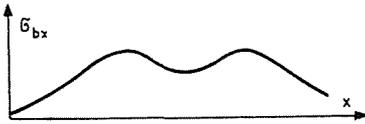


Abb. 2

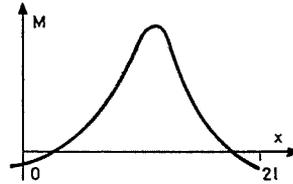


Abb. 3

Von REISSNER [4] wurde bewiesen, daß die mittragende Breite ein beliebig kleiner, jedoch positiver Wert sein kann, mit der notwendigen Bedingung, daß

daß  $\frac{1}{M^2_{\max}} \int_0^{2l} M^2(x) dx$  klein ist. Diese Bedingung wird im Falle

eines Momentenbildes nach Abb. 3 erfüllt. (Von REISSNER wurde nicht die Randspannung, sondern das auf den Träger übertragene Moment als Bedingung angesetzt.)

Die Kurve nach Abb. 2 wird durch eine Funktion der Form

$$M = M_0 + M_2 x^2 - M_4 x^4 \quad (1a)$$

die Kurve nach Abb. 3 mit einer Funktion der Form

$$M = M_0 - M_2 x^2 - M_4 x^4 \quad (1b)$$

beschrieben, aus denen sich die Vermutung ergibt, daß die mittragende Breite von den Gliedern der Momentenfunktion auf gradzahliger Potenz abhängig ist.

### Auflösung der Spannungsfunktion von Ayri mit Hilfe eines Polynoms

Für die Analyse von Kurvenverläufen sind die Polynome viel besser geeignet. Daher liegt es auf der Hand, die Randspannung bzw. den damit verbundenen Momentenverlauf mit einem Polynom zu beschreiben. Dafür scheint es zweckmäßig zu versuchen, auch die Lösung der Spannungsfunktion mit Hilfe eines Polynoms zu beschreiben. Es sei

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot y^k \quad (2)$$

wo

$$a_k = a_k(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_{ki} \cdot x^i \quad (3)$$

Mit (2) lautet die Spannungsfunktion

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sum_{k=2}^n \frac{k!}{(k-2)!} \cdot a_k \cdot y^{k-2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_{k=0}^n \frac{d^2 a_k}{dx^2} \cdot y^k \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} = - \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{da_k}{dx} y^{k-1} \end{aligned} \quad (4)$$

(2) in die Gleichung  $\Delta \Delta F = 0$  eingesetzt, erhält man

$$\sum_{k=0}^n \frac{d^4 a_k}{dx^4} y^k + 2 \sum_{k=2}^n \frac{k!}{(k-2)!} \frac{d^2 a_k}{dx^2} y^{k-2} + \sum_{k=4}^n \frac{k!}{(k-4)!} a_k y^{k-4} = 0 \quad (5)$$

Gl. (5) wird sich dann von  $y$  unabhängig erfüllen, wenn sie für alle  $y$ -Glieder mit den gleichen Exponenten einzeln befriedigt ist.Infolge der Symmetrie des Kastenträgers genügt es lediglich die geradzähligen Exponenten von  $y$  zu berücksichtigen. Hier werden nur die Exponenten  $k = 2, 4, 6, 8$  erfaßt, für die sich folgende Gleichungen ergeben.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 a_0}{dx^4} + \frac{d^2 a_2}{dx^2} + 24 \cdot a_4 &= 0 \\ \frac{d^4 a_2}{dx^4} + 24 \frac{d^2 a_4}{dx^2} + 360 \cdot a_6 &= 0 \\ \frac{d^4 a_4}{dx^4} + 60 \frac{d^2 a_6}{dx^2} + 1680 \cdot a_8 &= 0 \\ \frac{d^4 a_6}{dx^4} + 112 \frac{d^2 a_8}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d^4 a_8}{dx^4} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Aus (6) ist zu erkennen, daß die Polynome  $a_k(x)$  den Aufbau nach (7) haben.

