

BERECHNUNG DER QUERSCHWINGUNGEN VON SCHIENENFAHRZEUGEN

Von

A. SIMONYI

Lehrstuhl für Schienenfahrzeuge, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 28. August 1971)

Vorgelegt von Prof. Dr. K. HORVÁTH

1. Einleitung

Die erhöhten Geschwindigkeiten im Eisenbahnverkehr erfordern die Lösung einer Reihe technischer Probleme. Ein Teil derselben betrifft die Untersuchungen, die dazu bestimmt sind, das Schwingungsverhalten des mit hoher Geschwindigkeit fahrenden Schienenfahrzeugs zu klären. Die Bewegungen der einzelnen Baugruppen (Wagenkasten, Drehgestellrahmen, Wiege, Radsatz usw.) beim Lauf lassen sich in Kenntnis des Fahrzeugs als Schwingungssystem mit einer endlichen Vielzahl der Freiheitsgrade und der Erregung dieses Systems bestimmen. Die Erregung des Fahrzeugs rührt von den Gleisunebenheiten her; da diese aber sowohl hinsichtlich der Amplitude wie auch der Wellenlänge zufallsbestimmt sind, scheint es zweckmäßig, die Erregung als stochastische Funktion der Zeit zu berücksichtigen.

2. Bezeichnungen

$a(t)$	Beschleunigungsfunktion
c, d	Sehnenlänge
f	Frequenz
f_k	Mittelfrequenz des Bandfilters
Δf_k	Bandbreite des Bandfilters
n	Häufigkeit
t	Zeit
x	Bewegung in Fahrtrichtung des Fahrzeugs
y	Querbewegung des Fahrzeugs
$w(t)$	Gewichtsfunktion des Fahrzeugs als Linearsystem
$W(j\omega)$	Übertragungscharakteristik des Fahrzeugs als Linearsystem
$\Phi_{yy}(j\omega)$	Leistungsspektrum der Wagenkasten-Querschwingungen
$\Phi_{\xi\xi}(j\omega)$	Leistungsspektrum der Erregung
$\Phi_{\zeta\zeta}(j\omega)$	Leistungsspektrum der Sehnenhöhe
$\varphi(j\omega)$	Phasencharakteristik des Sehnenhöhe-Meßgeräts
$\Gamma(j\omega)$	Übertragungscharakteristik des Sehnenhöhe-Meßgeräts
$H(\omega)$	Amplitudencharakteristik des Invertiersystems
$K(\omega)$	Amplitudencharakteristik des Sehnenhöhe-Meßgeräts
$Z(j\omega)$	Fouriertransformierte des Signals $\zeta(t)$
$\Xi(j\omega)$	Fouriertransformierte des Signals $\xi(t)$
λ	Wellenlänge der Schienenunebenheit
ω	Kreisfrequenz
$\zeta(t)$	Sehnenhöhenfunktion
$\xi(t)$	Erregungsfunktion

3. Berechnung der Querbewegungen des Wagenkastens

Wird das Fahrzeug als lineares, invariantes System betrachtet, das in Querrichtung durch die aus Schienenrichtungsfehlern herrührenden, mit der Funktion $\xi(t)$ beschriebenen Gleisachsenunebenheiten erregt wird (Abb. 1), läßt sich die Querbewegung $y(t)$ des Wagenkastens aus der Beziehung

$$y(t) = w(t) * \xi(t) \quad (1)$$

bestimmen, die Querbewegung des Fahrzeugs wird also als Konvolution der Gewichtsfunktion $w(t)$ und der Erregung $\xi(t)$ angeschrieben. Nach den bisherigen Messungen darf die Erregungsfunktion $\xi(t)$ als stationär stochastisch aufgefaßt werden, daher ist für ihre Kennzeichnung die Autokorrelationsfunktion bzw. die Fouriertransformierte (das Leistungsspektrum) dieser Funktion am besten geeignet.

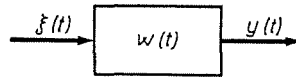


Abb. 1

Das Leistungsspektrum der Querverschiebung des Wagenkastens wird aus der folgenden Beziehung ermittelt:

$$\Phi_{yy}(j\omega) = W(j\omega)W(-j\omega) \quad \Phi_{\xi\xi}(j\omega), \quad (2)$$

da

$$W(j\omega) = W(-j\omega) = |W(j\omega)|^2,$$

gilt

$$\Phi_{yy}(j\omega) = |W(j\omega)|^2 \Phi_{\xi\xi}(j\omega). \quad (3)$$

4. Verschiedene Verfahren zur Messung der Gleisunebenheiten

Um das Leistungsspektrum der Erregung zu bestimmen, müssen die Gleisachsenunebenheiten infolge der Schienenrichtungsfehler in der Horizontalebene bekannt sein.

