

# ÜBER DIE BEI DER REINEN BIEGUNG DER GERADEN UND DER EBENEN GEKRÜMMTEN STÄBE SICH ZEIGENDEN ÄHNLICHKEITEN

Von

B. SÁLYI

Lehrstuhl für Mechanik, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 30. Mai 1974)

Vorgelegt von Prof. Dr. P. MICHELBERGER

Bei der Biegung ebener gekrümmter Stäbe werden die Festigkeitsverhältnisse in der elementaren Festigkeitslehre im allgemeinen in Verbindung mit der annähernden Berechnungsmethode von Grashof dargelegt. Bei dem am einfachsten ausgebildeten ebenen gekrümmten Stab ist

— die Mittellinie des Stabs ein Kreisbogen mit einem Radius von  $R_S$  (Abb. 1);

— die senkrecht zur Mittellinie (und zu deren Ebene) stehende Ebene des Querschnittes geht durch den Mittelpunkt 0 des Kreises und durch die Achse  $X$ ;

— der Querschnitt des Stabes ist konstant;

— eine der Schwerpunkts-Trägheitshauptachsen des Querschnittes liegt in der Ebene der Mittellinie.

Die einfachste Beanspruchung eines solchen ebenen gekrümmten Stabes kann mit den an den zwei Endquerschnitten angreifenden Biegekräftepaaren von Momenten  $\vec{M}$  und  $-\vec{M}$  hergestellt werden (Abb. 1).

Das Annäherungsverfahren von Grashof sucht eine Lösung, die im Falle des Grenzüberganges

$$R_S \rightarrow \infty$$

in die sich auf die reine, parallele Biegung des prismatischen geraden Stabes beziehende Navier-Formel übergeht.

Das Annäherungsverfahren setzt voraus, daß

— die Querschnitte Ebene bleiben;

— sich die Abmessungen der Querschnitte nicht ändern, (diese Annahme kann folgendermassen ausgedrückt werden:  $m = \infty$ );

— sich die Mittellinie im unbelasteten Zustand vom Radius  $R_S$  in ihrer eigenen Ebene zu einem Kreisbogen vom Radius  $r_S$  biegt.

— sich der in unbelastetem Zustand durch die zwei Endquerschnitte gebildete Winkel  $\varphi$  infolge der Belastung verändert. Der veränderte Winkel:  $\psi$  (Abb. 2);

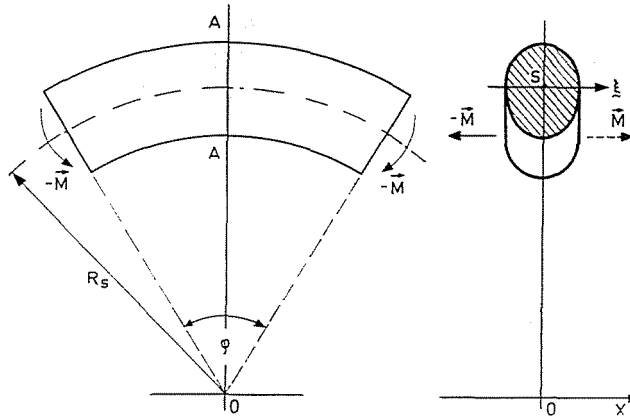


Abb. 1. Schnitt A—A

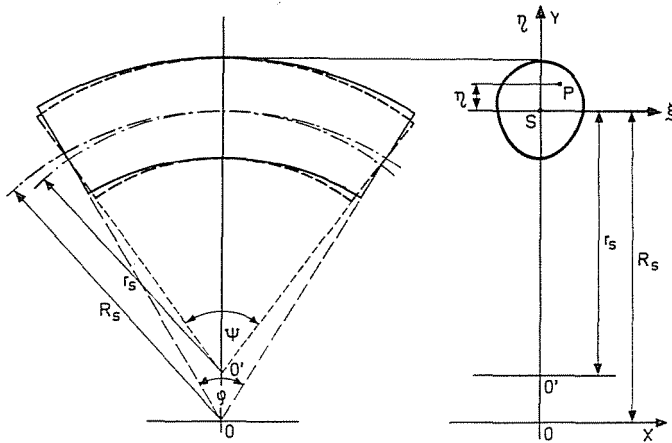


Abb. 2

— an der Ebene des Querschnittes nur  $\sigma$ -Spannungen auftreten; wenn die spezifische Dehnung des im Punkt  $P$  durchgehenden Kreisbogens von einem Radius  $R_S + \eta$  beträgt, so