$$\begin{aligned} a_8 &= \alpha_{80} + \alpha_{81}x + \alpha_{82}x^2 + \alpha_{83}x^3 \\ a_6 &= \alpha_{60} + \alpha_{61}x + \alpha_{62}x^2 + \alpha_{63}x^3 + \alpha_{64}x^4 + \alpha_{65}x^5 \\ a_4 &= \sum_{i=0}^7 \alpha_{4i} x^i \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \sum_{i=0}^9 \alpha_{2i} x^i \\
 a_0 &= \sum_{i=0}^{11} \alpha_{0i} x^i
 \end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichungen (7) in (6) eingesetzt, erhält man für  $\alpha_{ki}$  einen Zusammenhang. Als freie Konstanten verbleiben nur die ersten je drei Koeffizienten der Polynome  $a_k$ , mit denen die  $\alpha_{ki}$  Werte ausgedrückt werden können. Nach der Substitution erhält man für die abhängigen Konstanten die Zusammenhänge (8).

$$\begin{aligned}
 \alpha_{64} &= -\frac{28}{3} \cdot \alpha_{82} & \alpha_{65} &= -\frac{28}{5} \cdot \alpha_{83} \\
 \alpha_{44} &= -5 \cdot \alpha_{62} - 70 \cdot \alpha_{80} & \alpha_{45} &= -3 \cdot \alpha_{63} - 14 \cdot \alpha_{81} \\
 \alpha_{46} &= 14 \cdot \alpha_{82} & \alpha_{47} &= 6 \cdot \alpha_{83} \\
 \alpha_{24} &= -2 \cdot \alpha_{42} - 15 \cdot \alpha_{60} & \alpha_{25} &= -\frac{6}{5} \cdot \alpha_{43} - 3 \cdot \alpha_{61} \\
 \alpha_{26} &= 3 \cdot \alpha_{62} + 56 \cdot \alpha_{80} & \alpha_{27} &= \frac{9}{7} \cdot \alpha_{63} + 8 \cdot \alpha_{81} \\
 \alpha_{28} &= -4 \cdot \alpha_{82} & \alpha_{29} &= -\frac{4}{3} \cdot \alpha_{83} \\
 \alpha_{04} &= -\frac{1}{3} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{40} & \alpha_{05} &= -\frac{1}{5} \cdot \alpha_{23} - \frac{1}{5} \cdot \alpha_{41} \\
 \alpha_{06} &= \frac{1}{5} \cdot \alpha_{42} + 2 \cdot \alpha_{60} & \alpha_{07} &= \frac{3}{35} \cdot \alpha_{43} + \frac{2}{7} \cdot \alpha_{61} \\
 \alpha_{08} &= -\frac{1}{7} \cdot \alpha_{62} - 3 \cdot \alpha_{80} & \alpha_{09} &= -\frac{1}{21} \cdot \alpha_{63} - \frac{1}{3} \cdot \alpha_{81} \\