Die Richtungsfehler der beiden Schienenstränge sind scheinbar unabhängig voneinander, daher entstehen durch diese Maßabweichungen nicht nur in der Gleisachse sondern auch in der Spurweite. Die durchgeführten Messungen (1) zeigen jedoch, daß man die Spurweitenänderung den Richtungsfehlern der Gleisachse gegenüber vernachlässigen darf, damit läßt sich die Erregung des Fahrzeugs mit der Funktion $\xi(t)$, die die Richtungsfehler des beliebigen Schienenstranges enthält, kennzeichnen.

Bei dem gegenwärtigen Stand der Meßtechnik können wir die Richtungsfehler direkt nicht messen; unter den obwaltenden Umständen ist nur eine indirekte Ermittlung möglich.

Nach einer der indirekten Verfahren zur Bestimmung der Richtungsfehler ist die durch die Gleisunebenheiten erzeugte Beschleunigung meßbar (Abb. 2); aus den Richtungsfehlern ergeben sich nämlich — selbst bei den realisierbaren Geschwindigkeiten — Verschiebungen mit so niedrigen Frequenzbereichen, daß deren Messung mit der erforderlichen Genauigkeit unmöglich ist.

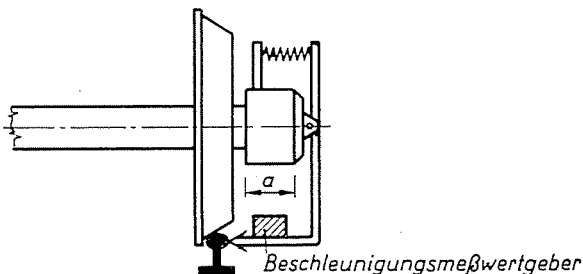


Abb. 2

In Kenntnis der gemessenen Funktion $\ddot{\xi}(t) = a(t)$ läßt sich also $\xi(t)$ durch Doppelintegration bestimmen, also gilt

$$\xi(t) = \iint a(t) dt dt.$$

Unter Berücksichtigung des Umstands, daß auch die gemessene Funktion $a(t)$ stochastisch zeitabhängig ist, stößt die Doppelintegration auf Schwierigkeiten, die daraus herrühren, daß sich bei der Doppelintegration der Funktion $a(t)$ — da die Anfangsbedingungen unbekannt sind — doppelt unendlich viele $y(t)$ -Funktionen ergeben. Wird angenommen, daß die Funktion $a(t)$ einen stationär stochastischen Prozeß mit dem Mittelwert Null darstellt, so kann $y(t)$ mit Hilfe eines Analogrechners mit gewisser Genauigkeit ermittelt werden.

Eine andere Art der indirekten Messung des Richtungsfehlers erfolgt vom Oberbaumeßwagen aus, indem sich die beiden äußeren Meßwertgeber des auf dem Wagen angeordneten Meßbalkens gegebener Länge die Schienenleitkante entlang bewegen, wobei der Meßkopf auf dem Meßbalken den Abstand zwischen Sehne und Schienenleitkante, die Sehnenhöhe mißt. Abb. 3 zeigt die beiden üblichsten Methoden zur Sehnenhöhenmessung.

5. Beziehung zwischen Sehnenhöhe und Gleisunebenheit

Einer der allgemeinsten Fälle der Sehnenhöhenmessung ist in Abb. 3b zu sehen. Hier ermöglicht die mechanische Konstruktion des Meßgeräts, mit dem Schreiber den mathematischen Mittelwert zu registrieren, also