$$\sigma(\eta) = E\varepsilon(\eta).$$

Die Berechnung nach Grashof führt zur folgenden Formel

$$\sigma(\eta) = \frac{M}{AR_S} + \frac{M}{I_{r,\xi}} \frac{R_S \eta}{R_S + \eta}, \quad (1)$$

wo

$$I_{r,\xi} = \int_A \eta^2 \frac{R_S}{R_S + \eta} dA \quad (2)$$

das für die Achse  $\xi$  berechnete *reduzierte* (Trägheits) Moment zweiter Ordnung.

Vorliegende Arbeit wünscht das Problem der reinen Biegung der ebenen gekrümmten Stäbe mit einem von der üblichen Gedankenfolge abweichenden (aber mit diesem äquivalenten) Gedankengang zu präsentieren. Sie bestrebt die ähnlichen Züge der Biegung der ebenen gekrümmten und geraden Stäbe von konstanten Querschnitten hervorzuheben.

Im Falle von einem geraden Stab ist in jedem Punkt der Schwerpunktsachse  $\xi$  des Querschnittes  $\sigma = 0$ . Die Achse  $\xi$  kann daher *Zeroachse* genannt werden. Es ist üblich zu sagen, daß die die Achse  $\xi$  des geraden Stabes schneidenden, geradlinigen Fasern neutrale Fasern sind (Abb. 3).

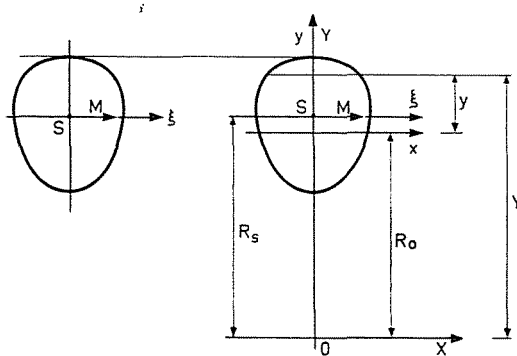


Abb. 3. Gerader Stab. Ebener gekrümmter Stab

Es versteht sich von selbst, daß die Querschnitte des ebenen gekrümmten Stabes — nach Grashof berechnet — auch eine Zeroachse haben. (in der Abb. 3 die  $x$ -Achse). Die kreisbogenförmigen Fasern des ebenen gekrümmten Stabes mit einem Radius von  $R_0$  sind die neutralen Fasern. Diese biegen sich — in ihrer eigenen Ebene — unter dem Einfluß der Belastung zu Kreisbogen mit einem Radius von  $r_0$ . In beiden Fällen ist es charakteristisch für die neutralen Fasern (für die Zeroachsen), daß

$$\sigma = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

d. h. daß die Länge dieser Fasern vor und nach der Belastung gleichermaßen

$$l_0 = R_0\varphi = r_0\psi$$

d. h.

$$\psi = \frac{R_0}{r_0}\varphi$$

Die Dehnung der von dem Koordinatenausgangspunkt  $O$  in einem Abstand von  $R = Y = R_0 + y$  befindlichen Faser, die in unbelastetem Zustand eine Länge von  $l = Y\varphi$  hat, beträgt daher wie folgt:

$$\lambda = (r_0 + y)\psi - (R_0 + y)\varphi = \left(\frac{R_0}{r_0} - 1\right)y\varphi = \frac{R_0 - r_0}{r_0}y\varphi$$

und die spezifische Dehnung — dem Hookschen Gesetz folgend —

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda}{Y\varphi} = \frac{R_0 - r_0}{r_0} \frac{y}{Y} = \frac{\sigma}{E}.$$