 \alpha_{010} &= \frac{1}{9} \cdot \alpha_{82} & \alpha_{011} &= \frac{1}{33} \cdot \alpha_{83}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Die freien Koeffizienten werden aus den Randbedingungen bestimmt. Zuerst sollen die Spannungsausdrücke (4) entwickelt werden. Dazu werden die Gl. (8) in (7) und die Gl. (7) in (4) eingesetzt. Diese Operation durchgeführt, erhält man:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= (2 \cdot \alpha_{20} + 12 \cdot \alpha_{40} \cdot y^2 + 30 \cdot \alpha_{60} \cdot y^4 + 56 \cdot \alpha_{80} \cdot y^6) \\
 &+ (2 \cdot \alpha_{21} + 12 \cdot \alpha_{41} \cdot y^2 + 30 \cdot \alpha_{61} \cdot y^4 + 56 \cdot \alpha_{81} \cdot y^6) \cdot x \\
 &+ (2 \cdot \alpha_{22} + 12 \cdot \alpha_{42} \cdot y^2 + 30 \cdot \alpha_{62} \cdot y^4 + 56 \cdot \alpha_{82} \cdot y^6) \cdot x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2 \cdot \alpha_{23} + 12 \cdot \alpha_{43} \cdot y^2 + 30 \cdot \alpha_{63} \cdot y^4 + 56 \cdot \alpha_{83} \cdot y^6) \cdot x^3 \\
& - (4 \cdot \alpha_{42} + 30 \cdot \alpha_{60} + 60 \cdot \alpha_{62} \cdot y^2 + 840 \cdot \alpha_{80} \cdot y^2 + 280 \cdot \alpha_{82} \cdot y^4) \cdot x^4 \\
& - \left( \frac{12}{5} \cdot \alpha_{43} + 6 \cdot \alpha_{61} + 36 \cdot \alpha_{63} \cdot y^2 + 168 \cdot \alpha_{81} \cdot y^2 + 168 \cdot \alpha_{83} \cdot y^4 \right) \cdot x^5 \\
& + (6 \cdot \alpha_{62} + 112 \cdot \alpha_{80} + 168 \cdot \alpha_{82} \cdot y^2) \cdot x^6 \\
& + \left( \frac{18}{7} \cdot \alpha_{63} + 16 \cdot \alpha_{81} + 72 \cdot \alpha_{83} \cdot y^2 \right) \cdot x^7 - 8 \cdot \alpha_{82} \cdot x^8 - \frac{8}{3} \cdot \alpha_{83} \cdot x^9
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & 2 \cdot (\alpha_{02} + \alpha_{22} \cdot y^2 + \alpha_{42} \cdot y^4 + \alpha_{62} \cdot y^6 + \alpha_{82} \cdot y^8) \\
& + 6 \cdot (\alpha_{03} + \alpha_{23} \cdot y^2 + \alpha_{43} \cdot y^4 + \alpha_{63} \cdot y^6 + \alpha_{83} \cdot y^8) \cdot x \\
& - (4 \cdot \alpha_{22} + 12 \cdot \alpha_{40} + 24 \cdot \alpha_{42} \cdot y^2 + 180 \cdot \alpha_{60} \cdot y^2 + 60 \cdot \alpha_{62} \cdot y^4 \\
& + 840 \cdot \alpha_{80} \cdot y^4 + 112 \cdot \alpha_{82} \cdot y^6) \cdot x^2 \\