$$\zeta(x) = \frac{\zeta_1(x) + \zeta_2(x)}{2} \quad (4)$$

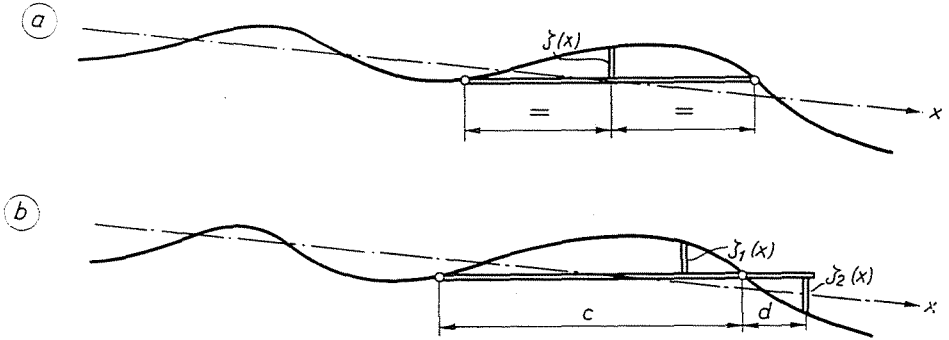


Abb. 3

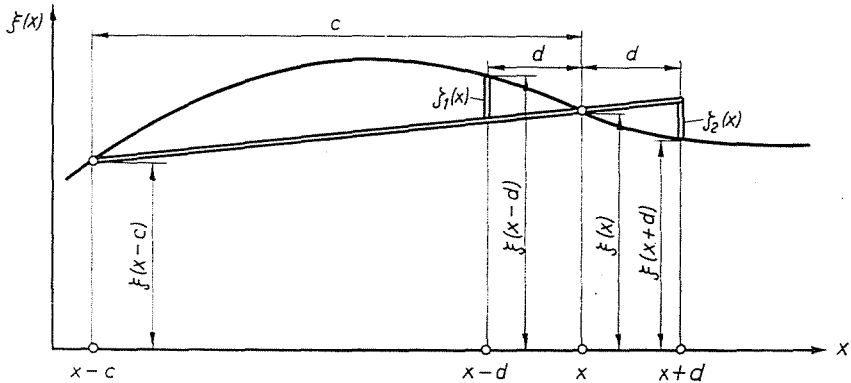


Abb. 4

Die Beziehung zwischen der registrierten Sehnenhöhenfunktion $\zeta(t)$ und der gesuchten Gleisunebenheits- (Erreger-) Funktion wird mit den Kurzbezeichnungen in Abb. 4 durch folgende Zusammenhänge ausgedrückt:

$$\zeta_1(x) = \xi(x-d) - \xi(x-c) - \frac{c-d}{c} [\xi(x) - \xi(x-c)] \quad (5)$$

und

$$\zeta_2(x) = \xi(x-c) - \xi(x+d) + \frac{c+d}{c} [\xi(x) - \xi(x-c)]. \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) in (4) eingesetzt, erhält man die Gleichung

$$\zeta(x) = \frac{1}{2} \left[\xi(x-d) + \frac{2d}{c} \xi(x) - \frac{2d}{c} \xi(x-c) - \xi(x+d) \right]. \quad (7)$$

Da das für die Erregung kennzeichnende Leistungsspektrum bestimmt werden sollte, ist es zweckmäßig, die Beziehung zwischen der Gleisunebenheit $\xi(x)$ und der gemessenen Sehnenhöhe $\zeta(x)$ auf die Spektren der Autokorrelationsfunktionen dieser Funktionen zu beziehen.

Unter der Voraussetzung einer Meßgeschwindigkeit $v = 1$ m/s sind die Funktionen $\zeta(x)$ und $\xi(x)$ mit den Zeitfunktionen $\zeta(t)$ und $\xi(t)$ identisch, daher wird die Beziehung zwischen den Leistungsspektren ihrer Autokorrelationsfunktionen durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\Phi_{\zeta\zeta}(j\omega) = |I(j\omega)|^2 \Phi_{\xi\xi}(j\omega). \quad (8)$$

Um $I(j\omega)$, die Übertragungscharakteristik des Meßgeräts, zu ermitteln, betrachten wir die Funktionen $\zeta(t)$ und $\xi(t)$ als Funktionen, deren Energiespektrum existiert, damit läßt sich $(j\omega)$ aus der Gl.

$$Z(j\omega) = I(j\omega) \cdot \Xi(j\omega) \quad (9)$$

bestimmen. Da

$$Z(j\omega) = \mathfrak{F} \zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(t) e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

und

$$\Xi(j\omega) = \mathfrak{F} \xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (11)$$

gelten und die Abstände c und d in Gl. (7) wegen der Normierung $v = 1$ m/s als Zeiten betrachtet werden dürfen, läßt sich unter Anwendung der Gl. (7) folgender Zusammenhang anschreiben:

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[\xi(t-d) + \frac{2d}{c} \xi(t) - \frac{2d}{c} \xi(t-c) - \xi(t+d) \right] \right\} e^{-j\omega t} dt. \quad (12)$$

Den Verschiebungssatz der Fouriertransformation angewandt, schreiben wir die Gl. (12) wie folgt:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) = & \frac{1}{2} e^{-j\omega d} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt + \frac{d}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt - \\ & - \frac{d}{c} e^{-j\omega c} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} e^{j\omega d} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Wird aus der rechten Seite von Gl. (13) der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt = \Xi(j\omega)$$

ausgeklammert, dann erhält man

$$Z(j\omega) = \Xi(j\omega) \left[\frac{1}{2} e^{-j\omega d} + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} e^{-j\omega c} - \frac{1}{2} e^{j\omega d} \right]. \quad (14)$$

Aus dieser Gl. ergibt sich die Übertragungscharakteristik des Meßgeräts unter Berücksichtigung der Gl. (9) zu

$$\Gamma(j\omega) = \frac{1}{2} e^{-j\omega d} + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} e^{-j\omega c} - \frac{1}{2} e^{j\omega d}. \quad (15)$$

Da

$$e^{-j\omega c} = \cos \omega c - j \sin \omega c$$

und

$$\frac{e^{j\omega d} - e^{-j\omega d}}{2} = j \sin \omega d,$$

nimmt die Gl. (15) folgende Form an:

$$\Gamma(j\omega) = \frac{d}{c} (1 - \cos \omega c) - j \left(\frac{d}{c} \sin \omega c - \sin \omega d \right). \quad (16)$$

Nach Gl. (16) werden die Amplitude $K(\omega)$ und die Phasencharakteristik $\varphi(\omega)$ des Meßgeräts durch folgende Zusammenhänge ausgedrückt:

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{d_2}{c_2} (1 - \cos \omega c)^2 + \left(\frac{d}{c} \sin \omega c - \sin \omega d \right)^2} \quad (17)$$

und

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\left(\frac{d}{2} \sin \omega c - \sin \omega d \right)}{\frac{d}{c} (1 - \cos \omega d)}. \quad (18)$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Amplituden und Phasencharakteristiken der Meßgeräte symmetrischer Anordnung in Abb. 3a bestimmen.

Die in Ungarn eingesetzten Meßwagen mit den Betriebsnummern 950 und 150 sind symmetrischer, der Meßwagen mit der Betriebsnummer 163 ist

asymmetrischer Anordnung. Unter Berücksichtigung der auf diesen Meßwagen angewandten Sehnenlängen sind ihre Amplitudencharakteristiken in Abb. 5 dargestellt.