Daraus

$$\sigma = E \frac{R_0 - r_0}{r_0} \frac{y}{Y}. \quad (Y = R_0 + y)$$

Obwohl die Werte von  $R_0$  und  $r_0$  vorübergehend unbekannt sind, zeigt sich der hyperbolische Charakter der Spannungsverteilung klar. Eine der

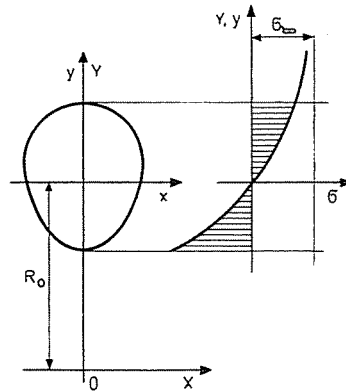


Abb. 4

Tangenten der Hyperbel ist die zur  $Y$ -Achse parallel laufende Gerade  $\sigma = \sigma_\infty$  (Abb. 4), für welche

$$\sigma_\infty = \lim_{y, Y \rightarrow \infty} \sigma = E \frac{R_0 - r_0}{r_0} \quad (3)$$

charakteristisch ist. Mit dieser Bezeichnung kann die Spannung in der folgenden Form

$$\sigma = \sigma_\infty \frac{y}{Y} \quad (4)$$

geschrieben werden.

Die Werte von  $R_0$  und  $r_0$  bzw.  $\sigma_\infty$  lassen sich aus den Ausdrücken des resultierenden Doppelvektors des auf dem Querschnitt verteilten Kräfte-systems, d. h. aus den Momenten der resultierenden Kraft  $F_R = 0$ , und des resultierenden Kräftepaars  $M_R = M$  berechnen.

$$F_R = \int_A \sigma dA = \sigma_\infty \int_A \frac{y}{Y} dA = 0,$$

d. h. — unter Anwendung der Gleichheit  $y = Y - R_0 -$

$$\int_A \frac{y}{Y} dA = \int_A \frac{Y - R_0}{Y} dA = A - R_0 \int_A \frac{dA}{Y} = 0. \quad (5)$$

Daraus

$$R_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{Y}}. \quad (6)$$

$r_0$  kann aus der Momentengleichung berechnet werden. Das Moment des sich verteilenden Kräftesystems ist  $M$  für die beliebigen in der Ebene des Querschnittes und parallel zur  $x$ -Achse liegenden Achsen. Für die  $X$ -Achse z. B. beträgt das Moment

$$M = \int_A Y \sigma dA = \sigma_\infty \int_A y dA = \sigma_\infty y_S A;$$

aus der Gleichung

$$\sigma_\infty = E \frac{R_0 - r_0}{r_0} = \frac{M}{y_S A} \quad (7)$$

läßt sich  $r_0$  berechnen.

Wird das Moment für die  $x$ -Achse aufgeschrieben, so kommt man zur folgenden Gleichheit

$$M = \int_A y \sigma dA = \sigma_\infty \int_A \frac{y^2}{Y} dA = \frac{\sigma_\infty}{R_0} \int_A y^2 \frac{R_0}{Y} dA = \frac{\sigma_\infty}{R_0} I_{m,x}$$

wo die Deutung des modifizierten Moment zweiter Ordnung

$$\int_A y^2 \frac{R_0}{Y} dA = I_{m,x} \quad (8)$$

ähnlich der in (2) gegebenen Deutung des reduzierten Moments zweiter Ordnung ist. Daraus hat man

$$\sigma_\infty = \frac{M}{I_{m,x}} R_0, \quad (9)$$

während sich aus den zwei Ausdrücken für  $\sigma_\infty$  die folgende Formel ergibt

$$I_{m,x} = R_0 y_S A = R_0 (R_S - R_0) A. \quad (10)$$

Schließlich erhält man für die Spannung unter Anwendung von (7) bzw. (9)

$$\sigma = \frac{M}{A y_S} \frac{y}{Y} = \frac{M}{I_{m,x}} R_0 \frac{y}{Y}. \quad (11)$$