& - (4 \cdot \alpha_{23} + 4 \cdot \alpha_{41} + 24 \cdot \alpha_{43} \cdot y^2 + 60 \cdot \alpha_{61} \cdot y^2 + 60 \cdot \alpha_{63} \cdot y^4 \\
& + 280 \cdot \alpha_{81} \cdot y^4 + 112 \cdot \alpha_{83} \cdot y^6) \cdot x^3 \\
& + (6 \cdot \alpha_{42} + 60 \cdot \alpha_{60} + 90 \cdot \alpha_{62} \cdot y^2 + 1680 \cdot \alpha_{80} \cdot y^2 + 420 \cdot \alpha_{82} \cdot y^4) \cdot x^4 \\
& + \left( \frac{18}{5} \cdot \alpha_{43} + 12 \cdot \alpha_{61} + 54 \cdot \alpha_{63} \cdot y^2 + 336 \cdot \alpha_{81} \cdot y^2 + 252 \cdot \alpha_{83} \cdot y^4 \right) \cdot x^5 \\
& - (8 \cdot \alpha_{62} + 168 \cdot \alpha_{80} + 224 \cdot \alpha_{82} \cdot y^2) \cdot x^6 \\
& - \left( \frac{24}{7} \cdot \alpha_{63} + 24 \cdot \alpha_{81} + 96 \cdot \alpha_{83} \cdot y^2 \right) \cdot x^7 + 10 \cdot \alpha_{82} \cdot x^8 + \frac{10}{3} \cdot \alpha_{83} \cdot x^9
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & - (2 \cdot \alpha_{21} \cdot y + 4 \cdot \alpha_{41} \cdot y^3 + 6 \cdot \alpha_{61} \cdot y^5 + 8 \cdot \alpha_{81} \cdot y^7) \\
& - (4 \cdot \alpha_{22} \cdot y + 8 \cdot \alpha_{42} \cdot y^3 + 12 \cdot \alpha_{62} \cdot y^5 + 16 \cdot \alpha_{82} \cdot y^7) \cdot x \\
& - (6 \cdot \alpha_{23} \cdot y + 12 \cdot \alpha_{43} \cdot y^3 + 18 \cdot \alpha_{63} \cdot y^5 + 24 \cdot \alpha_{83} \cdot y^7) \cdot x^2 \\
& + (16 \cdot \alpha_{42} \cdot y + 120 \cdot \alpha_{60} \cdot y + 80 \cdot \alpha_{62} \cdot y^3 + 1120 \cdot \alpha_{80} \cdot y^3 \\
& \quad + 224 \cdot \alpha_{82} \cdot y^5) \cdot x^3 \\
& + (12 \cdot \alpha_{43} \cdot y + 30 \cdot \alpha_{61} \cdot y + 60 \cdot \alpha_{63} \cdot y^3 + 280 \cdot \alpha_{81} \cdot y^3 + \\
& \quad + 168 \cdot \alpha_{83} \cdot y^5) \cdot x^4 \\
& - (36 \cdot \alpha_{62} \cdot y + 672 \cdot \alpha_{80} \cdot y + 336 \cdot \alpha_{82} \cdot y^3) \cdot x^5 \\
& - (18 \cdot \alpha_{63} \cdot y + 112 \cdot \alpha_{81} \cdot y + 168 \cdot \alpha_{83} \cdot y^3) \cdot x^6 \\
& + 64 \cdot \alpha_{82} \cdot y \cdot x^7 + 24 \cdot \alpha_{83} \cdot y \cdot x^8
\end{aligned} \tag{11}$$