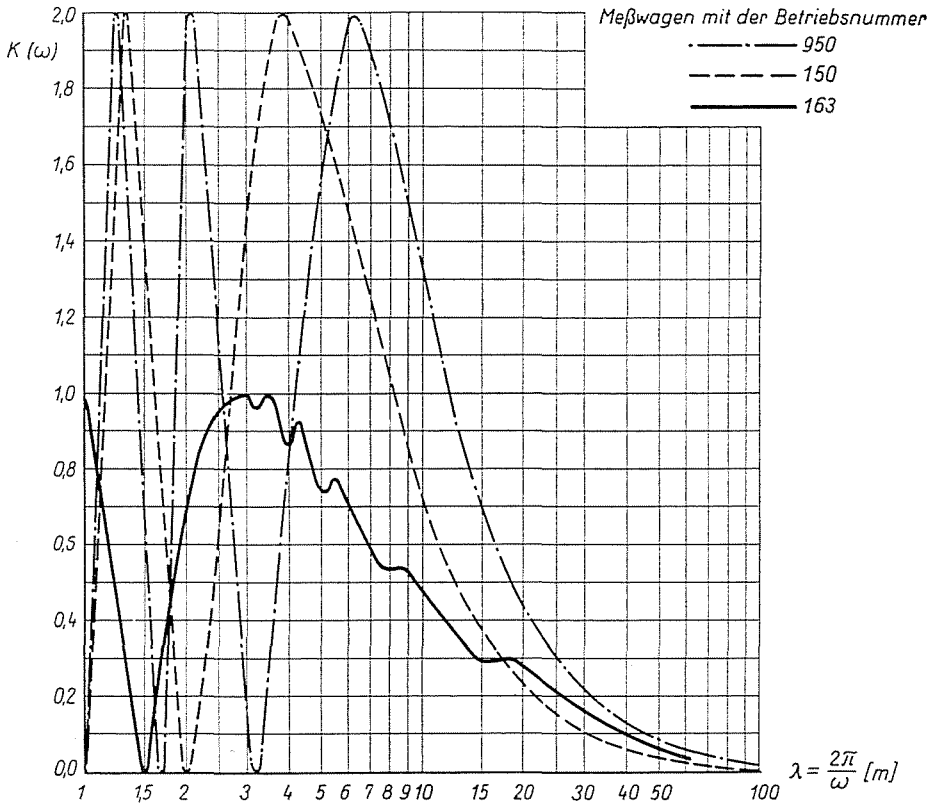


Abb. 5

6. Bestimmung des Erregungsleistungsspektrums anhand des Sehnenhöhendigramms

In Kenntnis der Übertragungscharakteristik des Meßgeräts kann das Leistungsspektrum der Erregung ermittelt werden. Nach formaler Umordnung der Gl. (8) ergibt sich das Erregungsleistungsspektrum aus

$$\Phi_{\xi\xi}(j\omega) = \frac{1}{|\Gamma(j\omega)|^2} \Phi_{\zeta\zeta}(j\omega). \quad (19)$$

Da

$$|\Gamma(j\omega)|^2 = K^2(\omega)$$

gilt

$$\Phi_{\xi\xi}(j\omega) = \frac{1}{K^2(\omega)} \Phi_{\zeta\zeta}(j\omega). \quad (20)$$

Bei $K(\omega) = 0$ ist Gl. (20) selbstverständlich nicht gedeutet, daher ist die Bestimmung des Leistungsspektrums der Erregung mit Berücksichtigung der Amplitudencharakteristiken in Abb. 5 nur in einem bestimmten Wellenlängen- bzw. dementsprechenden Frequenzbereich möglich. Obwohl bei allen drei Meßgeräten die Amplitudencharakteristik bei wachsenden Wellenlängen asymptotisch gegen Null geht, läßt sich eine hinreichende Genauigkeit unter Berücksichtigung von Gl. (20) nur erreichen, wenn die obere Grenze von λ für alle drei Meßeinrichtungen in 40 bis 50 m festgelegt wird. Die untere Grenze von λ ändert sich je nach Meßwagen, für den Meßwagen Betriebsnummer 163 beträgt sie 2 bis 2,5 m.

Nach den vorigen Ausführungen wird das Leistungsspektrum der Erregung aus folgendem Zusammenhang bestimmt:

$$\Phi_{\xi\xi}(j\omega) = H^2(\omega) \Phi_{\zeta\zeta}(j\omega). \quad (21)$$

mit

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{bei } \lambda < 2,5 \\ \frac{1}{K(\omega)}, & \text{bei } 40 > \lambda > 2,5 \\ 0, & \text{bei } \lambda > 40 \end{cases}. \quad (22)$$

Nach den Zusammenhängen (21) und (22) werden die Erregungsleistungsspektren mit Hilfe der Messung des Leistungsspektrums der Sehnenhöhe berechnet.

Einer der günstigsten Wege der Messung des Sehnenhöhen-Leistungsspektrums ist, das der Sehnenhöhenfunktion analoge elektrische Signal durch einen Bandfilter durchzulassen und den quadratischen Mittelwert des durchgelassenen Signals zu messen [3]. Den Erfahrungen gemäß weist dessen Amplitude starke Schwankungen auf, daher muß eine statistische Analyse durchgeführt werden. Dabei werden vom filtrierte Signal in äquidistanten Zeitpunkten Proben entnommen, die zweckmäßig in entsprechend gewählte Klassen eingeordnet werden.

Die Ergebnisse der Bandfiltration bzw. der statistischen Analysen in je einem Frequenzband wurden in der Tabelle auf S. 82 zusammengefaßt.