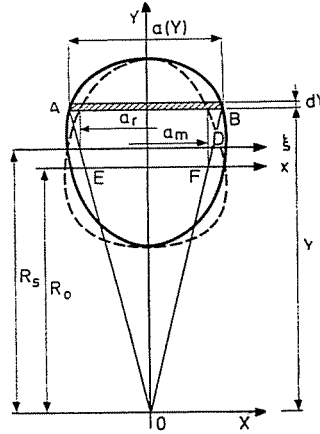


Abb. 5

Das reduzierte Moment zweiter Ordnung läßt sich als das Moment zweiter Ordnung des sogenannten reduzierten Querschnitts deuten. Abb. 5 vor Auge haltend kann aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ABO und CDO geschrieben werden,

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{a_r}{a} = \frac{R_s}{Y},$$

d. h.

$$a_r = \frac{R_s}{Y} a$$

und

$$\frac{R_s}{Y} dA = \frac{R_s}{Y} a dY = a_r dY = dA_r,$$

folglich

$$I_{r,\xi} = \int_A \eta^2 \frac{R_s}{Y} dA = \int_A \eta^2 dA_r. \quad (12)$$

Die in der Abb. 5 auf der linken Seite der Y-Achse gestrichelt gezeichnete Kurve stellt den der obenerwähnten Deutung entsprechenden reduzierten Querschnitt dar.

Gleicherweise aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ABO und EFO ergibt sich

$$a_m = \frac{R_o}{Y} a$$

und

$$\frac{R_0}{Y} dA = \frac{R_0}{Y} a dY = a_m dY = dA_m$$

Folglich

$$I_{m,x} = \int_A y^2 \frac{R_0}{Y} dA = \int_A y^2 dA_m. \quad (13)$$

Auf der rechten Seite der  $Y$ -Achse stellt eine gestrichelte Linie den auf diese Weise gedeutenden modifizierten Querschnitt dar.

Die zwei auf verschiedene Weise hergestellten verzerrten Querschnitte sind proportional zueinander, da

$$a_r = \frac{R_S}{Y} a = \frac{R_S}{R_0} \frac{R_0}{Y} a = \frac{R_S}{R_0} a_m.$$

Es scheint jedoch, daß die zur  $X$ -Achse (zur neutralen Faser) gebundene — im vorigen Modifizierung genannte — Umgestaltung aus dem Gesichtspunkt der allgemeinen Behandlung bestimmte Vorteile besitzt. Auf Grund der Gleichung (5) kann nämlich einerseits geschrieben werden, daß

$$R_0 \int_A \frac{dA}{Y} = \int_A \frac{R_0}{Y} dA = \int_A dA_m = A_m = A, \quad (14)$$

d. h. die modifizierte Querschnittsoberfläche stimmt mit der originellen überein, andererseits gilt (mit der Konstante  $R_0$  multiplizierend)

$$\int_A y \frac{R_0}{Y} dA = \int_A y dA_m = 0. \quad (15)$$

Demnach ist die neutrale  $x$ -Achse die Schwerpunktschwerachse des modifizierten Querschnitts, analog wie bei den geraden Stäben.

Es kann nachgewiesen werden, daß sich der Abstand  $R_S - R_0 = y_S$  über alle Grenzen hinaus vermindert — die  $x$ -Achse nähert über alle Grenzen der Schwerpunktschwerachse des originellen Querschnitts — wenn der Wert  $R_S$  über alle Grenzen wächst, d. h. der Stab »gerade« wird.

$Y$  soll mit Hilfe des fixen Punktes  $\Omega$  und des veränderlichen Abstands  $k$  als die Summe (Abb. 6)

$$Y = v + k$$

gedeutet werden, den Wert des Krümmungsradius wähle man so, daß

$$|v_{\max}| < k$$

d. h.

$$\frac{|v_{\max}|}{k} < 1$$

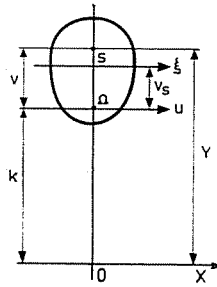


Abb. 6

sei und den Reziprokwert von  $Y$  schreibe man eine unendliche Reihe entwickelnd

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{v+k} = \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{v}{k} + \left(\frac{v}{k}\right)^2 - \left(\frac{v}{k}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{v}{k}\right)^i.$$