Die für die Befriedigung der Gl. (12) erforderlichen Ausdrücke für  $\sigma_{bx}$ ,  $\sigma_{by}$  erhalten wir indem in (9) und (10)  $y = b$  eingesetzt wird. Die Koeffizienten derselben werden mit den Koeffizienten in (12) verglichen. Dadurch erhält man das für die Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha_{ki}$  notwendige Gleichungssystem, dessen Aufbau in Abb. 5 gezeigt wird.

Aus Abb. 5 ist sogleich zu erkennen, daß  $\alpha_{82} = \alpha_{83} = s_8 = s_9 = 0$  sein müssen und das mit einer dick ausgezogenen Linie eingefasste Gleichungssystem eine eindeutige Lösung haben wird. Für die Randspannung darf also ein Polynom höchstens siebenten Grades angesetzt werden. Das verbleibende Gleichungssystem hat eine Struktur, die es ermöglicht, die Unbekannten eine aus der anderen zu gewinnen, wobei höchstens Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten gelöst werden müssen. Wird das Gleichungssystem aufgelöst, erhält man für die Werte  $\alpha_{ki}$  die Gleichungen (14).

$$\begin{aligned}
 \alpha_{80} &= -\frac{1}{14} \cdot s_6 & \alpha_{81} &= -\frac{1}{2} \cdot s_7 & \alpha_{62} &= \frac{3}{2} \cdot s_6 & \alpha_{63} &= \frac{7}{2} \cdot s_7 \\
 \alpha_{60} &= \frac{1}{10} \cdot s_4 + 2 \cdot b^2 \cdot s_6 & \alpha_{42} &= -s_4 - \frac{45}{2} \cdot b^2 \cdot s_6 \\
 \alpha_{61} &= \frac{1}{2} \cdot s_5 + 14 \cdot b^2 \cdot s_7 & \alpha_{43} &= -\frac{5}{3} \cdot s_5 - \frac{105}{2} \cdot b^2 \cdot s_7 \\
 \alpha_{40} &= -\frac{1}{6} \cdot s_2 - \frac{3}{2} b^2 \cdot s_4 - 25 \cdot b^4 \cdot s_6 \\
 \alpha_{22} &= \frac{1}{2} \cdot s_2 + 6 \cdot b^2 \cdot s_4 + 90 \cdot b^4 \cdot s_6 \\
 \alpha_{41} &= -\frac{1}{2} \cdot s_3 - \frac{15}{2} \cdot b^2 \cdot s_5 - 175 \cdot b^4 \cdot s_7 \\
 \alpha_{23} &= \frac{1}{2} \cdot s_3 + 10 \cdot b^2 \cdot s_5 + \frac{525}{2} \cdot b^4 \cdot s_7 \\
 \alpha_{20} &= \frac{1}{2} \cdot s_0 + b^2 \cdot s_2 + \frac{15}{2} b^4 \cdot s_4 + 122 \cdot b^6 \cdot s_6 \\
 \alpha_{21} &= \frac{1}{2} \cdot s_1 + 3 \cdot b^2 \cdot s_3 + \frac{75}{2} \cdot b^4 \cdot s_5 + 854 \cdot b^6 \cdot s_7 \\
 \alpha_{02} &= -\frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot s_2 - 5 \cdot b^4 \cdot s_4 - 69 \cdot b^6 \cdot s_6 \\
 \alpha_{03} &= -\frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot s_3 - \frac{25}{3} b^4 \cdot s_5 - \frac{413}{2} \cdot b^6 \cdot s_7
 \end{aligned} \tag{14}$$

Mit Hilfe der Gleichungssysteme (9), (10), (11) und (14) können die im Gurt herrschenden Spannungen, die auf Wirkung der Randspannungen den Bedingungen (12) gemäß auftreten, direkt angeschrieben werden.

Es kann von Interesse sein, die Spannungen im Querschnitt  $x = 0$  aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (s_0 + 2 \cdot b^2 \cdot s_2 + 15 \cdot b^4 \cdot s_4 + 244 \cdot b^6 \cdot s_6) \\ &\quad - (2 \cdot s_2 + 18 \cdot b^2 \cdot s_4 + 300 \cdot b^4 \cdot s_6) \cdot y^2 + (3 \cdot s_4 + 60 \cdot b^2 \cdot s_6) \cdot y^4 \\ &\quad - 4 \cdot s_6 \cdot y^6 \\ \sigma_y &= -(b^2 \cdot s_2 + 10 \cdot b^4 \cdot s_4 + 138 \cdot b^6 \cdot s_6) \\ &\quad + (s_2 + 12 \cdot b^2 \cdot s_4 + 180 \cdot b^4 \cdot s_6) \cdot y^2 - (2 \cdot s_4 + 45 \cdot b^2 \cdot s_6) \cdot y^4 \\ &\quad + 3 \cdot s_6 \cdot y^6 \\ \tau_{xy} &= -(s_1 + 6 \cdot b^2 \cdot s_3 + 75 \cdot b^4 \cdot s_5 + 1708 \cdot b^6 \cdot s_7) \cdot y \\ &\quad + (2 \cdot s_3 + 30 \cdot b^2 \cdot s_5 + 700 \cdot b^4 \cdot s_7) \cdot y^3 \\ &\quad - (3 \cdot s_5 + 84 \cdot b^2 \cdot s_7) \cdot y^5 + 4 \cdot s_7 \cdot y^7\end{aligned}\tag{15}$$