Abb. 6. Erregungsleistungsspektren

(Auswertung der Messungen)

Strecke: GODISA => KOMLÓ

Abschnitt: 00100 => 00160

linksseitiger Schienenstrang

Filtration: TERCOKTAV

Wellenlängenbereich: 3.15 – 50.0 M

Probeentnahmefrequenz: 10.0 Hz

Probenzahl: 100

Betriebsweise des Niveauschreibers: R.M.S.

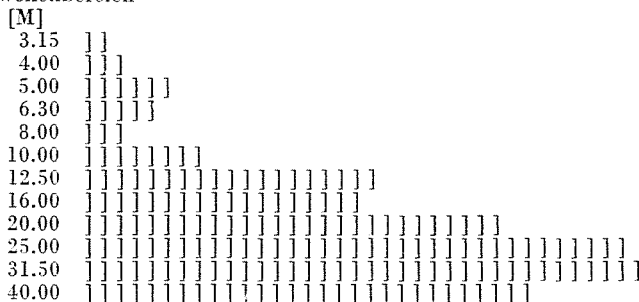
Leistungsspektrumsangaben der Amplitude

Mittelwellenbereich [M]	Amplitude linearer Mittelwert [MM/M]	Amplitude quadratischer Mittelwert [MM ² /M]
3.15	.634	.434
4.00	.749	.809
5.00	.912	1.425
6.30	.758	1.253
8.00	.562	.870
10.00	.758	1.884
12.50	1.120	4.789
16.00	.993	4.588
20.00	1.129	6.739
25.00	1.179	8.788
31.50	1.032	8.987
40.00	.855	7.270

Amplitude – Leistungsspektrum

1] = .25 MM * * 2/M

Mittelwellenbereich



Unter Berücksichtigung des Umstands, daß die Bandbreite des Bandfilters nicht unendlich schmal ist, wurde das Erregungsleistungsspektrum auf die Bandbreite 1 Hz bezogen für die zu der Mittelfrequenz f_{K1} gehörenden Ordinatenwerte angeschrieben. Die einzelnen Leistungsspektrumordinaten werden aus folgender Formel ermittelt:

$$\Phi_{\text{ss}}^i(j\omega) = H_{\text{f}}^2(\omega) \frac{\sum_{j=1}^{j=m} n_{ji} \zeta_{Kj}^2}{\Delta f_{Ki}} \quad (23)$$

		Mittelfrequenz der Bandfilter (Hz)					
		f_{K1}	f_{K2}	...	f_{Ki}	...	f_{Kn}
Mittelwerte in den Klassen der Sehnenhöhenamplitude	ζ_{K1}	n_{11}	n_{12}	...	n_{i1}	...	n_{1n}
	ζ_{K2}	n_{21}	n_{22}	...	n_{2i}	...	n_{2n}
	.	.	.				
	.	.	.				
	.	.	.				
	ζ_{Kj}	n_{j1}	n_{j2}	...	n_{ji}		n_{jn}

	ζ_{Km}	n_{m1}	n_{m2}	...	n_{mi}	...	n_{mn}

Da die Bestimmung des Erregungsleistungsspektrums aus der Beziehung (23) einen großen Rechenaufwand erfordert, empfiehlt es sich, diese für einen Digitalrechner zu programmieren. Das Ergebnis der nach der im weiteren beschriebenen Methode durchgeführten Messung ist in Abb. 6 zu sehen. Die Darstellung des Erregungsleistungsspektrums mit Hilfe der Rechanlage ermöglicht einen raschen Überblick.

Zusammenfassung

Wird das Schienenfahrzeug als lineares System aufgefaßt, läßt sich in Kenntnis des Erregungsleistungsspektrums das die Querschwingungen des Wagenkastens beschreibende Leistungsspektrum errechnen.

Das Erregungsleistungsspektrum kann aus der Sehnenhöhenfunktion in Kenntnis der Übertragungscharakteristik der Sehnennmessung in einem beschränkten Wellenlängenbereich erstellt werden.

Literatur

1. STASSEN, H. G.: Random lateral motion of Railway Vehicles. Doktorarbeit. Delft 1967.
2. SIMONYI A.: Ausarbeitung eines Verfahrens zur Bestimmung der Querverschiebung-Zeit-Funktion der Eisenbahn-Radsatzachse.* Forschungsbericht 1969.
3. Frequency Analysis and Power Spectral Density Measurements. Bruel-Kjaer 1970.

* In ungarischer Sprache.

Dr. Alfréd SIMONYI, 1502 Budapest, Postfach 91, Ungarn