Damit gilt für

$$R_S = v_S + k$$

und

$$\begin{aligned} \int_A \frac{dA}{Y} &= \frac{1}{k} \left( A - \frac{v_S}{k} A + \frac{\int_A v^2 dA}{k^2} - \frac{\int_A v^3 dA}{k^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{A}{k} \left( 1 - \frac{v_S}{k} + \frac{c_2}{k^2} - \frac{c_3}{k^3} + \dots \right) = \frac{A}{k} \left[ 1 - \frac{v_S}{k} + f(k) \right], \end{aligned}$$

wenn die folgenden Bezeichnungen

$$c_i = \frac{1}{A} \int_A v^i dA$$

und

$$f(k) = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{c_i}{k^i}$$

angewandt werden. Somit

$$\begin{aligned} y_S = R_S - \frac{A}{\int_A \frac{dA}{Y}} &= \frac{\left(\frac{v_S}{k} + 1\right) \left[ 1 - \frac{v_S}{k} + f(k) \right] - 1}{\frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{v_S}{k} + f(k) \right]} = \\ &= \frac{v_S f(k) + f(k)k - \frac{v_S^2}{k}}{1 - \frac{v_S}{k} + f(k)}. \end{aligned}$$



Den Wert von  $k$  über alle Grenzen erhöhend, nähert der Zähler über alle Grenzen dem Zero zu, d. h. daß wirklich

$$\lim_{R_S \rightarrow \infty} y_S = 0. \tag{16}$$

Daraus können die Grenzwerte

$$\lim_{R_S \rightarrow \infty} I_{m,x} = I_\xi \tag{17}$$

und

$$\lim_{R_S \rightarrow \infty} \sigma = \lim_{R_S \rightarrow \infty} \frac{M}{I_{m,x}} R_0 \frac{y}{Y} = \frac{M}{I_\xi} \eta \tag{18}$$

bewiesen werden. Damit kann die parallele Biegung des geraden Stabes als ein Grenzfall der parallelen Biegung des ebenen gekrümmten Stabes behandelt werden.

Der Vollständigkeit halber bietet sich hier die Bemerkung, daß die Identität der in den Gleichungen (1) und (11) geschriebenen Ausdrücke der Spannung, aufgrund der Substitution der

$$R_S = R_0 + y_S, \quad \eta = y - y_S$$

Gleichheiten, weiterhin der unter Berücksichtigung von diesen aus (2) folgenden Beziehung

$$I_{r,\xi} = \frac{R_S^2}{R_0^2} I_{m,x}$$

in (1) einfacherweise nachweisbar ist.

Schließlich ist noch interessant zu erwähnen, daß der Wert von  $I_{m,x}$ , im Falle von einem Kreisquerschnitt unabhängig vom Maß der Krümmung ist und mit dem Wert von  $I_\xi$  übereinstimmt, d. h.

$$I_{m,x} = \frac{d^4 \pi}{64} = I_\xi,$$

wo  $d$  der Durchmesser des Querschnittes ist. Der Wert  $R_0$  kann mit den Ordinaten

$$Y_1 = R_S - \frac{d}{2}, \quad Y_2 = R_S + \frac{d}{2}$$

der zum Krümmungszentrum des Querschnittes nächstliegenden bzw. davon am fernsten liegenden Punkte einfach ausgedrückt werden und ist mit der Hälfte der Summe der arithmetischen und geometrischen Mittelwerte

$$R_0 = \frac{0,5 (Y_1 + Y_2) + \sqrt{Y_1 Y_2}}{2}$$

gleich.

### Zusammenfassung

Der Fall der reinen Biegung der ebenen gekrümmten Stäbe wird mit einer der Annäherungsberechnung von Grashof äquivalenten, aber von deren Gedankengang abweichenden Methode untersucht. Die von dem Üblichen abweichende Erörterung wird durch das Bemühen gerechtfertigt, die ähnlichen Züge der Biegung der geraden und der ebenen gekrümmten Stäbe markanter zu zeigen.

Dr. Béla SÁLYI, 1450 Budapest, Postfach 93, Ungarn