Die bisherigen Ergebnisse sind davon unabhängig, wo wir den Punkt  $x = 0$  annehmen. Damit kann sich (15) auf einen beliebigen Querschnitt  $x = x_0$  beziehen, nur der Wert  $s_i$  ist auch auf  $x_0$  zu beziehen. Es sei also  $\sigma_{bx}$  in der Umgebung von  $x = x_0$ :

$$\sigma_{bx} \cong S_{x_0}(x) = s_0 + s_1 \cdot x + s_2 x^2 + \dots s_7 \cdot x^7 \tag{16}$$

( $S_{x_0}(x)$  ist das zu dem Punkt  $x = x_0$  gehörende Taylor-Polynom von  $\sigma_{bx}$ .) Mit Hilfe von (15) und (16) werden über den Zusammenhang zwischen den in einem beliebigen Schnitt  $x = x_0$  auftretenden Spannungen und dem zu  $x = x_0$  gehörenden Taylor-Polynom der Randspannung folgende Feststellungen gemacht:

1. Der Verlauf von  $\sigma_x$  ist nur von den geradzahigen Potenzen von  $\sigma_{bx}$  abhängig. Siehe die Feststellungen (1a) und (1b) in Verbindung mit den Abbildungen 2 und 3

2. Der Verlauf von  $\sigma_y$  ist nur von den geradzahigen Potenzen von  $\sigma_{bx}$ , jedoch nicht von dessen zu  $x = x_0$  gehörigem Wert  $-s_0-$  abhängig.

3. Der Verlauf von  $\tau_{xy}$  ist nur von den ungeradzahigen Potenzen von  $\sigma_{bx}$  abhängig.

### Die mittragende Breite

Die mittragende Breite erhält man aus dem Zusammenhang

$$b' = \frac{\int_0^b \sigma_x dy}{\sigma_{bx}}$$

Es ist zweckmäßig, die relative mitttragende Breite  $\lambda = b'/b$  einzuführen.

$$\lambda = \frac{\int_0^b \sigma_x \cdot dy}{b \cdot \sigma_{bx}} = \frac{2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 \cdot b^2 + 6 \cdot a_6 \cdot b^4 + 8 \cdot a_8 \cdot b^6}{2 \cdot a_2 + 12 \cdot a_4 \cdot b^2 + 30 \cdot a_6 \cdot b^4 + 56 \cdot a_8 \cdot b^6} \quad (17)$$

Nach Transformation der Gl. (17) erhält man

$$\lambda = \frac{2 \cdot a_2 + 12 \cdot a_4 \cdot b^2 + 30 \cdot a_6 \cdot b^4 + 56 \cdot a_8 \cdot b^6 - 8 \cdot a_4 \cdot b^2 - 24 \cdot a_6 \cdot b^4 - 48 \cdot a_8 \cdot b^6}{2 \cdot a_2 + 12 \cdot a_4 \cdot b^2 + 30 \cdot a_6 \cdot b^4 + 56 \cdot a_8 \cdot b^6}$$

bzw.

$$\lambda = 1 - 8b^2 \cdot \frac{a_4}{\sigma_{bx}} - 24 \cdot b^4 \cdot \frac{a_6}{\sigma_{bx}} - 48 \cdot b^6 \cdot \frac{a_8}{\sigma_{bx}} \quad (18)$$

Schreiben wir auch den Wert  $\lambda$  für die Stelle  $x = 0$  an.

$$\lambda_0 = 1 + \frac{4}{3} \cdot b^2 \cdot \frac{s_2}{s_0} + \frac{48}{5} \cdot b^4 \cdot \frac{s_4}{s_0} + \frac{1088}{7} \cdot b^6 \cdot \frac{s_6}{s_0} \quad (19)$$

Aus Gl. (19) ist die Erklärung des zum in den Abbildungen 1 und 2 gezeigten  $\sigma_{bx}$  Verlauf gehörenden  $\lambda$ -Wertes sogleich klar, und die Setzungen in Gl. (1a) und (1b) bestätigen sich. Aus Gl. (19) läßt sich über den Zusammenhang zwischen  $\lambda$  und dem Taylor-Polynom von  $\sigma_{bx}$  die Feststellung machen:

1. Die Abweichung von  $\lambda$  von der Einheit ist von dem Verhältnis der Koeffizienten auf geradzahligem Potenzen von  $\sigma_{bx}$  zu dessen  $x = x_0$  gehörigem  $s_0$ -Wert abhängig.

Aus Gl. (19) ist zu erkennen, daß für  $\lambda < 0$  die sattelförmige Randspannungsfunktion nicht notwendig ist, solche Werte können auch bei einem Randspannungsverlauf nach Abb. 3 vorkommen. Von SCHADE [3] wurde deshalb nur bei sattelförmigem Randspannungsverlauf eine negative mitttragende Breite gefunden, weil er sich einer trigonometrischen Reihe bediente, aus der sich nur in dieser Weise eine Randspannung zusammensetzen läßt, bei der sich  $\lambda < 0$  ergibt. Auch die Funktion

$$\sigma_{bx} = s_0 + s_2 \cdot x^2 - s_4 \cdot x^4$$

ergibt einen sattelförmigen Verlauf für  $\sigma_{bx}$ ; werden die Koeffizienten dieser Funktion in Gl. (19) eingesetzt, ist es klar, daß bei beliebigen Werten  $s_2, s_4$   $\lambda > 0$ .

SCHNADEL betont [2], daß falls  $\sigma_{bx}$  eine einzige Kosinusfunktion darstellt:

$$\sigma_{bx} = s_0 \cdot \cos kx$$

$\lambda$  eine von  $x$  unabhängige Konstante ist. Stellen wir die Potenzreihe für  $\cos kx$  dar. Für die Koeffizienten  $s_i$  erhält man die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 s_0 &= 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2 \cdot l} x_0 \\
 s_2 &= - \frac{\pi^2}{2(2 \cdot l)^2} \cos \frac{\pi}{2 \cdot l} x_0 \\
 s_4 &= \frac{4}{4!(2 \cdot l)^4} \cos \frac{\pi}{2 \cdot l} x_0 \\
 s_6 &= - \frac{6}{6!(2 \cdot l)^6} \cos \frac{\pi}{2 \cdot l} x_0
 \end{aligned} \tag{20}$$

Aus (20) ist festzustellen, daß die Werte  $s_2/s_0$ ,  $s_4/s_0$ ,  $s_6/s_0$  von der Stelle der  $x_0$ -Reihenentwicklung unabhängig sind. In diesem Falle liefert selbstverständlich auch Gl. (19) einen von  $x$  unabhängigen konstanten Wert. Setzen wir  $b = 1$ ,  $l = 2$ . Aus  $\sigma_{bx} = s_0 \cdot \cos kx$  erhält man für diese Werte  $\lambda = 0,702$ . Die nacheinander folgenden Näherungen sind aus Gl. (19):

$$\begin{aligned}
 \lambda_0(x_0) &= 1 \\
 \lambda_2(x_0) &= 0,589 \\
 \lambda_4(x_0) &= 0,743 \\
 \lambda_6(x_0) &= 0,693
 \end{aligned}$$

Auch die Annäherung von  $\cos kx$  mit einem Polynom vierten Grades liefert ein sehr befriedigendes Ergebnis.

Zur Veranschaulichung wurden einige charakteristische Fälle untersucht. Es seien die Abmessungen des untersuchten Gurts  $l = 2$ ,  $b = 1$  mit der Randspannung

$$\sigma_{bx}(x) = 1 + s_2 x^2 + s_4 x^4 \tag{21}$$

Durch Gl. (21) sollen die Bedingungen  $x = \pm 1$ ,  $\sigma_{bx} = 0$  erfüllt werden. Aus diesen Bedingungen sowie den Werten von  $b$  und  $l$  erhält man zwischen  $s_2$  und  $s_4$  die Beziehung

$$s_4 = - \frac{1}{16} \left( \frac{1}{16} + s_2 \right) \tag{22}$$

In (19) eingesetzt ergibt sich

$$\lambda(0) = \frac{1}{15} (14,5 + 11 \cdot s_2) \tag{23}$$

Zwischen  $\lambda(0)$  und  $s_2$  besteht eine lineare Beziehung. Drücken wir aus Gl. (23)  $s_2$  aus:

$$s_2 = \frac{15 \cdot \lambda(0) - 14,5}{11} \tag{24}$$

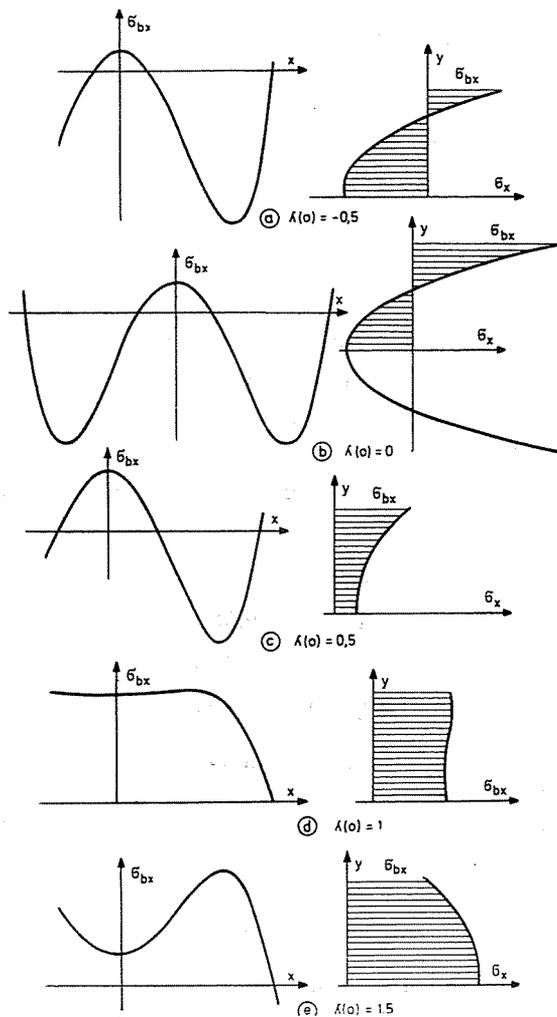


Abb. 6

Für die Werte (0) setzen wir

$$\lambda(0) = -0,5, 0, 0,5, 1, 1,5$$

Die zu diesen  $\lambda(0)$  Werten gehörigen  $\sigma_{bx}$  und  $\sigma_{x(x=0)}$ -Funktionen sind in der Abbildungsreihe 6 dargestellt.

### Zusammenfassung

Es ist ziemlich arbeitsaufwendig, eine beliebige Randspannung mit Hilfe einer trigonometrischen Reihe zu beschreiben, und die Analyse des Ergebnisses ist umständlich. Wird jedoch die Randspannung mit einem Polynom, u. U. auf einer gegebenen Länge abschnittsweise durch Polynome angenähert, können — in Kenntnis der vorigen Ausführungen — die Spannungen und mittragenden Breiten auf elementarem Wege leicht aufgeschrieben werden.

**Literatur**

1. KÁRMÁN, Th.: Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik. 114. Springer Verlag, Berlin, 1924.
2. SCHNADEL, G.: Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft. 27 207 1926
3. SCHADE, H. A.: Schiff u. Hafen 1 2 1965
4. METZER, W.: Luftfahrtforschung 4 1 1929
5. KLÖPPEL, K.—THIELE, F.: Der Stahlbau 35 152 1966
6. CHWALLA, E.: Der Stahlbau 9 73 1936
7. WLIASSOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag, Berlin 1958
8. WLIASSOW, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. VEB Verlag für Bauwesen. Berlin, 1964.

Zoltán DESEŐ, 1450 Budapest, Postfach 93, Ungarn